アーベル多様体に対する幾何的ボゴモロフ予想

京都大学　国際高等教育院／理学研究科
山木　壱彦

1. 背景

本稿の主題である「アーベル多様体に対する幾何的ボゴモロフ予想[1]」とは，関数体上定義されたアーベル多様体に対し，標準的高さの小さい点を稠密に持つような既約閉部分多様体の特徴付けを与える予想である．その背後にある話題として，本稿においてはRaynaudの定理，Ullomo-Zhangの定理（算術的ボゴモロフ予想），そしてGublerの定理が重要である．Gublerの定理は幾何的ボゴモロフ予想と直接に関連するので後で詳しく述べることにして，本節では前者二つの定理を話題にする．

1.1. **Raynaudの定理**. Fを代数閉体とする．F上のアーベル多様体Aに対し，$A(F)$の（群としての）捩れ元全体の集合を$A(F)_{tors}$で表す．また，部分アーベル多様体を捩れ元で平行移動したもの，つまり部分アーベル多様体$G \subset A$と$\tau \in A(F)_{tors}$を用いて$G + \tau$と表される部分多様体を，**捩れ部分多様体**と呼ぶ．

次の予想はManinとMumfordによって予想されたもの（の一般化）であり，Raynaudによって解決された[2]．

定理 1.1. Fの標数を0と仮定する[3]．AをF上のアーベル多様体とする．このとき，Aの任意の既約閉部分多様体Xに対し，次は同値である．

(a) $X \cap A(F)_{tors}$はXで稠密である．
(b) Xは捩れ部分多様体である．

Aの既約閉部分多様体Xが捩れ部分多様体ならば，Xには$A(F)_{tors}$の元が稠密に存在することは簡単にわかる．つまり(b)から(a)が従うのは自明である．この主張の本質は，捩れ元が稠密に存在するならば捩れ部分多様体になってしまうところ，つまり(a)から(b)が従うという点にある．

[1]「幾何的」という言葉の示唆するところについては§2.3参照．

[2]元々のManin-Mumford予想は，Aが射影曲線のヤコビ多様体でXがその射影曲線を埋め込んだもののという場合に立てられた．Raynaudは最初このヤコビ多様体の場合についての予想を解決し，その後定理1.1の形に一般化した．

[3]もしFが有限体の代数閉包なら$A(F)$の元は全て捩れ元となり，したがってAの部分多様体は捩れ元を稠密に持つ．したがって，この定理においては少なくともこの場合は排除する必要がある．

1.2. **算術的ボゴモロフ予想**. アーベル多様体に対する算術的ボゴモロフ予想とは，F が代数体の場合に Raynaud の定理を高さ関数を用いて「算術的に」一般化した主張である．この「予想」は既に Ullmo-Zhang の定理として確立されている．

その主張を述べるために，設定から始めよう．K を代数体とし $\overline{K}$ をその代数閉包とする．A を $\overline{K}$ 上のアーベル多様体とする．各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し，$[n] : A \to A$ で n 倍準同型を表すことにする．A 上の直線束 L に対し，$[-1]^*L = L$ が成立するとき L は**偶**であるという．このとき，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $[n]^*L = L^{\otimes n^2}$ が成立することが，いわゆる立方定理から従う．

L を偶かつ豊富な直線束とする．L に付随して決まる標準的高さ関数

$$\hat{h}_L : A(\overline{K}) \to \mathbb{R}$$

を考える[4]．今 L が豊富なので $\hat{h}_L$ は非負値であり，さらに L が偶であることより任意の $x \in A(\overline{K})$ について $\hat{h}_L(nx) = n^2\hat{h}_L(x)$ を満たすことが知られている．特に，$\tau \in A(\overline{K})_{tors}$ ならば $\hat{h}_L(\tau) = 0$ であることに注意しておく．

X を A の部分多様体とする．任意の $\epsilon \geq 0$ に対し

$$X(\epsilon; L) := \{x \in X(\overline{K}) \mid \hat{h}_L(x) \leq \epsilon\}$$

とおく．

次の主張は，A が曲線のヤコビ多様体の場合に（制限された形で）Bogomolov によって提出された予想で，Ullmo および S. Zhang によって独立に証明された[5]．

