階数 2 のシンプレクティック群に関するユニポテント軌道積分の係数について

若槻 聡 （金沢大学理工研究域）

アーサー跡公式の幾何サイドの細かい展開は重み付き軌道積分の一次結合によって表される．その一次結合における非半単純元の重み付き軌道積分の係数の性質は，まだ一般的に理解されていない．GL(2), SL(2), GL(3) の場合に非半単純元の重み付き軌道積分の係数はデデキントゼータ関数とヘッケ L 関数によって記述されることが知られている．今回，Hoffmann 氏との共同研究 [HW] として階数 2 の斜交群の場合に，デデキントゼータ関数とヘッケ L 関数に加えて 2 元 2 次形式の空間に関する新谷ゼータ関数を用いることで，それらの係数を記述することができた．このノートでは，[Ar2, Ar3] における幾何サイドの細かい展開を復習してから，GL(2) と SL(2) の係数に関する既知の結果を紹介する．そしてその後に Hoffmann 氏との共同研究である階数 2 の斜交群の係数に関する結果と証明の一部について説明する．

1. 一般論

このセクションでは論文 [Ar2, Ar3] に書いてあるアーサー跡公式の幾何サイドの細かい展開について説明する．すべての記号を細かく説明すると結論になかなかたどり着かないので適宜省略する．詳細については文献 [Ar5] を参照されたい．説明を略した記号はすべて [Ar5] に従っている．

まずはアーサー跡公式の記述に必要とされる記号をいくつか導入しよう．F を代数体とし，$\mathbb{A}$ を F のアデール環とする．G を F 上の連結簡約代数群とする．G から $\mathrm{GL}(1)$ への F 上の準同型写像から成る自由アーベル群を $X(G)_F$ によって記述する．そして，$\mathfrak{a}_G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(G)_F, \mathbb{R})$ によって有限次元実ベクトル空間 $\mathfrak{a}_G$ を定め，$\mathfrak{a}_G^* = X(G)_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ で双対空間 $\mathfrak{a}_G^*$ を得る．$G(\mathbb{A})$ から $\mathfrak{a}_G$ への写像 H_G が

$$\langle H_G(g), \chi\rangle = \log|\chi(g)| \quad (\chi \in X(G)_F,\ \ g \in G(\mathbb{A}))$$

によって定まる．$G(\mathbb{A})$ の部分群 $G(\mathbb{A})^1$ を

$$G(\mathbb{A})^1 = \{g \in G(\mathbb{A}) \mid H_G(g) = 0\}$$

と定義する．これより，$G(\mathbb{A})$ 上のハール測度 $\mathrm{d}g$ と $\mathfrak{a}_G$ 上のハール測度 $\mathrm{d}a$ を固定する．そして，$G(\mathbb{A})^1$ 上のハール測度 d^1g が，$\mathrm{d}g$ と d^1g の商測度が H_G を通じて $\mathrm{d}a$ と一致するように，唯一定まる．測度 d^1g につ

いて $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ は有限測度であることが知られていて，

$$\mathrm{vol}_G = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \mathrm{d}^1 g$$

とおく．記号 vol_G は Arthur の記号ではないが，係数の記述に便利なので追加する．

G の極小 Levi 部分群 M_0 を固定する．さらに $G(\mathbb{A})$ の適切な極大コンパクト群 $\mathbf{K}$ を固定する (cf. [Ar1, Section 1], $\mathbf{K}$ is admissible relative to M_0)．この $\mathbf{K}$ について $G(\mathbb{A})$ の岩澤分解が成り立つことに注意しよう．次に M_0 を Levi 部分群としてもつ G の極小放物型部分群 P_0 を固定する．以下、P は P_0 を含む標準放物型部分群とする．そして，P の Levi 分解 $P = M_P N_P$ を，N_P は P の unipotent radical とし，M_P は M_0 を含む P の Levi 部分群として，一意的に定める．$\mathbf{K}$ 上のハール測度 $\mathrm{d}k$ を $\int_{\mathbf{K}} \mathrm{d}k = 1$ により正規化する．さらに $N_P(\mathbb{A})$ 上のハール測度 $\mathrm{d}n$ を $\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} \mathrm{d}n = 1$ により正規化する．こうして $M(\mathbb{A})$ 上のハール測度 $\mathrm{d}m$ が，岩澤分解 $G(\mathbb{A}) = M_P(\mathbb{A}) N_P(\mathbb{A}) \mathbf{K}$ による積分の等式

$$\int_{G(\mathbb{A})} f(g)\mathrm{d}g = \int_{\mathbf{K}} \int_{N_P(\mathbb{A})} \int_{M_P(\mathbb{A})} f(mnk)\, \mathrm{d}m\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}k$$

