頂点作用素代数上で実現される 3 互換群

山内 博*

東京女子大学 現代教養学部

1 序文

本稿では 3 互換群と呼ばれる群について考えます。

定義 1.1. G を群、D をその位数 2 の元からなり、G における共役で閉じた部分集合とする。G は D で生成されており、D の勝手な 2 元 a, b について ab の位数が 3 以下となるとき、組 (G, D) を **3 互換群**という。

3 互換群の典型例としては n 次対称群 S_n とその互換の類があります。3 互換群にはフィッシャー空間と呼ばれる (有限) 幾何が自然に付随します。まずこの対応関係について簡単に解説します。

定義 1.2. X を点集合、$\mathcal{L}$ を冪集合 $\mathcal{P}(X)$ の部分集合として、$\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}$ が相異なるならば $\ell_1 \cap \ell_2 = \varnothing$ もしくは $|\ell_1 \cap \ell_2| = 1$ が成り立つとき、組 $(X, \mathcal{L})$ が**偏線形空間** (partial linear space) という。またこのとき $\mathcal{L}$ の元を直線という。

例 1.3. (位数 2 の双対アファイン平面)
6 点集合 $X = \{x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}\}$ における直線の集合を $\mathcal{L} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4\}$, $\ell_n = \{x_{ij} \mid n \notin \{i, j\}\}$ と定めれば、$(X, \mathcal{L})$ は偏線型空間をなす。これを位数 2 の双対アファイン平面という。

例 1.4. (位数 3 のアファイン平面)
$\mathbb{F}_3$ を 3 元体として、9 点集合 $X = \{x_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{F}_3\}$ における直線の集合を $\mathcal{L} = \{x_{i,j}, x_{k.l}, x_{-i-k,-j-l} \mid i, j, k, l \in \mathbb{F}_3\}$ と定めれば、$(X, \mathcal{L})$ は偏線形空間をなす。これを位数 3 のアファイン平面という。

定義 1.5. $(X, \mathcal{L})$ を偏線形空間 とする。二直線 $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}$ に対し、ℓ_1, ℓ_2 のどちらとも共有点を持つ直線すべてを集めたものを ℓ_1, ℓ_2 の生成する部分空間という。すべての直線が X の 3 点部分集合からなり、二直線が生成する部分空間が位数 2 の双対アファイン平面もしくは位数 3 のアファイン平面になるとき、$(X, \mathcal{L})$ を**フィッシャー空間**という。

*本研究は科研費若手 (スタートアップ) 19840025 および若手 (B) 21740011 の助成を受けたものである。

(G,D) を 3 互換群とするとき、D を点集合とし、$a,\ b\in D$ が S_3 を生成するときに $\langle a,b\rangle$ の位数 2 の元のつくる 3 点集合 $\{a,b,a^b=b^a\}$ を直線とすれば、フィッシャー空間が得られます。これは $x,\ y,\ z\in D$ としたとき、部分群 $\langle x,y,z\rangle$ は S_3, S_4, $3^2{:}2$ もしくは $3^{1+2}{:}2$ のいずれかと同型になり、S_4 には位数 2 の双対アファイン平面が、また $3^2{:}2$ および $3^{1+2}{:}2$ には位数 3 のアファイン平面が付随することから分かります (cf. [As97, CH95])。

逆に、フィッシャー空間 $(X,\mathcal{L})$ が与えられた場合、X の元 x に対し、x を通る各直線において x 以外の 2 点を入れ替える置換は $(X,\mathcal{L})$ の自己同型を与え、これらが生成する群を考えることで X 上の置換群として 3 互換群が得られます。この対応は中心が自明という条件のもとで 3 互換群とフィッシャー空間の間に一対一対応を与えます。それゆえ、中心が自明な 3 互換群を調べることは付随するフィッシャー空間を調べることと同義となりえます。

このように 3 互換群はフィッシャー空間という極めて扱いやすい幾何構造で記述することができます。そこで無限次元代数の一つである頂点作用素代数上でどのような 3 互換群が実現できるかという問題を、頂点作用素代数の部分構造からフィッシャー空間の構造を見出す問題として捉えることが可能となります。この考えに基づいた先行研究としては宮本 [Mi96]、北詰-宮本 [KM01] および松尾 [Ma05] の結果が知られています。本稿では散在型に分類される 3 互換群と頂点作用素代数について新たに得られた結果を解説します。

2　グライス代数と頂点作用素代数

モンスターのグライス代数と頂点作用素代数のグライス代数について簡単に説明します。

2.1　モンスターのノートン代数

G を群、χ を G の既約表現、M_χ をその表現空間とし、次を仮定します。

$$\big(\mathrm{Sym}^2\chi,\chi\big)=\big(\mathrm{Sym}^2\chi,\hat{1}_G\big)=\big(\mathrm{Sym}^3\chi,\hat{1}_G\big)=1$$

このとき M_χ には G-不変な可換代数構造が一意に入り、またこの積構造に関して不変な対称内積が一意に入ります。これを G の**ノートン代数**といいます。

有限単純群の分類研究において、1973 年にモンスター単純群 $\mathbb{M}$ の存在がフィッシャーおよびグライスによって予想されました。様々な研究によりモンスターが存在すればその忠実な最小表現次数は 196883 次であること、またこの表現は上記の性質を満たしており、ノートン代数の構造が入ることが示されました**註** [1]。そして 1982 年にグライスが $196884\,(=1+196883)$ 次の可換代数 $\mathfrak{B}$ を実際に構成し、$\mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$ の部分群としてモンスターが存在することを確定させました (cf. [G82, C85])。この 196884 次の可換代数 $\mathfrak{B}$ を**グライス代数**といいます。グライス代数の自己同型群はモンスターを部分群にもちますが、より詳細に調べられ、実際には $\mathrm{Aut}(\mathfrak{B})=\mathbb{M}$ となることがティッツにより示されています (cf. [Ti84])。

註 [1] それどころか、指標表も決定されていたそうです。群が存在する以前にです。

2.2 頂点作用素代数のグライス代数

頂点作用素代数を簡単に紹介します。詳細および一般論については文献 [FLM88, MN99] を参照して下さい。

定義 2.1. 次数分解を持つベクトル空間 $V = \oplus_{n\geq 0} V_n$ が頂点作用素代数であるとは、$a, b \in V$ 及び各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して双線形な積 $(a, b) \longmapsto a_{(n)}b$ が定まっており、次の条件を満たすことである。(ここで対応 $b \longmapsto a_{(n)}b$ により $a_{(n)} \in \mathrm{End}(V)$ とも考える。)

(1) 各 $a, b \in V$ に対して、ある $N \in \mathbb{N}$ があって、$n \geq N$ ならば $a_{(n)}b = 0$ となる。

(2) 真空元 $\mathbb{1} \in V_0$ が存在し、任意の $a \in V$ に対し $\mathbb{1}_{(n)}a = \delta_{n,-1}a$, $a_{(-1)}\mathbb{1} = a$, $a_{(n)}\mathbb{1} = 0$ $(n \geq 0)$ が成り立つ。

(3) 共形ベクトル $\omega \in V_2$ が存在し、$L(n) = \omega_{(n+1)} \in \mathrm{End}(V)$ とするとき次が成り立つ。

$$[L(m), L(n)] = (m-n)L(m+n) + \frac{m^3 - m}{12}\delta_{m+n,0}c$$

ここで $c \in \mathbb{C}$ は V の**中心電荷**と呼ばれる。また、任意の $a \in V$ に対し $[L(-1), a_{(m)}] = -ma_{(m-1)}$ が成り立ち、$a \in V_n$ ならば $(L(0) - n)a = 0$ である。