定理 1.2 (算術的ボゴモロフ予想，[8, 13])**.** X を A の既約閉部分多様体とする．このとき，次は同値である．

(a) 任意の $\epsilon > 0$ に対し $X(\epsilon; L)$ は X で稠密である．
(b) X は捩れ部分多様体である．

捩れ元の高さは 0 であるから $X \cap A(\overline{K})_{tors} \subset X(0; L)$ であり，したがって任意の $\epsilon > 0$ に対し $X \cap A(\overline{K})_{tors} \subset X(\epsilon; L)$ である．捩れ部分多様体において捩れ点の集合は稠密なので，(b) から (a) はこのように容易に従う．非自明なのは (a) から (b) が従うという部分である．

[4]ここでは，高さや標準的高さ関数については説明しないが，後に K が関数体の場合については必要事項を紹介する．

[5]Ullmo は，A が射影曲線のヤコビ多様体で X が埋め込まれたその曲線の場合という，Bogomolov が提出した元々の形で解いた．Zhang はここにあるような一般化された形の主張を証明した．論文はそれぞれ独立のものだが，一つの冊子に前後並んで載っている．また，その証明で使われた主要な手法はどちらも同程度分布の定理によるもの（§5.2 参照）で同じである．

また，定理 1.2 は Raynaud の定理の F が代数体の場合における一般化になっている．実際，任意の $\epsilon > 0$ に対し $X \cap A(\overline{K})_{tors} \subset X(\epsilon; L)$ が成立するので，定理 1.2 の「(a) ならば (b)」を仮定すると定理 1.1 の非自明な部分である「(a) ならば (b)」が得られる．

さて，算術的ボゴモロフ予想（Ullmo-Zhang の定理）とは，代数体上のアーベル多様体に対し，定理 1.2 (a) の条件を満たす既約部分多様体を特徴付ける主張と読むことができる．すると「関数体上でも同様の特徴付けはあるのだろうか？」という自然な疑問が生じる．幾何的ボゴモロフ予想は，この疑問を定式化したものである．

2. 標準的高さ関数

以後，k を代数閉体とし，$\mathfrak{B}$ を k 上の非特異射影曲線[6]，K をその関数体とする．代数閉包 $\overline{K}$ を固定しておく．本節では，K 上の幾何的[7]高さの理論，及びアーベル多様体における標準的高さ関数について概説する．高さに関する基本的な内容は例えば [5] に載っている．

2.1. **高さ**. Z を $\overline{K}$ 上の射影多様体，L を Z 上の直線束とする．話を簡単にするため，Z は K 上定義できる[8]と仮定するが，これは本質的な仮定ではない．

高さという概念を定義するために，まずは (Z, L) の（射影的）モデルを定義しよう．$\mathfrak{B}$ 上の平坦射影スキーム $\mathcal{Z} \to \mathfrak{B}$ と $\mathcal{Z}$ 上の $\mathbb{Q}$ 直線束[9]$\mathcal{L}$ の組 $(\mathcal{Z}, \mathcal{L})$ で $\mathcal{Z} \times_{\mathfrak{B}} \operatorname{Spec} \overline{K} = Z$ であり，さらにある正の整数 m に対し，この同一視を通して $\mathcal{L}^{\otimes m}|_Z = L^{\otimes m}$ であるもののことを，(Z, L) の（射影的）**モデル**と言う．

次に，モデルの定める高さ関数を定義しよう．$(\mathcal{Z}, \mathcal{L})$ を (Z, L) のモデルとする．各 $x \in Z(\overline{K})$ に対し，Δ_x を $\{x\}$ の $\mathcal{Z}$ における閉包とする．このとき，

$$h_{(\mathcal{Z},\mathcal{L})}(x) := \frac{(\Delta_x \cdot \mathcal{L})}{[\Delta_x : \mathfrak{B}]}$$

で定める．ここで，$(\Delta_x \cdot \mathcal{L})$ は交点数，$[\Delta_x : \mathfrak{B}]$ は $\mathcal{Z} \to \mathfrak{B}$ を Δ_x に制限した射の次数をあらわす．こうして関数 $h_{(\mathcal{Z},\mathcal{L})} : Z(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ が定義される．これを**モデル** $(\mathcal{Z}, \mathcal{L})$ **の定める高さ関数**と呼ぶ．

モデルの定める高さ関数は，その定義よりモデルに依存して決まるものであり，L のみによって定まるものではない．しかし，定義から容易にわかるように，モデルを取り替えても高さ関数は高々有界関数の差しか変わらない．つまり，有界関数を法としては一意的

[6]「曲線」すなわち一次元である必要はなく，一般に正規な射影多様体の関数体ならこれからの議論はそのまま成立する．しかし，ここでは記述を簡単にするため一変数関数体で行う．
[7]この形容詞については §2.3 参照．
[8]つまり，K 上の射影多様体 Z' が存在して $Z = Z' \otimes_K \overline{K}$ おいうこと．
[9]つまり $\operatorname{Pic}(\mathcal{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ の元．

である．このことを利用して，L **に付随した高さ関数**というものを，関数 $h: Z(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ であって，(Z, L) のあるモデル $(\mathcal{Z}, \mathcal{L})$ に対し $h - h_{(\mathcal{A},\mathcal{L})}$ が有界関数となるものとして定義する．

2.2. **標準的高さ関数**. 前小節で定義した高さ関数は，有界関数の不定性をもった概念であった．一般にはそのようなもののうち「標準的な」ものがあるわけではない．しかし，Z がアーベル多様体 A の場合には，標準的なものが取れることが古典的に知られている．ここでは，後に必要となる「L が A 上の偶な直線束の場合」に限って，標準的高さ関数とは何かを概説する．

L を A 上の偶な直線束とする．このとき，高さ関数 $\hat{h}_L: A(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ で $A(\overline{K})$ 上の二次形式となるもの，つまりある双線型形式 $b: A(\overline{K}) \times A(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ を用いて $\hat{h}_L(x) = \frac{1}{2}b(x, x)$ と書けるもの，が一意に存在することが知られている．これを L に付随した**標準的高さ関数**という．

注意 2.1. $\hat{h}_L$ は二次形式なので，特に任意の $n \in \mathbb{Z}$ と $x \in A(\overline{K})$ に対し $\hat{h}_L(nx) = n^2\hat{h}_L(x)$ が成立する．つまり，2 次の同次関数である．なので，逆に h_L が L に付随する高さ関数で，それが 2 以上のある自然数 n に対し $h_L(nx) = n^2 h_L(x)$ を満たすならば，それは自動的に標準的高さ関数であるがわかる．

さらに L が豊富であるとしよう．一般に，豊富な直線束に付随する高さ関数は下に有界であることが知られている[10]．そのことと $\hat{h}_L$ がそれが二次形式であることに注意すると，$\hat{h}_L \geq 0$，つまり $\hat{h}_L$ は非負値関数であることがわかる．本稿では，豊富な偶直線束に付随した標準的高さ関数が重要となる．

一般に，標準的高さ関数はモデルの定める高さ関数とはならない．しかしながら，A が $\mathfrak{B}$ 上のアーベルスキームの幾何的生成ファイバーの場合には，標準的高さ関数はあるモデルの定める高さ関数となる．そのことを見るために，A が $\mathfrak{B}$ 上のアーベルスキーム $\pi: \mathcal{A} \to \mathfrak{B}$ の幾何的生成ファイバーであるとする．σ_0 を 0 切断とする．このとき，(A, L) のモデル $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ で $\mathcal{L}$ を σ_0 に制限したものが自明な直線束となるものが容易に取れる．

命題 2.2. 上の状況の下，$h_{(\mathcal{A},\mathcal{L})}$ は L に付随した標準的高さ関数である．

証明. n を 2 以上の整数として n 倍準同型 $[n]: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ を考える．$\mathcal{L}$ の生成ファイバーへの制限は偶なので，$\mathfrak{B}$ 上の直線束 $\mathcal{M}$ が存在して $[n]^*\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\otimes n^2} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \pi^*\mathcal{M}$ が成立する．$[n]^*\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$ は零切断 σ_0 上自明なので $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathfrak{B}}$ が従い，$[n]^*\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\otimes n^2}$ を得る．このことに注意

[10] 豊富でなくても半豊富ならこのことは言える．

すると，モデル定める高さ関数の定義（と射影公式）より，任意の $x \in A(\overline{K})$ に対し

$$h_{(\mathcal{A},\mathcal{L})}(nx) = h_{(\mathcal{A},[n]^*\mathcal{L})}(x) = h_{(\mathcal{A},\mathcal{L}^{\otimes n^2})}(x) = n^2 h_{(\mathcal{A},\mathcal{L})}(x)$$