(4) 任意の $a, b \in V$ および $m, n, k \in \mathbb{Z}$ に対し次のボーチャーズ恒等式が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} \left(a_{(k+i)}b\right)_{(m+n-i)} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{k}{i} \left\{a_{(m+k-i)}b_{(n+i)} - (-1)^k b_{(n+k-i)}a_{(m+i)}\right\}$$

以上の公理から、$a \in V_n$ のとき $\mathrm{o}(a) := a_{(n-1)}$ は各斉次空間 V_k 上の線形作用素を定めることが示されます[註2]。この $\mathrm{o}(a)$ を a の定める**ゼロモード作用素**と呼びます。$V_1 \neq 0$ のときは、$a, b \in V_1$ に対しブラケット積を $[a, b] := \mathrm{o}(a)b = a_{(0)}b$ で、内積を $(a|b)\mathbb{1} = a_{(1)}b$ と定めれば、$\mathfrak{g} = V_1$ には不変内積を持つ (有限次元) リー代数の構造が入り、$a \in V_1$ のモード $a_{(m)}$ $(m \in \mathbb{Z})$ は $\mathfrak{g}$ をアファイン化したリー代数の V 上の表現を与えます。一般に $V_1 \neq 0$ のときは $\mathfrak{g}$ のリー群が V に作用するため、連続群ではなく有限群の対称性を考えたい場合は次の仮定をおきます。

条件 1. 頂点作用素代数 $V = \oplus_{n\geq 0} V_n$ は次数付けに関し $V_0 = \mathbb{C}\mathbb{1}$, $V_1 = 0$ を満たす。

このとき、次数 2 の部分空間 V_2 には $a, b \in V_2$ に対し積を $ab := \mathrm{o}(a)b = a_{(1)}b$ で、内積を $(a|b)\mathbb{1} = a_{(3)}b$ で定めれば、不変内積を持つ可換代数の構造が入ります。この代数構造を V の**グライス代数**と呼びます。グライス代数は元々モンスターの最小非自明表現上の可換代数構造を指すものでしたが、以下の経緯により、条件 1 を満たす頂点作用素代数に対して一般化されました。

ムーンシャイン予想の研究においてフレンケル達によってムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ が構成されました (cf. [FLM88])。$V^\natural$ は条件 1 を満たしており、その次数 2 の

註2 一般に $a_{(m)}V_k \subset V_{n+k-m-1}$ となります。

部分空間 $V_2^\natural$ に入る可換代数構造はグライスによって構成されたモンスターのノートン代数と一致します。フレンケル達は $V^\natural$ の全自己同型群 $\mathrm{Aut}(V^\natural)$ はそのグライス代数の全自己同型群 $\mathrm{Aut}(V_2^\natural)$ と一致することを示しました。これとグライス達の結果を合わせて、$\mathrm{Aut}(V^\natural) = \mathbb{M}$ であることが証明されました。この可換代数構造は $V^\natural$ に限ったものではなく、条件 1 を満たすすべての頂点作用素代数 V に対して定義されるので、一般化によりこれを V のグライス代数と呼んでいます[註3]。

2.3 グライス代数とフィッシャー空間

頂点作用素代数のグライス代数は頂点作用素代数の部分構造であり、その構造は全構造よりも扱いやすいものになります。しかしながら、部分構造であるグライス代数の構造から頂点作用素代数上の自己同型群の作用が記述できる場合があります。

(G, D) を 3 互換群、$(X, \mathcal{L})$ を付随するフィッシャー空間とします。$\gamma, \delta \in \mathbb{C}$ をパラメーターとし、X の元を基底とする線形空間 $B_{\gamma,\delta} = \oplus_{x \in X} \mathbb{C}x$ 上に積および内積を以下のように定めます。

$$ab := \begin{cases} 2a & (a = b) \\ \dfrac{\delta}{2}(a + b - a^b) & (\{a, b, a^b\} \in \mathcal{L}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \qquad (a|b) := \begin{cases} \gamma & (a = b) \\ \dfrac{\gamma\delta}{8} & (\{a, b, a^b\} \in \mathcal{L}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{2.1}$$

このとき $B_{\gamma,\delta}$ は冪等元で張られた不変内積を持つ可換代数をなします。この代数は松尾氏の論文 [Ma05] において導入され[註4]、頂点作用素代数のグライス代数が $B_{\gamma,\delta}$ を部分代数として含む場合、ある条件下[註5]において対応するフィッシャー空間を持つ 3 互換群が頂点作用素代数上に自己同型群として作用することが証明されています。3 互換群はフィッシャー空間という比較的扱いやすい構造で決まるため、この例のように頂点作用素代数の部分構造としてそれを記述できれば、3 互換群の頂点作用素代数上の作用が実現できるようになります。

3 宮本の自己同型と佐久間の定理

3.1 コンウェイの軸冪等元

ここで少し、モンスターのグライス代数 $\mathfrak{B}$ を考えます。$\mathfrak{B}$ の自己同型群であるモンスター単純群 $\mathbb{M}$ には位数 2 の元の共役類は二つあり、2A, 2B 共役類として区別されています。$t \in \mathbb{M}$ を 2A 元とします。このとき t の中心化群は $\mathbb{B}$ をベビーモンスター単純群として $C_{\mathbb{M}}(t) \simeq 2.\mathbb{B}$ となります。グライス代数は $\mathbb{M}$-加群として $\mathfrak{B} = \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{196883}}$ と既約

[註3] つまり $V = V^\natural$ のときは元々のモンスターのノートン代数であるグライス代数が得られます。
[註4] 宮本氏の先行結果 [Mi96] を参考に松尾氏はこのような可換代数構造を考案しました。
[註5] 冪等元 (ヴィラソロ元) に関する “fusion property of binary type” のことです。詳細は [Ma05] の `arXiv` 版を参照のこと。

分解しますが、これを $C_{\mathbb{M}}(t)$-加群とみると以下のように既約分解します。

$$\mathfrak{B} = \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{4731}} + \underline{\mathbf{96255}}$$

これより不動点部分代数 $\mathfrak{B}^{C_{\mathbb{M}}(t)}$ は互いに直交する二つの冪等元で張られた 2 次元可換結合代数をなすことが分かります。この二つの冪等元は内積に関して異なる長さを持っており、これにより区別することができます。$\mathfrak{B}^{C_{\mathbb{M}}(t)}$ の冪等元で長さが短い方を a_t とします。このとき $(a_t|a_t) = 2^{-4}$ となります。これを 2A 元 t の定める**軸冪等元** (axial vector) と呼びます。この対応 $t \longmapsto a_t$ により $\mathbb{M}$ の 2A 元から $\mathfrak{B}$ への写像が定義できました。逆に、軸冪等元から 2A 元を復元することもできます。2A 元 $t \in \mathbb{M}$ および冪等元 $a_t \in \mathfrak{B}$ の $\mathfrak{B}$ への作用を表にすると、以下のようになります。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathfrak{B} & = & \underline{\mathbf{1}} & + & \underline{\mathbf{1}} & + & \underline{\mathbf{4731}} & + & \underline{\mathbf{96255}} & + & \underline{\mathbf{96256}} \\
t & : & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & -1 \\
\mathrm{ad}(a_t) & : & 0 & & 1 & & 1/4 & & 0 & & 1/32 \\
\exp\left(32\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ad}(a_t)\right) & : & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & -1
\end{array} \tag{3.1}$$