となることがわかる．注意 2.1 より，$h_{(\mathcal{A},\mathcal{L})}$ は標準的高さ関数であることが結論される．□

$\overline{K}$ 上のアーベル多様体 A に対し，k 上のアーベル多様体 A_0 が存在して $A = A_0 \otimes_k \overline{K}$ となるとき，A を**定アーベル多様体**と呼ぶことにする．このとき，$A(\overline{K})$ の部分集合 $A(k) := A_0(k)$ を考えることができる．これを A の k 点集合と呼ぶ．

L は A 上の偶かつ豊富な直線束で，A_0 上にある直線束 L_0 を A に引き戻したものであると仮定する．今，$\mathcal{A} := A_0 \times_{\operatorname{Spec} k} \mathfrak{B}$ とおき，$\mathcal{A}$ 上の直線束 $\mathcal{L}$ を，L_0 を第一射影 $\mathcal{A} \to A_0$ で引き戻したものとする．すると $(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ は (A, L) のモデルである．

この設定の下，次の主張は命題 2.2 の系である．

系 2.3. このとき，任意の $x \in A(k)$ に対し $\hat{h}_L(x) = 0$ である．

証明. x を $A(\overline{K})$ の元と見てその閉包を $\mathcal{A}$ の中でとったものは $\Delta_x = \{x\} \times \mathfrak{B}$ であり，$\mathcal{L}$ の定義から $h_{(\mathcal{A},\mathcal{L})}(x) = 0$ がわかる．よって，命題 2.2 より $\hat{h}_L(x) = 0$ が結論される． □

注意 2.4. 後で出てくる補題 4.1 より，系 2.3 の主張は，豊富かつ偶であるどんな L についても成立するがわかる．

2.3. **「幾何的」とは.** 森脇 [7] において，$\mathbb{Q}$ 上の有限生成体 K' 上の射影多様体に対して代数体上の場合の古典的な高さを一般化する「算術的高さ関数」を定義が定義され，その算術的高さについて K' 上のアーベル多様体に対しボゴモロフ予想（定理 1.2 と同じ内容）が確立されている[11]．また，その系として定理 1.1 の別証明を得られている[12].

ところで，K' は代数体上の多様体の関数体と見なせるわけで，その意味で関数体上のボゴモロフ予想を扱っているとも言える．しかしながら，森脇の算術的高さ関数は古典的な意味での関数体上の高さとは，関連はあるものの異なるものであり[13]，[7] のボゴモロフ予想は本稿における幾何的ボゴモロフ予想とは別個のものである．

本稿では，ボゴモロフ予想を「関数体上の」ボゴモロフ予想と呼ばずに「幾何的」ボゴモロフ予想と呼んでいる．それは考えている高さが森脇の算術的高さではなく古典的な「幾何的」高さであること強調し区別するためである．

---

[11] より正確には，K' の「偏極」に応じて算術的高さが定まり，その偏極が「巨大」であるときに定理として確立されている.「巨大」でない場合には [7] の議論ではボゴモロフ予想については何も言えない．

[12] F が代数体のときには定理 1.2 が別証明を与えるが，F が標数 0 のどんな代数閉体であっても，森脇の算術高さについてのボゴモロフ予想から定理 1.2 が従う．

[13] 古典的な高さは K' の「偏極」が「巨大」でない場合にあたる．

3. Gubler の定理

Gubler は，[3] において，A が全退化するような素点が存在する場合に，Ullmo-Zhang の定理と類似の主張が成立することを示した（定理 3.1）．本節ではそれを紹介する．なお，この Gubler の定理は，後に述べる幾何的ボゴモロフ予想の特殊な場合である[14].

3.1. **アーベル多様体の退化.** この小節にでは，$\mathbb{K}$ を k を剰余体とする完備離散付値体とし，その整数環を R とする．$\mathbb{K}$ 上のアーベル多様体 A に対し，その退化について復習する．

k 上の可換代数群で，アーベル多様体の代数的トーラスによる拡大となっているものを，**半アーベル多様体**と呼ぶ．そして，R 上の有限型平坦群スキーム $\mathscr{A} \to \operatorname{Spec} R$ で，生成ファイバーが A であり特殊ファイバー $\mathscr{A}_0 := \mathscr{A} \otimes_R k$ が半アーベル多様体であるものを，A の（R 上の）**半アーベルモデル**と呼ぶ．

$\mathbb{K}$ 上の任意のアーベル多様体に対し，必要なら $\mathbb{K}$ の有限次拡大体で係数拡大することにより半アーベルモデルをとることができることが，半安定還元定理より知られている．以下の話はこのような係数拡大をしても影響の無いものであるので，記述を簡明にするために R 上の A の半アーベルモデル $\mathscr{A} \to \operatorname{Spec} R$ が存在すると仮定して話を進める．

では，退化とは何かをおさらいする．A を $\mathbb{K}$ 上のアーベル多様体とする．A の半アーベルモデル $\mathscr{A} \to \operatorname{Spec} R$ をとる．$\mathscr{A} \to \operatorname{Spec} R$ の特殊ファイバー $\mathscr{A}_0$ は半アーベル多様体なので，代数群の完全列

$$1 \to T \to \mathscr{A}_0 \to B \to 0$$

が存在する．ここで，T は k 上の代数的トーラスで B は k 上のアーベル多様体である．このとき，$\dim T > 0$ ならば A は**退化**するといい，そうでないとき A は**非退化**であるという．A が退化し，かつ $B = 0$ のとき，A は**全退化**であるという．これらは，A 対し well-defined である．

3.2. **Gubler の定理.** A を $\overline{K}$ 上のアーベル多様体とする．記述を簡単にするため，A は K 上定義されていると仮定する[15]．v を K の素点とし，K_v を K の v についての完備化とする．K_v に係数拡大することにより，K_v 上のアーベル多様体 A_v が得られる．この設定の下，A_v が退化であるとき A は v で退化であるという．非退化，全退化についても同様の言葉遣いをする．

[14]なので，先に幾何的ボゴモロフ予想を述べてそれから Gubler の定理をその部分的解決として述べた方が論の流れとしては自然なのかもしれないが，時系列的にはこの定理は幾何的ボゴモロフ予想の定式化より前に確立されているので，先に紹介することにする．

[15]この話は K の有限次拡大で係数拡大しても構わないので，この仮定は本質的なものではない．

Gubler は，Ullmo-Zhang の定理の類似の主張を，A がある素点で全退化であるという仮定の下に確立した：

定理 3.1 (Gubler[3]). A を $\overline{K}$ 上のアーベル多様体とし，ある素点において全退化すると仮定する．L を A 上の偶かつ豊富な直線束とする．このとき，A の任意の既約閉部分多様体 X について次は同値である．

(a) 任意の $\epsilon > 0$ に対し $X(\epsilon; L)$ は X で稠密である．
(b) X は捩れ部分多様体である．

定理 3.1 ではアーベル多様体に退化についての仮定がついている．もし何の仮定も無い場合はどういうことが起こるのか？一つ例を見てみよう．

例 3.2 (定アーベル多様体の場合). k 上のアーベル多様体 A_0 とその既約閉部分多様体 X_0 が存在して $A = A_0 \otimes_k \overline{K}$，$X = X_0 \otimes_k \overline{K}$ となっているとする．このとき，X の k 点集合 $X(k) \subset X(\overline{K})$ を考えることができる（正確には $X_0(k)$ のこと）．すると $X(k)$ は X で稠密である．一方，系 2.3（及び注意 2.4）より，$X(k)$ の点は高さ 0，つまり $X(k) \subset X(0; L)$ であるので，$X(0; L)$ は X で稠密であることがわかる．

この例においては，X は「k 上定義されたもの」であれば捩れ部分多様体でなくても構わない．なので，任意の $\epsilon > 0$ に対し $X(\epsilon; L)$ が X で稠密となるような例で，捩れ部分多様体でないものが存在することがわかる．この事実は，Gubler の定理の結論はどんな A に対しても無条件には成立するものではないことを示している．

そこで，Gubler の定理の拡張となっているような主張，つまり「任意の $\epsilon > 0$ に対し $X(\epsilon; L)$ が X で稠密となる」ような X の特徴付けを与える主張で，どんなアーベル多様体に対しても成立するものを模索したいというのは自然な欲求である．次節で紹介する幾何的ボゴモロフ予想にはこうして行き着く．

4. 幾何的ボゴモロフ予想

4.1. **稠密な小点集合**.