この表から a_t の随伴作用を指数関数にした $\exp\left(32\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{ad}(a_d)\right)$ の作用は元々の t の作用と $\mathfrak{B}$ 上一致することが分かります。よって逆対応 $a_t \longmapsto t$ が得られました。

このようにグライス代数 $\mathfrak{B}$ の軸冪等元とモンスター $\mathbb{M}$ の 2A 元との間には密接な関係があることをコンウェイは指摘しました (cf. [C85])。

3.2 宮本の自己同型

モンスターのグライス代数 $\mathfrak{B}$ はムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ の部分構造として実現できました。この視点から、コンウェイの軸冪等元を再考してみます。V を条件 1 を満たす頂点作用素代数とします。

補題 3.1. ([Mi96]) $a \in V_2$ について、a が V のグライス代数における冪等元であることと、$2a$ が中心電荷 $8(a|a)$ のヴィラソロ元であることは同値である。

この補題からコンウェイの軸冪等元をムーンシャイン頂点作用素代数において考えた場合、中心電荷 1/2 のヴィラソロ元に対応することが分かります。中心電荷 1/2 のヴィラソロ代数の表現はよく分かっており、$L(1/2, 0)$, $L(1/2, 1/2)$, $L(1/2, 1/16)$ の三つの既約加群を持ちます。ここで $L(c, h)$ は中心電荷 c, 最高ウェイト h のヴィラソロ代数上の既約最高ウェイト表現を表します。宮本氏は [Mi96] において頂点作用素代数を用いることでコンウェイの軸冪等元の逆構成法を与えました。$e \in V_2^\natural$ を勝手な中心電荷 1/2 の単純ヴィラソロ元とすると、e の生成する部分代数 $\langle e\rangle$ は中心電荷 1/2 の単純ヴィラソロ頂点作用素代数 $L(1/2, 0)$ と同型であり、$V^\natural$ は $\langle e\rangle$-加群として完全可約になります。$L(1/2, h)$ と同型な既約部分加群の和を $V_e(h)$ とすれば、$\langle e\rangle$-加群として以下のような等型成分が得られます。

$$\begin{array}{ccccccc}
V^\natural & = & V_e^\natural(0) & \oplus & V_e^\natural(1/2) & \oplus & V_e^\natural(1/16) \\
\tau_e & : & 1 & & 1 & & -1
\end{array} \tag{3.2}$$

この分解を用いて、線形写像 τ_e を $V^\natural_e(0)\oplus V^\natural_e(1/2)$ 上 1 倍、$V^\natural_e(1/16)$ 上 -1 倍するものとして定めます。

定理 3.2. ([Mi96]) $\tau_e\in \mathrm{Aut}(V^\natural)$

$V^\natural$ のグライス代数上でのトレースから τ_e はモンスターの 2A 元を与え、ヴィラソロ元 e は τ_e の軸冪等元に対応しています。特に、e は不動点部分代数 $(V^\natural)^{C_{\mathbb{M}}(\tau_e)}$ に属する唯一の中心電荷 1/2 のヴィラソロ元になります。これは丁度コンウェイの 2A 元から軸冪等元の構成とは逆の、ヴィラソロ元から 2A 元の構成を与えています。これらをまとめることで次の一対一対応が得られます。

定理 3.3. ([C85, Mi96]) $V^\natural$ の中心電荷 1/2 の単純ヴィラソロ元と $\mathbb{M}$ の 2A 元は対応 $e\longmapsto \tau_e$ により一対一に対応する。

以上の対応関係はムーンシャイン頂点作用素代数に限ったものですが、宮本氏は頂点作用素代数においてヴィラソロ元を用いた自己同型の一般的な構成法を与えました。ヴィラソロ代数のユニタリー系列とは、中心電荷および最高ウェイトが以下の公式で与えられる最高ウェイト表現 $L(c_m,h^{(m)}_{r,s})$ のことでした。

$$\begin{aligned} c_m &= 1-\frac{6}{(m+2)(m+3)}, && m=1,2,3,\dots,\\ h^{(m)}_{r,s} &= \frac{((m+3)p-(m+2)q)^2-1}{4(m+2)(m+3)}, && 1\le r\le m+1,\quad 1\le s\le m+2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$r=s=1$ のとき $h^{(m)}_{1,1}=0$ であり、$L(c_m,0)$ は単純ヴィラソロ頂点作用素代数になります。$L(c_m,0)$ の表現はすべて完全可約であり、$L(c_m,h^{(m)}_{r,s})$, $1\le s\le r\le m+1$ が既約加群の完全代表系を与えます (cf. [DMZ94])[註6]。中心電荷 c_m のヴィラソロ元 $x\in V_2$ は $\langle x\rangle\simeq L(c_m,0)$ となるとき、**単純**と呼ばれます。x を中心電荷 c_m の単純ヴィラソロ元とするとき、V は $\langle x\rangle$-加群として完全可約であり、$V_x(h)$ を $L(c_m,h)$ と同型な既約 $\langle x\rangle$-部分加群の和とすれば次の等型成分が得られます。

$$V=\bigoplus_{1\le s\le r\le m+1} V_x(h^{(m)}_{r,s}) \tag{3.4}$$

ここで x のゼロモード $\mathrm{o}(x)$ は V 上半単純であり、$4(m+2)(m+3)\mathrm{o}(x)$ の V 上の固有値はすべて整数であることに注意すると、$\tau_x:=(-1)^{4(m+2)(m+3)\mathrm{o}(x)}$ は V 上 well-defined になります。

定理 3.4. ([Mi96]) $\tau_x\in\mathrm{Aut}(V)$

$m=1$ のときは $c_1=1/2$ であり、τ_x は (3.2) で考えたものと一致しています。それゆえ τ_x はコンウェイの軸冪等元を一般の頂点作用素代数に拡張したものと考えられます。ここで次の集合を考えます。

$$P_m=\begin{cases}\left\{h^{(m)}_{1,s}\;\middle|\;1\le s\le m+2\right\} & (m:\text{ 偶数のとき})\\ \left\{h^{(m)}_{r,1}\;\middle|\;1\le r\le m+1\right\} & (m:\text{ 奇数のとき})\end{cases} \tag{3.5}$$

註6 $h^{(m)}_{m+2-r,m+3-s}=h^{(m)}_{r,s}$ が成り立つため、(3.3) にある最高ウェイトには重複があります。

このとき分解 (3.4) において部分空間 $\bigoplus_{h\in P_m} V_x(h)$ は部分代数をなすことがヴィラソロ代数のフュージョン規則より従います。$V=\bigoplus_{h\in P_m} V_x(h)$ となるとき、x は V 上 ***σ*-型**であると定めます。このとき τ_x は V 上自明に作用しますが、代わりに次のように新しい自己同型を定めることができます。

$$\sigma_x := \begin{cases} (-1)^{s+1} \quad \text{on} \quad V_x(h_{1,s}^{(m)}) \quad (m:\text{偶数のとき}) \\ (-1)^{r+1} \quad \text{on} \quad V_x(h_{r,1}^{(m)}) \quad (m:\text{奇数のとき}) \end{cases} \tag{3.6}$$

定理 3.5. ([Mi96]) $\sigma_x \in \mathrm{Aut}\left(\bigoplus_{h\in P_m} V_x(h)\right)$