最初に,「小点集合」について簡単な事実を紹介しておく．

補題 4.1 ([9]). X を A の部分多様体，L_1 及び L_2 を A 上の豊富かつ偶な直線束とする．このとき，次は同値である．

(a) 任意の $\epsilon > 0$ に対し $X(\epsilon; L_1)$ は X で稠密である．
(b) 任意の $\epsilon > 0$ に対し $X(\epsilon; L_2)$ は X で稠密である．

証明. 十分大きな $N \in \mathbb{N}$ に対し $L_1^{-1} \otimes L_2^{\otimes N}$ 及び $L_2^{-1} \otimes L_1^{\otimes N}$ が豊富となる．このとき，$\frac{1}{N}\hat{h}_{L_1} \le \hat{h}_{L_2} \le N\hat{h}_{L_1}$ が成立する．この不等式より主張が得られる． □

この補題より,「任意の $\epsilon > 0$ に対し $X(\epsilon; L)$ は X で稠密である.」という命題は豊富かつ偶な直線束 L に依らないことがわかる．そこで，これを X に対する命題とみなして，X に対しこの命題が成立するとき X **は稠密な小点集合を持つ**と言うことにする．この言葉遣いに従うと，幾何的ボゴモロフ主張とは稠密な小点集合を持つ規約閉部分多様体の特徴付けの問題ということになる．

注意 4.2. 例 3.2 のような状況，つまり A 及びその既約閉部分多様体 X は k 上定義されたものを $\overline{K}$ に係数拡大であるとする．このとき，X は稠密な小点集合を持つ．

4.2. **幾何的ボゴモロフ予想.** 幾何的ボゴモロフ予想を定式化するには，捩れ部分多様体の一般化で「稠密な小点集合を持つものを特徴付けるであろうもの」を定式化する必要がある．それがここで定義する特殊部分多様体である．

定義 4.3 ([9]). A の既約閉部分多様体 X が**特殊部分多様体**であるとは，k 上のアーベル多様体 B，アーベル多様体の準同型 $\phi : B \otimes_k \overline{K} \to A$，$B$ の既約閉部分多様体 Y_0，A の部分アーベル多様体 G，そして $\tau \in A(\overline{K})_{tors}$ が存在して

$$X = \phi(Y \otimes_k \overline{K}) + G + \tau$$

が成立することを言う．

注意 4.2 や，標準的高さ関数はアーベル多様体の準同型と可換であること，そして標準的高さ関数が二次形式であるという事実を用いると，X が特殊部分多様体ならば $X(0; L)$ は X で稠密であることが容易に示せる[16]．特に次の命題が従う．

命題 4.4 ([9]). X が特殊部分多様体なら X は稠密な小点集合を持つ．

以上の準備のもと，幾何的ボゴモロフ予想を提示する．

予想 4.5 (幾何的ボゴモロフ予想，[9]). K を代数閉体 k 上の関数体とし，A を $\overline{K}$ 上のアーベル多様体とする．X を A の既約閉部分多様体とする．このとき次は同値である．

(a) X は稠密な小点集合を持つ．
(b) X は特殊部分多様体である．

命題 4.4 より (b) から (a) が従うのはわかっているので，大事なのは，これまでと同様に「(a) ならば (b)」という部分である．

この予想と Gubler の定理との関係について確認しておこう．後でも使うので、一つ言葉を導入する．A を $\overline{K}$ 上のアーベル多様体とする．定アーベル多様体から A への準同

[16] $X(0; L)$ も偶かつ豊富な L の取り方によらない．

型が必ず自明となるとき，A は**自明な跡を持つ**という[17]．A が自明な跡を持つとき，その部分多様体が捩れ部分多様体であることと特殊部分多様体であることは同等である．もし A がある素点で全退化なら A は自明な跡を持つ．したがって，この予想は Gubler の定理の一般化になっている．

5. 幾つかの結果

5.1. **全非退化な場合への帰着と部分的結果．** 現時点で予想 4.5 は未解決であるが，関連する結果は幾つか得られている．それらを紹介しよう．

そのために，A の部分アーベル多様体で，どの素点においても非退化であるもののうち包含関係で最大のものを maximal nowhere degenerate abelian subvariety（略して MNDAS）と呼ぶことにする．任意のアーベル多様体 A に対し MNDAS は一意に存在することは簡単にわかる．

定理 5.1 ([10])**.** $\mathfrak{m}$ を A の MNDAS とする．このとき次は同値である．

(a) A に対し幾何学的ボゴモロフ予想が成立する．

(b) $\mathfrak{m}$ 対し幾何学的ボゴモロフ予想が成立する．

楕円曲線に対して幾何学的ボゴモロフ予想が成立することはわかっている．というのも，楕円曲線の場合は高さ 0 の点と特殊点であることは同値であることは古典的に知られているからである．したがって，次の系が得られる．

系 5.2 ([10])**.** $\mathfrak{m}$ を A の MNDAS とする．もし $\dim \mathfrak{m} \leq 1$ ならば，A に対し幾何学的ボゴモロフ予想が成立する[18]．

もしある素点において A が全退化であるならば，$\mathfrak{m} = 0$ であることがその定義よりわかる．このことは，系 5.2 が Gubler の定理の一般化になっていることを意味する．また，もし A が単純アーベル多様体である素点で退化しているものであれば $\mathfrak{m} = 0$ となるので，このような A についても幾何的ボゴモロフ予想は成立する．系 5.2 は，割と広範なクラスのアーベル多様体に対し幾何的ボゴモロフ予想が成立することを言っている．

5.2. **証明のアイデア．** 定理 5.1 の証明の基本的なアイデアについて触れておく．証明の大枠は Ullmo-Zhang の定理（定理 1.2）の証明の議論の類似になっている．そこで，まず定理 1.2 の証明のアイデアを紹介しよう．

---

[17]実際，この条件は A の $\overline{K}/k$ 跡（Chow trace）が自明になることと同値である．跡については例えば [5] 参照のこと．

[18]$\dim \mathfrak{m} = 1$ のとき，$\mathfrak{m}$ は自動的に定アーベル多様体である．

定理 1.2 の証明の基礎となるのは，いわゆる生成的小点列に対する同程度分布の定理である．**生成的小点列**とは，$X(\overline{K})$ の点列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で，次の条件を満たすもののことである：

(1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 部分列は，X の真の閉部分集合に含まれない．

(2) $\lim_{n\to\infty}\hat{h}(x_n)=0$.

アルキメデス的素点 σ を一つ固定して，A 及び X をそれを通して複素解析空間とみなす．すると，X には A 上の正の平坦計量から決まる「標準測度」と呼ばれる測度が入る[19]．**同程度分布の定理**は，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が生成的小点列ならば，そのガロア軌道は標準測度に関して一様に分布することを主張する．

これを前提に，証明は背理法でなされる：仮に反例 X があったとする．それをもとに少しテクニカルな操作をすると，あるアーベル多様体の既約閉部分多様体の生成的小点列で，そのガロア軌道の分布が一様でないものが作れてしまう．しかし，これは同程度分布の定理に矛盾するというわけである．

この議論で必要となる道具は，生成的小点列の分布を測る場とその基準となる測度である．定理 1.2 の証明では，分布を測る場は複素トーラスの部分解析空間でり，基準となる測度は平坦計量から決まる標準測度であった．それらが考えられる前提として，代数体にはアルキメデス的素点があることが重要であった．

では，アルキメデス的素点を持たない関数体上では，どのようにして同じ型の議論を行うのであろうか？Gubler の定理の証明でもそうであったが，議論の場としての複素解析空間の代替物となるものが（適当な）アルキメデス素点の上のベルコビッチ空間であり，分布を測るのに基準となる測度は，これまた標準測度と呼ばれる，ベルコビッチ空間上の Chambert-Loir 測度（[1]）である[20]．これらに，標準測度の詳細な研究（そこでは [4] における標準測度に記述が使われる）と，いくつかの技術的な議論を組み合わせて，基本的には上で説明した同程度分布の定理を使った議論で証明する．

一つ注意を述べておく．実は，定理 5.1 は，証明で同程度分布の定理を用いる手法が通用する限界の結果である．この定理は退化のないアーベル多様体に全てを押し付けられるという主張であるが，では退化のないアーベル多様体に対して同様の議論を試みても，何も得られない．というのも，この場合には，標準測度が一点の dirac 測度となってしまい，その測度についての分布を論じても何も出てこないからである．なので，退化の無いアーベル多様体について考察しようとするときには，全く別のアイデアが必要とされることになる．

---

[19]つまり，$z_1,\ldots,z_n$ を A の普遍被覆の標準的な座標として $\sum_{i,j} c_{ij}\sqrt{-1}dz_i\wedge d\bar{z}_j$ という形（ただし，c_{ij} は $\bar{c_{ij}}=c_{ji}$ なる複素数）の正の $(1,1)$-形式を考えて，その $(\dim X)$ 次外積を X に制限して得られる測度．