以上の構成法で得られた自己同型を**宮本の自己同型**と呼びます。

3.3 3 互換性と 6 互換性

ここでは中心電荷 1/2 の単純ヴィラソロ元の場合に宮本の自己同型を詳しく解説します。以下では簡便化のため中心電荷 1/2 の単純ヴィラソロ元を**イジング元**と呼びます。次の条件を満たす頂点作用素代数を考えます。

条件 2. 頂点作用素代数 V は条件 1 を満たし、さらに不変内積が正定値となるような実形 $V_{\mathbb{R}}$ を持つ。

V を条件 2 を満たす頂点作用素代数、$V_{\mathbb{R}}$ をそのコンパクトな実形として、E を $V_{\mathbb{R}}$ の σ-型イジング元の集合とします。σ-型イジング元は比較的簡単な構造をしており、E が生成する部分代数は次のようになります。

命題 3.6. ([Mi96, Ma05]) $V_{\mathbb{R}}$ において σ-型イジング元の集合を E とするとき、$V_{\mathbb{R}}$ のグライス代数において E が生成する部分代数は 2.3 節で定義したある 3 互換群に付随した可換代数 $B_{1/2,1/2}$ と同型である[註7]。

この命題から次の 3 互換性が従います。

定理 3.7. ([Mi96, KM01, Ma05]) E を $V_{\mathbb{R}}$ の σ-型イジング元の集合として $\sigma(E)=\{\sigma_e \in \mathrm{Aut}(V) \mid e\in E\}$, $G=\langle \sigma(E)\rangle$ とおくとき、$(G,\sigma(E))$ は 3 互換群をなす。また G のフィッシャー空間には位数 3 のアファイン平面は含まれない。

ここでカイパースとホールによる 3 互換群の分類 (cf. [CH95]) を簡単に紹介します。(G,D) を中心が自明な 3 互換群とします。G に付随するフィッシャー空間において位数 3 のアファイン平面が含まれないとき G を斜交型といい、位数 3 のアファイン平面は含まれてもよいが $2^{1+6}.\mathrm{SU}_3(2)'$ に対応する部分空間が含まれないとき G を直交型といい、また位数 3 のアファイン平面および $2^{1+6}.\mathrm{SU}_3(2)$ は含まれてもよいが $\mathrm{P}\Omega_8^+(2){:}\mathrm{S}_3$ に対応する部分空間が含まれないとき G をユニタリー型といい、$\mathrm{P}\Omega_8^+(2){:}\mathrm{S}_3$ に対応する部分空間が

[註7] この場合 E が $B_{1/2,1/2}$ の基底の集合となります。

含まれるとき G を散在型といいます。斜交型の例としては位数 2 の体上の直交群 $\mathrm{O}_n(2)$ が、直交型の例としては位数 3 の体上の直交群 $\mathrm{O}_n(3)$ が、ユニタリー型の例としては標数 2 のユニタリー群 $\mathrm{SU}_n(2)$ が、散在型の例としてはフィッシャー群 Fi_{22}, Fi_{23}, Fi_{24} が挙げられます。定理 3.7 に現れる 3 互換群は [KM01] において多くの例が構成され、[Ma05] においてすべて分類されました。残念なことに、この定理から σ-型イジング元だけを考えた場合には斜交型を超える 3 互換群は実現できないことになります。では、σ-型とは限らない場合はどうでしょうか。この問題に対する最も基本的な結果は次の佐久間の定理で与えられます。

定理 3.8. ([S07]) V を条件 2 を満たす頂点作用素代数、$V_{\mathbb{R}}$ をそのコンパクトな実形とし、e, f を $V_{\mathbb{R}}$ のイジング元とするとき、次が成り立つ。
(1) $V_{\mathbb{R}}$ のグライス代数において e, f の生成する部分代数の同型類は 9 種類ある。
(2) V 上 $\tau_e\tau_f$ の位数は 6 以下である。

ムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ は条件 2 を満たしており、さらに $V^\natural$ のすべてのイジング元はその実形 $V^\natural_{\mathbb{R}}$ に含まれています。$e, f \in V^\natural_{\mathbb{R}}$ をイジング元とするとき、対応する 2A 元の積 $\tau_e\tau_f$ は $\mathbb{M}$ における共役類 1A, 2A, 3A, 4A, 5A, 6A, 4B, 2B, 3C のいずれかに属します。この位数の分布は拡大ディンキン図形 $E_8^{(1)}$ のラベリングと一致しており、モンスターの E_8 型マッカイ対応と呼ばれています。$V^\natural$ において e, f の生成する部分代数 $\langle e, f\rangle$ の構造は $\tau_e\tau_f$ の属する共役類によって決まり、全部で 9 通りの可能性があります。佐久間の定理は一般の頂点作用素代数においてもこの構造の分類が成り立つことを示しています**註** 8。$V^\natural$ の場合に $\tau_e\tau_f$ の属する上記の 9 個の共役類 nX を用いて部分代数 $\langle e, f\rangle$ の同型類をラベル付けすることにして、一般の頂点作用素代数においても二つのイジング元 e, f が生成する部分代数 $\langle e, f\rangle$ をその同型類に応じて nX **型の二面体部分代数** (dihedral subalgebra) と呼ぶことにします。

次節では佐久間の定理の応用として、二面体部分代数を用いた 3 互換群の構成法を紹介します。

4 二面体部分代数の応用

2A 型および 3A 型の二面体部分代数考えます。次の補題は佐久間の定理の一部です。

補題 4.1. e, f をイジング元とする。
(1) $\langle e, f\rangle$ が 2A 型であるための必要十分条件は $(e|f) = 2^{-5}$ である。
(2) $\langle e, f\rangle$ が 3A 型であるための必要十分条件は $(e|f) = 13 \cdot 2^{-10}$ である。

以下、2A および 3A 型部分代数の持つ性質を簡単にまとめておきます。

2A 型二面体部分代数　$U_{2A} = \langle e, f\rangle$ を 2A 型二面体部分代数とすると、U_{2A} には三つのイジング元 e, f, $\sigma_e f = \sigma_f e$ があり、$\tau_e\tau_f = \tau_{\sigma_e f} = \tau_f\tau_e$ が成り立つ。$\mathrm{Aut}(U_{2A}) \simeq \mathrm{S}_3$ であ

註 8 いいかえれば、$V^\natural$ で起こりえる可能性がすべてを尽くしていることになります。

り、これは三つのイジング元の置換を引き起こしている。U_{2A} には $L(1/2,0)\otimes L(7/10,0)$ と同型な全部分代数が含まれている。

3A 型二面体部分代数　$U_{3A}=\langle e,f\rangle$ を 3A 型二面体部分代数とすると、U_{3A} には三つのイジング元 $e,\, f,\, \tau_e f=\tau_f e$ があり、$\tau_e\tau_f\tau_e=\tau_{\tau_e f}=\tau_f\tau_e\tau_f$ が成り立つ。$\mathrm{Aut}(U_{3A})\simeq \mathrm{S}_3$ であり、これは三つのイジング元の置換を引き起こしている。U_{3A} には $L(4/5,0)\otimes L(6/7,0)$ と同型な全部分代数が含まれている。

4.1　2A 代数とベビーモンスター

V を条件 2 を満たす頂点作用素代数とし、E_V を実形 $V_{\mathbb{R}}$ のイジング元全体の集合とします。$e\in E_V$ を一つ固定して、以下の用意をします[註9]。

$$I_e:=\{f\in E_V \mid (e|f)=2^{-5}\},\quad X:=\mathrm{Com}_{V_{\mathbb{R}}}\langle e\rangle,\quad G:=\langle \tau_f\in \mathrm{Aut}(V_{\mathbb{R}})\mid f\in I_e\rangle \tag{4.1}$$

補題 4.1 より、$x\in I_e$ のとき $\langle e,x\rangle$ は 2A 型二面体部分代数をつくります。

定理 4.2. ([HLY12$_\alpha$]) 上の設定の元で $\varphi_e: G\longrightarrow \mathrm{Aut}(X),\ g\longmapsto g|_X$ は群準同型を定め、任意の $x,\, y\in I_e$ について $|\varphi_e(\tau_x\tau_y)|\le 4$ が成り立つ。

この定理は佐久間の定理を応用して証明されます。大雑把にいえば、$x,\, y\in I_e$ のとき $\langle x,y\rangle$ は本質的には 1A, 2A, 3A, 4A, 4B, 2B 型のいずれかになることが示せ、それからこの定理が従います。この定理の条件を満たす G は $\{\varphi_e(\tau_x)\mid x\in I_e\}$ を互換類とする $\{3,4\}$-互換群と呼ばれ、典型的な例としてベビーモンスター単純群 $\mathbb{B}$ が挙げられます。$V^\natural_{\mathbb{R}}$ のイジング元はすべて $\mathbb{M}$ の作用で共役であり、交換団部分代数 $V\!B^\natural_{\mathbb{R}}:=\mathrm{Com}_{V^\natural_{\mathbb{R}}}\langle e\rangle$ の構造はイジング元 $e\in V^\natural_{\mathbb{R}}$ の取り方に依らず一意的に決まります。この $V\!B^\natural_{\mathbb{R}}$ を**ベビーモンスター頂点作用素代数**といいます。名前の由来は $\mathrm{Aut}(V\!B^\natural_{\mathbb{R}})\simeq\mathbb{B}$ となるからです (cf. [H02, Y05])。定理 4.2 を $V=V^\natural$ の場合に適用すると $\varphi_e(G)=\mathbb{B}=\mathrm{Aut}(V\!B^\natural_{\mathbb{R}})$ となり、ベビーモンスターの $\{3,4\}$-互換性を頂点作用素代数の立場から説明できます。さらにこの場合にはより強く、次のコンウェイ-宮本型の一対一対応を証明することができます。

定理 4.2 を $V^\natural_{\mathbb{R}}$ に適用した場合、$x\in I_e$ ならば $\varphi_e(\tau_x)$ は $V\!B^\natural_{\mathbb{R}}$ 上ベビーモンスターの 2A 元を定めます。しかし、2A 元を定めるイジング元 x は $V\!B^\natural_{\mathbb{R}}$ には含まれておらず、コンウェイ-宮本型の対応を得るにはまず $\mathbb{B}$ の 2A 元を $V\!B^\natural_{\mathbb{R}}$ のヴィラソロ元によって記述する必要があります。$t\in\mathbb{B}$ を 2A 元とすれば、$V\!B^\natural_{\mathbb{R}}$ のグライス代数における $C_{\mathbb{B}}(t)$ による不動点部分代数 $(V\!B^\natural_{\mathbb{R}})_2^{C_{\mathbb{B}}(t)}$ は 2 次元であり、互いに直交する二つのヴィラソロ元で張られています。このうち長さの短い方を f とすれば、これは中心電荷 $c_2=7/10$ であり、$V\!B^\natural_{\mathbb{R}}$ 上 σ-型となっています。この f が定める σ-型の宮本の自己同型 σ_f (cf. (3.6)) は元々の 2A 元 t と一致することが示せます。よって 2A 元 $t\in\mathbb{B}$ から中心電荷 7/10 の σ-型ヴィラソロ元 $f\in(V\!B^\natural_{\mathbb{R}})_2^{C_{\mathbb{B}}(t)}$ への対応は $t=\sigma_f$ という関係を満たしており、次の一対一対応が成り立ちます。

[註9] 部分代数 W に対し、$\mathrm{Com}_V W$ は V における W の交換団 (commutant) を表します。

定理 4.3. ([HLY12$_\alpha$]) $VB^\natural_\mathbb{R}$ の中心電荷 7/10 の σ-型ヴィラソロ元と $\mathbb{B}$ の 2A 元は対応 $f \longmapsto \sigma_f$ により一対一に対応する。

注釈 4.4. 上の対応関係においてヴィラソロ元が σ-型という条件は外すことが出来ません。また、この対応関係は実形ではなく複素数上で考えても成立します。

4.2 3A 代数と 24 次のフィッシャー群

引き続き V を条件 2 を満たす頂点作用素代数、E_V を $V_\mathbb{R}$ のイジング元の集合とします。3A 型二面体部分群を作るイジング元の組の集合を考えます。

$$T_V := \{(x,y) \in E_V^2 \mid (x|y) = 13 \cdot 2^{-10}\} \tag{4.2}$$

$(x,y) \in T_V$ としたとき、次の元は $\langle x,y \rangle$ における中心電荷 $c_3 = 4/5$ の単純ヴィラソロ元を与えます。

$$u_{x,y} := \frac{448}{135}(x+y+\tau_x y) - \frac{512}{405}(x+y+\tau_x y)_{(1)}(x+y+\tau_x y) \tag{4.3}$$

$(a,b) \in T_V$ を一つ固定し、以下を用意します。

$$\begin{aligned} &J_{a,b} := \{x \in E_V \mid \exists (x,y) \in T_V \ \ \text{s.t.} \ \ u_{x,y} = u_{a,b}\}, \\ &X := \mathrm{Com}_{V_\mathbb{R}}\langle u_{a,b}\rangle, \qquad G := \langle \tau_x \mid x \in J_{a,b}\rangle \end{aligned} \tag{4.4}$$

定理 4.5. ([HLY12$_\beta$]) 上の設定の元で $\psi_{a,b} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$, $g \longmapsto g|_X$ は群準同型を定め、任意の $x, y \in J_{a,b}$ について $|\psi_{a,b}(\tau_x\tau_y)| \le 3$ が成り立つ。

この定理も佐久間の定理を応用して証明されます。この場合、$x, y \in J_{a,b}$ のとき $\langle x,y \rangle$ は本質的には 1A, 2A, 3A, 3C 型に限られることから定理が得られます[註 10]。定理より $\psi_{a,b}(G)$ は $\{\psi_{a,b}(\tau_x) \mid x \in J_{a,b}\}$ を互換類とする 3 互換群となります。その典型例として 24 次のフィッシャー群 Fi_{24} が挙げられます。$V^\natural$ において $\mathbb{M}$ は $T_{V^\natural}$ 上に可移に作用することが知られています。そのため $VF^\natural_\mathbb{R} := \mathrm{Com}_{V^\natural_\mathbb{R}}\langle u_{a,b}\rangle$ の構造は $(a,b) \in T_{V^\natural}$ の取り方に依らずに一意に定まります。そこで $VF^\natural$ を**フィッシャー頂点作用素代数**と呼ぶことにします。理由は $\mathrm{Fi}_{24} \subset \mathrm{Aut}(VF^\natural_\mathbb{R})$ となるからです (cf. [HLY12$_\beta$])[註 11]。定理 4.5 を $V = V^\natural$ の場合に適用すると $\psi_{a,b}(G) = \mathrm{Fi}_{24}$ となり、24 次のフィッシャー群の 3 互換性を頂点作用素代数の立場から説明できます。コンウェイ-宮本型の対応についても、部分的に確かめられています。