[20]実際には Gubler はトロピカル多様体（ベルコビッチ空間の「有限近似」になっている）上で考察し（[2] 参照），それを利用した

5.3. **全非退化な場合.** では，その退化のないアーベル多様体に対するボゴモロフ予想について，現在進行中の研究について述べて終わる．

準備中の論文 [11] にあるように，定アーベル多様体に対しては幾何的ボゴモロフ予想が成立する．さらに，このことを使って議論をすることにより，幾何的ボゴモロフ予想は次の予想に帰着できると観察される[21]：

予想 5.3. A は $\overline{K}$ 上のアーベル多様体で，全ての素点で非退化なものとする．さらに，A は自明な跡を持つと仮定する．X を A の既約閉部分多様体とする．このとき，X が稠密な小点集合を持つならば X は捩れ部分多様体である．

A を $\overline{K}$ 上のアーベル多様体で，全ての素点で非退化なものとする．必要なら K をその有限次拡大体と取り替えることにより，$\mathfrak{B}$ 上のアーベルスキーム $\mathcal{A} \to \mathfrak{B}$ が存在して A はその幾何的生成ファイバーであると仮定してよい．σ_0 をこのアーベルスキームの零切断とする．$\mathcal{L}$ は $\mathcal{A}$ 上の直線束で，A 上は偶かつ豊富であり，さらに $\mathcal{L}|_{\sigma_0}$ は自明であるものとする[22]．文献 [12] によると，X が稠密な小点集合を持つことと，$(\mathcal{X} \cdot \mathcal{L}^{\cdot d}) = 0$（左辺は交点数）が成立することは同値であることがわかる[23]．したがって，予想 5.3 は次の予想と同値である．

予想 5.4. A は $\overline{K}$ 上のアーベル多様体で，全ての素点で非退化なものとする．さらに，A は自明な跡を持つと仮定する．$\mathcal{X}$ を X の $\mathcal{A}$ における閉包とする．$\mathcal{A}$ 上の直線束 $\mathcal{L}$ で，A 上は偶かつ豊富であり，さらに $\mathcal{L}|_{\sigma_0}$ は自明であるものが存在して $(\mathcal{X} \cdot \mathcal{L}^{\cdot d}) = 0$ （左辺は交点数）ならば，X は捩れ部分多様体である．

References

[1] A. Chambert-Loir, Mesure et équidistribution sur les espaces de Berkovich, J. Reine Angew. Math. 595 (2006), 215–235.

[2] W. Gubler, Tropical varieties for non-archimedean analytic spaces, Invent. Math. 169 (2007), 321–376.

[3] W. Gubler, The Bogomolov conjecture for totally degenerate abelian varieties, Invent. Math. 169 (2007), 377–400.

[4] W. Gubler, Non-archimedean canonical measures on abelian varieties, Compos. Math. 146 (2010), 683–730.

[5] S. Lang, Abelian varieties, Springer-Verlag (1983).

[6] S. Lang, Fundamentals of Diophantine Geometry, Springer-Verlag (1983).

[7] A. Moriwaki, Arithmetic height functions over finitely generated fields, Invent. Math. 140 (2000), 101–142.

[21] これは，講演の際に quotation mark で囲って書いた ”定理 ”を使う．その後，その証明について幾つか詰めないといけない部分が見つかり，最近までその部分について考察をしていた．現時点では ”定理 ”は正しく予想 5.3 に帰着する議論はきちんと繋がっていると思っているが，まだ書き上げてので少し歯切れが悪い．[11] に書く予定である．

[22] もちろんこのような $\mathcal{L}$ は存在する

[23] これは [12] にある議論.

[8] E. Ullmo, Positivité et discrétion des points algébriques des courbes, Ann. of Math. 147 (1998), 167–179.
[9] K. Yamaki, Geometric Bogomolov conjecture for abelian varieties and some results for those with some degeneration (with an appendix by Walter Gubler: The minimal dimension of a canonical measure), Manuscr. Math. (2012). DOI: 10.1007/s00229-012-0599-1
[10] K. Yamaki, Strict supports of canonical measures and applications to the Geometric Bogomolov conjecture for abelian varieties, preprint.
[11] K. Yamaki, in preparation.
[12] S. Zhang, Positive line bundles on arithmetic varieties, Journal of AMS. 8, no. 1, 187–221.
[13] S. Zhang, Equidistribution of small points on abelian varieties, Ann. of Math. (2) 147 (1998), no. 1, 159–165.

E-mail address: `yamaki.kazuhiko.6r@kyoto-u.ac.jp`