定理 4.5 を $V^\natural_\mathbb{R}$ に適用した場合、$x \in J_{a,b}$ ならば $\psi_e(\tau_x)$ は $VF^\natural_\mathbb{R}$ 上 Fi_{24} の 2C 元を定めます。しかし、ベビーモンスターの場合と同様に、2C 元を定めるイジング元 x は $VF^\natural_\mathbb{R}$ には含まれていません。$t \in \mathrm{Fi}_{24}$ を 2C 元として、$VF^\natural_\mathbb{R}$ のグライス代数における $C_{\mathrm{Fi}_{24}}(t)$ に

[註 10] ただし 3C 型は起こりえないと予想していますが、3 互換性を示すだけであればその可能性を残しても問題ありません。

[註 11] $\mathrm{Aut}(VF^\natural_\mathbb{R}) = \mathrm{Fi}_{24}$ となることが予想されています。実際、$VF^\natural_\mathbb{R}$ のグライス代数から生成される頂点作用素部分代数を $\mathfrak{X}$ とすれば、$\mathrm{Aut}(\mathfrak{X}) = \mathrm{Fi}_{24}$ となることが [HLY12$_\beta$] において示されています。

よる不動点部分代数 $(V\!F^\natural_{\mathbb{R}})_2^{C_{\mathrm{Fi}_{24}}(t)}$ を計算するとこれもやはり 2 次元であり、互いに直交する二つのヴィラソロ元で張られています。このうち長さの短い方を v とすれば、これは中心電荷 $c_4 = 6/7$ であり、$V\!F^\natural_{\mathbb{R}}$ 上 σ-型となっています。この v が定める σ-型の宮本の自己同型 σ_v (cf. (3.6)) は元々の 2C 元 t と一致することが示せます。よってこの場合も 2C 元 $t \in \mathrm{Fi}_{24}$ から中心電荷 6/7 の σ-型ヴィラソロ元 $v \in (V\!F^\natural_{\mathbb{R}})_2^{C_{\mathrm{Fi}_{24}}(t)}$ をとるという対応を考えると $t = \sigma_v$ という関係が成り立ちます。

定理 4.6. ([HLY12$_\beta$]) Fi_{24} の 2C 元 t に対し、$t = \sigma_v$ となる中心電荷 6/7 の σ-型ヴィラソロ元 $v \in (V\!F^\natural_{\mathbb{R}})^{C_{\mathrm{Fi}_{24}}(t)}$ が唯一つ定まる。

注釈 4.7. 上の対応関係においてもヴィラソロ元が σ-型という条件は外すことが出来ません。また、この対応がベビーモンスターの場合のように一対一になるかどうかはまだ分かっていません。

4.3 (2A, 3A) 代数と 23 次のフィッシャー群

4.2 節の記号をそのまま使います。V を条件 2 を満たす頂点作用素代数とし、3A 型代数を生成する組 $(a, b) \in T_V$ を一つとり、固定します。ここでは 2A 代数と 3A 代数を組合せて考えます。次のようなイジング元を考えます。

$$I_{a,b} := \{x \in E_V \mid (a|x) = (b|x) = 2^{-5}\} \tag{4.5}$$

補題 4.1 (1) より $\langle a, x\rangle$, $\langle b, x\rangle$ はともに 2A 型二面体部分代数となります。さらにこの場合、$\langle a, b, x\rangle = \langle a, \sigma_x b\rangle$ であり、これは 6A 型二面体部分代数を与えます。

定理 4.8. ([LY14]) 上記の設定の元で以下が成り立つ。
(1) $x, y \in I_{a,b}$ のとき $\langle x, y\rangle$ は 1A, 2A, 3A, 2B 型のいずれかになる。さらに $\langle x, y\rangle$ が 2B 型ならば、$\langle x, \sigma_a y\rangle$ は 2A 型となる。
(2) $\langle \tau_x \mid x \in I_{a,b}\rangle$ は $\mathrm{Aut}(V)$ において 3 互換部分群をなす。
(3) $x, y \in I_{a,b}$ について $\langle x, y\rangle$ が 2A 型ならば $\langle a, b, x, y\rangle$ は

$$L(c_3, 0) \otimes L(c_4, 0) \otimes L(c_5, 0) \otimes L(c_6, 0) = L(4/5, 0) \otimes L(6/7, 0) \otimes L(25/28, 0) \otimes L(11/12, 0)$$

と同型な全部分代数を含む。特にその中心電荷は 52/15 である。
(4) $x, y \in I_{a,b}$ について $\langle x, y\rangle$ が 3A 型ならば $\langle a, b, x, y\rangle$ は

$$L(c_3, 0)^{\otimes 4} \otimes L(c_8, 0) = L(4/5, 0)^{\otimes 4} \otimes L(52/55, 0)$$

と同型な全部分代数を含む。特にその中心電荷は 228/55 である。

定理 4.2 および 4.5 では準同型写像による像をとることで $\{3, 4\}$ 互換群および 3 互換群を得ましたが、定理 4.8 では 3 互換群を直接部分群として取り出している点が前述の定理とは異なります。定理 4.8 を $V^\natural$ に適用した場合、$I_{a,b}$ の定義から $x \in I_{a,b}$ ならば τ_x は

τ_a, τ_b と可換になることから $\langle \tau_x \mid x \in I_{a,b} \rangle$ は $C_{\mathbb{M}}(\tau_a, \tau_b)$ と一致し、これは 23 次のフィッシャー群 Fi_{23} と同型になります[註 12]

ここで 3 互換群の帰納的構造について考えます。(G, D) を 3 互換群とするとき、a, $b \in D$ について $ab \neq ba$ であるとき $a \sim b$ と定めます。これは $\langle a, b \rangle$ が S_3 と同型という条件ともいえ、このとき a と b は互いに共役になります。任意の a, $b \in D$ について $a \sim u_1 \sim u_2 \sim \cdots \sim u_k \sim b$ となる $u_i \in D$ がとれるとき、(G, D) は連結もしくは直既約であるといいます。連結な 3 互換群はすべての互換が互いに共役となります。$a \in D$ に対し $D_a := \{x \in D \mid ax = xa\}$, $G_a := \langle D_a \rangle$ とおけば、(G_a, D_a) は 3 互換部分群となります[註 13]。これを G の帰納的部分群と呼ぶことにします。また $D_{a,b} = (D_a)_b$, $D_{a,b,c} = (D_{a,b})_c$ として $G_{a,b} = \langle D_{a,b} \rangle$, $G_{a,b,c} = \langle D_{a,b,c} \rangle$ を定めていきます。$a \sim b$ ならば $G_a \simeq G_b$ となることに注意します。特に (G, D) が連結ならばその帰納的部分群は共役を除いて一意に定まります。フィッシャー群 Fi_{24} の帰納的部分群として Fi_{23}, Fi_{22}, $\mathrm{Fi}_{21} \simeq \mathrm{U}_6(2)$ が得られます。Fi_{24} は $\mathbb{M}$ の部分群ではありませんが、Fi_{23} は $\mathbb{M}$ の部分群であり、定理 4.8 を適用することで $\mathrm{Aut}(V^\natural)$ の部分群として記述することができます。さらにその帰納的構造を考えることで、Fi_{22} も記述できるようになります。Fi_{23} および Fi_{22} の場合にコンウェイ-宮本型の対応を得るために、以下のような部分代数の系列を考えます。

はじめに固定した $(a, b) \in T_V$ を用いて $X(0) := \langle a, b \rangle$ とし、$X(i) = \langle a, b, x^1, \ldots, x^i \rangle$ まで定義出来た場合、$x^{i+1} \in I_{a,b}$ を $x^{i+1} \notin X(i)$ かつ $(x^{i+1} | x^j) = 2^{-5}$ $(1 \leq j \leq i)$ を満たすようにとり[註 14]、$X(i+1) = \langle X(i), x^{i+1} \rangle$ と帰納的に定義します。

命題 4.9. ([LY14]) $X(n) = \langle a, b, x^1, \cdots, x^n \rangle$ を上記のように定めるとき、a, b, $x^1, \ldots, x^n$ が生成するグライス代数の構造は一意的に定まり、$X(n)$ には

$$L(c_3, 0) \otimes L(c_4, 0) \otimes \cdots \otimes L(c_{n+4}, 0)$$

と同型な全部分代数が含まれている。特に $\mathrm{Com}_{X(n)} X(n-1) \simeq L(c_{n+4}, 0)$ となる。

今、V において $X(n) = \langle a, b, x^1, \cdots, x^n \rangle$ が定義できたとします。$D_0 := \{\tau_x \mid x \in I_{a,b}\}$ とおき、帰納的に $D_i := \{\tau_y \in D_{i-1} \mid \tau_y \tau_{x^i} = \tau_{x^i} \tau_y\} = (D_{i-1})_{\tau_{x^i}}$ と定めます。このとき次が成り立ちます。

補題 4.10. D_i は $X(i)$ 上自明に作用する。

よって D_i は本質的には $\mathrm{Com}_V X(i)$ 上に作用しています。そこで $G_i := \langle D_i \rangle|_{\mathrm{Com}_V X(i)}$ とすれば定理 4.8 より (G_i, D_i) は $\mathrm{Aut}(\mathrm{Com}_V X(i))$ における 3 互換部分群になります。まとめると以下の様な部分代数とそこに作用する群の系列が得られました。

$$\begin{array}{ccccccccc}
X(0) & \subset & X(1) & \subset & X(2) & \subset & X(3) & \subset & \cdots \\
\mathrm{Com}_V X(0) & \supset & \mathrm{Com}_V X(1) & \supset & \mathrm{Com}_V X(2) & \supset & \mathrm{Com}_V X(3) & \supset & \cdots \\
\circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \\
G_0 & & G_1 & & G_2 & & G_3 & & \cdots
\end{array}$$

註 12 実際のところ、この例から一般性を推測して定理 4.8 を証明しました。

註 13 通常 $D_a = \{xa \in D \mid x \in D \setminus \{a\},\ ax = xa\}$ と定めることが多いのですが、ここでは便宜上このような定義を採用します。

註 14 このような x^{i+1} が取れるかどうかは場合によります。

G_i は G_{i-1} の帰納的部分群に相当し、おおよそ $C_{G_{i-1}}(\tau_{x^i})$ と一致します。ここで注意したいのは、$\tau_{x^n} \in G_{n-1}$ は $X(n-1)$ に作用しますが、$x^n \notin X(n-1)$ であることです。コンウェイ-宮本型の対応を得るには τ_{x^n} を $X(n-1)$ に属するヴィラソロ元で記述する必要があります。命題 4.9 より $\mathrm{Com}_{X(n)}X(n-1) = \langle f^n \rangle \simeq L(c_{n+4}, 0)$ となる中心電荷 c_{n+4} のヴィラソロ元 f^n がとれますが、これは $\mathrm{Com}_V X(n-1)$ にも属しています**註** 15 。一般論から $\tau_{x^n} = \tau_{f^n}$ となること証明できるのではないかと期待していますが、現在は $V^\natural$ の場合に限って以下が成り立つことが分かっています**註** 16。

補題 4.11. $V^\natural$ において部分代数 $X(0) \subset X(1) \subset X(2)$ を考えるとき、$n = 1, 2$ について $\tau_{f^n} \in Z(C_{G_{n-1}}(\tau_{x^n})) = \langle \tau_{x^n} \rangle$ が成り立つ。特に $\tau_{x^1}|_{\mathrm{Com}_{V^\natural}X(0)} = \tau_{f^1}|_{\mathrm{Com}_{V^\natural}X(0)}$ である。

以上をまとめて $V^\natural$ に応用します。$(a, b) \in T_{V^\natural}$ として $X(0) \subset X(1) \subset X(2) \subset V^\natural$ を考えると、例外型 3 互換群

$$G_0 \simeq \mathrm{Fi}_{23} \subset \mathrm{Aut}(\mathrm{Com}_{V^\natural}X(0)), \quad G_1 \simeq \mathrm{Fi}_{22} \subset \mathrm{Aut}(\mathrm{Com}_{V^\natural}X(1)) \tag{4.6}$$

が得られます。τ_{x^1} は $G_0 \simeq \mathrm{Fi}_{23}$ における 2A 元を、τ_{x^2} は $G_1 \simeq \mathrm{Fi}_{22}$ における 2A 元をそれぞれ定めており、$\mathrm{Com}_{V^\natural}X(0)$ および $\mathrm{Com}_{V^\natural}X(1)$ グライス代数は次のような分解を持ちます。

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Com}_{V^\natural}X(0))_2 &= \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{30888}} && (\mathrm{Fi}_{23}\text{-加群}) \\
&= \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{429}} + \underline{\mathbf{3080}} + \underline{\mathbf{13650}} + \underline{\mathbf{13728}} && (C_{\mathrm{Fi}_{23}}(2\mathrm{A})\text{-加群}) \\
(\mathrm{Com}_{V^\natural}X(1))_2 &= \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{3080}} + \underline{\mathbf{13650}} && (\mathrm{Fi}_{22}\text{-加群}) \\
&= \begin{array}{c} \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{252}}^{\oplus 2} + \underline{\mathbf{440}} + \underline{\mathbf{1155}}^{\oplus 3} \\ + \underline{\mathbf{1232}} + \underline{\mathbf{4928}} + \underline{\mathbf{6160}} \end{array} && (C_{\mathrm{Fi}_{22}}(2\mathrm{A})\text{-加群})
\end{aligned} \tag{4.7}$$

これより $\mathrm{Com}_{V^\natural}X(0)$ の $C_{\mathrm{Fi}_{23}}(\tau_{x^1})$ による不動点部分代数および $\mathrm{Com}_{V^\natural}X(1)$ の $C_{\mathrm{Fi}_{22}}(\tau_{x^2})$ による不動点部分代数のグライス代数はどちらも二次元であり、互いに直交する二つのヴィラソロ元で張られていることが分かります。f^1, f^2 をそれぞれ $\mathrm{Com}_{X(1)}X(0) = \langle f^1 \rangle$, $\mathrm{Com}_{X(2)}X(1) = \langle f^2 \rangle$ となるヴィラソロ元とすれば、これらはそれぞれ中心電荷 $c_5 = 25/28$, $c_6 = 11/12$ であり、補題 4.10 より $n = 1, 2$ について $f^n \in X(n)$ は $C_{G_{n-1}}(\tau_{x^n})$ で不変になります。それゆえ、f^1 は $\mathrm{Com}_{V^\natural}X(0)$ の $C_{\mathrm{Fi}_{23}}(\tau_{x^1})$ による不動点部分代数に、f^2 は $\mathrm{Com}_{V^\natural}X(1)$ の $C_{\mathrm{Fi}_{22}}(\tau_{x^2})$ による不動点部分代数にそれぞれ含まれています。この事実と補題 4.11 を合わせて考えることで次の Fi_{23} に対するコンウェイ-宮本型の対応定理が得られます。

定理 4.12. ([LY14]) Fi_{23} の 2A 元 t に対し、$t = \tau_f$ となる中心電荷 25/28 のヴィラソロ元 $f \in (\mathrm{Com}_{V^\natural}X(0))^{C_{\mathrm{Fi}_{23}}(t)}$ が唯一つ定まる。

註 15 $X(n) \subset V$ より $\mathrm{Com}_V X(n-1) \supset \mathrm{Com}_{X(n)}X(n-1)$ です。

註 16 この補題の証明では $C_{G_0}(\tau_{x^1}) \simeq 2.\mathrm{Fi}_{22}$, $C_{G_1}(\tau_{x^2}) \simeq 2 \cdot \mathrm{U}_6(2)$ という中心化群の中心に関する具体的な事実を用いています。

注釈 4.13. Fi_{22} の 2A 元 t に対しても $t = \tau_f$ となる中心電荷 11/12 のヴィラソロ元 $f \in (\mathrm{Com}_{V^\natural} X(1))^{C_{\mathrm{Fi}_{22}}(t)}$ が唯一つ定まると予想していますが、不動点部分代数に含まれる中心電荷 11/12 のヴィラソロ元 f については τ_f が $\mathrm{Com}_{V^\natural} X(1)$ 上自明でないことが確認できていません。もしこれが自明でなければ、補題 4.11 からこの予想が正しいことが分かります。

以上が講演の内容でした。最後に、今後の課題を挙げておきます。

問題 1. $X(n)$ **の構造の一意性とその既約表現の決定** $X(n) = \langle a, b, x^1, \ldots, x^n \rangle$ のグライス代数は一意に決まることを命題 4.9 を示しましたが、その全構造が一意的かどうかは証明されていません。補題 4.11 はムーンシャイン頂点作用素代数の場合に $n = 1, 2$ に限って証明されていますが、条件 2 を満たす一般の頂点作用素代数上で任意の $n \geq 1$ に対して成り立つものと考えられます。これを示すには $X(n)$ の既約表現を決定し、すべての既約加群上で τ_{x^n} と τ_{f^n} の作用が一致していることを示せばよいのですが、そのための最初のステップとして $X(n)$ の代数構造の一意性が必要になります[註 17]。$X(n)$ の表現論が決定されれば、注釈 4.13 で述べた Fi_{22} に対するコンウェイ-宮本型の対応関係が肯定的に解決できます。

問題 2. 直交型およびユニタリー型の 3 互換群を与える系列 頂点作用素代数上で実現できる 3 互換群に関しては中心電荷 1/2 の場合に先行する研究結果があります (cf. [Mi96, Ma05])。定理 3.7 で述べたように、中心電荷 1/2 の場合、σ-型の宮本の自己同型だけを考えた場合には斜交型の 3 互換群しか実現ができません。本稿では主に散在型の 3 互換群を発見的方法により実現しましたが、直交型、ユニタリー型に関してはまだ系列的な構成法が知られていません。最近、筆者は Ching Hung Lam 氏との共同研究において 2.3 節で述べた $B_{\gamma,\delta}$ を $\gamma = 4/5$, $\delta = 2/5$ の場合に用いれば、直交型を含む 3 互換群が頂点作用素代数上に実現できることを示しました (cf. [LY13])。また、Lam 氏 は Chen 氏との共同研究において $B_{1/2,1/16}$ をグライス代数に内包する頂点作用素代数を構成し、3 互換群の作用を持つ新しい例を [CL13$_\alpha$, CL13$_\beta$] で与えました。今後、より系統的な研究を進め、どのような 3 互換群が実現可能なのか決定し、分類する問題が考えられます。

謝辞 第５８回代数学シンポジウムにおいて講演する機会を頂戴し、大変光栄です。講演を薦めてくださった千葉大学の北詰正顕氏ならびに関係者のみなさまに感謝いたします。

参考文献

[As97] M. Aschbacher, 3-transposition groups. Cambridge Tracts in Mathematics, 124. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[CL13$_\alpha$] Hsian-Yang Chen and Ching Hung Lam, Weyl groups and vertex operator algebras generated by Ising vectors satisfying (2B,3C) condition. Preprint, `arXiv:1305.7307`

[註 17] もし代数構造が一意でない場合には、各構造の類毎に表現論を決定する必要があります。

[CL13$_\beta$] Hsian-Yang Chen and Ching Hung Lam, On Majorana representations of the group 3^2:2 of 3C-pure type and the corresponding vertex operator algebras. Preprint, `arXiv:1305.7306`

[C85] J.H. Conway, A simple construction for the Fischer-Griess monster group. *Invent. Math.* **79** (1985), 513–540.

[CH95] H. Cuypers and J.I. Hall, The 3-transposition groups with trivial center. *J. Algebra* **178**, (1995), 149–193.

[DMZ94] C. Dong, G. Mason and Y. Zhu, Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module. Proc. Symp. Pure. Math., American Math. Soc. **56** II (1994), 295–316.

[FLM88] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster. Academic Press, New York, 1988.

[G82] R.L. Griess, The friendly giant. *Invent. Math.* **69** (1982), 1–102.

[H02] G. Höhn, The group of symmetries of the shorter moonshine module. `arXiv:math/0210076`.

[HLY12$_\alpha$] G. Höhn, C.H. Lam and H. Yamauchi, McKay's E_7 observation on the Babymonster. *Internat. Math. Res. Notices* **2012** (2012), 166–212. doi:10.1093/imrn/rnr009

[HLY12$_\beta$] G. Höhn, C.H. Lam and H. Yamauchi, McKay's E_6 observation on the largest Fischer group. Communications in Mathematical Physics 310 Vol. 2 (2012), 329–365. DOI: 10.1007/s00220-011-1413-8

[KM01] M. Kitazume and M. Miyamoto, 3-transposition automorphism groups of VOA. Groups and combinatorics–in memory of Michio Suzuki, 315–324, Adv. Stud. Pure Math., **32**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.

[LY13] C.H. Lam and H. Yamauchi, On 3-transposition groups generated by σ-involutions associated to $c = 4/5$ Virasoro vectors. Preprint, `arXiv:1311.2829`

[LY14] C.H. Lam and H. Yamauchi, On 3-transposition groups generated by Miyamoto involutions. In preparation.

[Ma05] A. Matsuo, 3-transposition groups of symplectic type and vertex operator algebras. *J. Math. Soc. Japan* **57** (2005), no. 3, 639–649.; `arXiv:math/0311400`.

[MN99] A. Matsuo and K. Nagatomo, Axioms for a vertex algebra and the locality of quantum fields. MSJ Memoirs, **4**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1999.

[Mi96] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras. *J. Algebra* **179** (1996), 528–548.

[S07] S. Sakuma, 6-transposition property of τ-involutions of vertex operator algebras. *Internat. Math. Res. Notices* **2007**, no. **9**, Art. ID rnm 030, 19 pp. `arXiv:math/0608709`.

[Ti84] J. Tits, On R. Griess' "Friendly Giant". *Invent. Math.* **78** (1984), 491–499.

[Y05] H. Yamauchi, 2A-orbifold construction and the baby-monster vertex operator superalgebra. *J. Algebra* **284** (2005), 645–668.