が成り立つように，一意的に定まる．

$\mathfrak{a}_{M_0}^*$ における P_0 に対応する正ルート系に関する単純ルートの集合を Δ_0 と書く．そして，$\mathfrak{a}_{P_0}^+ = \{a \in \mathfrak{a}_{M_0} \mid \alpha(a) > 0\, (\forall \alpha \in \Delta_0)\}$ と置く．$C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ を $G(\mathbb{A})$ 上のコンパクトサポートをもつスムースな関数全体のなす空間とする．$G(F)$ の元 γ について，その Jordan 分解を $\gamma = \gamma_s \gamma_u$，$\gamma_s$ が半単純，γ_u がユニポテント，として記述する．$G(F)$ の元 γ と γ' が $\mathcal{O}$-同値とは，γ_s と γ_s' が $G(F)$-共役であることを意味する．この $\mathcal{O}$-同値によって $G(F)$ 上の $\mathcal{O}$-同値類の集合 $\mathcal{O}$ が定まる．$\mathcal{O}$ の元 $\mathfrak{o}$ とパラメーター $T \in \mathfrak{a}_{P_0}^+$ とテスト関数 $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ に対して，

$$K_{P,\mathfrak{o}}(g,h) = \int_{N_P(\mathbb{A})} \sum_{\gamma \in M_P(F) \cap \mathfrak{o}} f(g^{-1}\gamma n h)\, \mathrm{d}n,$$

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{P \supset P_0} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_{M_P}^G} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} K_{P,\mathfrak{o}}(\delta g, \delta g)\, \widehat{\tau}_P(H_P(\delta g) - T)\, \mathrm{d}^1 g$$

と積分 $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ を定める．ただし $\widehat{\tau}_P$ は基本ウェイトで定められる $\mathfrak{a}_{M_P}$ 上の cutoff 関数であり，$H_P(g)$ は岩澤分解 $g = mnk$ により $H_P(g) = H_{M_P}(m)$ と定められる $G(\mathbb{A})$ から $\mathfrak{a}_{M_P}$ への写像になっており，T は $\mathfrak{a}_{M_P}$ 上の点とみなせる．上記の $K_{P,\mathfrak{o}}(g,h)$ と $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ の式における $\mathfrak{o}$ の部分を $G(F)$ に置き換えて定義されるものをそれぞれ $K_P(g,h)$ と $J^T(f)$ と書く．十

分大きい $T \in \mathfrak{a}_{P_0}^+$ に関して積分 $J^T(f)$ と $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ は絶対収束することが知られている (cf. [Ar5, Section 8]).

テスト関数 f を固定すると，十分大きい $T \in \mathfrak{a}_{P_0}^+$ に関して，関数 $T \mapsto J^T(f)$ と関数 $T \mapsto J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ は T に関する有限次数の多項式になることが知られている．そして，その T に関する多項式の各係数は $C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ 上の超関数となる．適切な唯一な点 $T_0 \in \mathfrak{a}_{M_0}$ が存在して（定義は [Ar5, p.51] を見よ），その点 T_0 について

$$J(f) = J^{T_0}(f), \quad J_{\mathfrak{o}}(f) = J_{\mathfrak{o}}^{T_0}(f)$$

と置くことで $C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$ 上の超関数 $J(f)$ と $J_{\mathfrak{o}}(f)$ を得る．先程 P_0 を固定したが，$J(f)$ と $J_{\mathfrak{o}}(f)$ の値はその選択に依存しない（まだ $\mathbf{K}$ と M_0 の選択には依存している）．さらに定義よりテスト関数の $G(\mathbb{A})^1$ 上の値にしか依存していないことが明らかなので，$J(f)$ と $J_{\mathfrak{o}}(f)$ は $C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ 上の超関数となる．

超関数 $J(f)$ にスペクトルサイドと幾何サイドの二つの異なる展開を与え，そのスペクトルサイドと幾何サイドの等式を跡公式という．上述の収束性から，粗い展開と呼ばれる幾何サイドの展開が

$$J(f) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}(f)$$

と記述される．以下，各項 $J_{\mathfrak{o}}(f)$ の細かい展開について説明する．

Σ を F の素点全体の集合とし，Σ_∞ を無限素点全体から成る Σ の部分集合，Σ_{fin} を有限素点全体から成る Σ の部分集合とする．各 $v \in \Sigma$ に対して，F_v を F の v に関する完備化とする．$\mathbf{K}_v$ を適切な $G(F_v)$ の極大コンパクト群とし，

$$\mathbf{K} = \prod_{v \in \Sigma} \mathbf{K}_v$$

として良い．これより Σ の有限部分集合 S を一つ固定する．

$$F_S = \prod_{v \in S} F_v, \quad G(F_S)^1 = G(\mathbb{A})^1 \cap G(F_S), \quad \mathbf{K}^S = \prod_{v \in \Sigma - S} \mathbf{K}_v$$

とおく．$\mathbf{K}^S$ の特性関数を ϕ^S で記す．アーサー跡公式の幾何サイドの議論において重要なポイントは局所的なテスト関数 $f \in C_c^\infty(G(F_S)^1)$ と大域的なテスト関数 $f\phi^S \in G_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$ を同一視することである．つまり，対応

$$C_c^\infty(G(F_S)^1) \ni f \quad \longleftrightarrow \quad f\phi^S \in C_c^\infty(G(\mathbb{A})^1)$$

に注意する必要がある．

重み付き軌道積分 $J_M(\gamma, f)$ を本当は詳しく紹介したいのだが，定義が長いので簡単な説明で済ますことにする．M_0 を含む G の Levi 部分群 M，$G(F_S)$ の元 γ，元 γ の $G(F_S)$ 共役類上の固定された測度の三つのデータによって，$C_c^\infty(G(F_S)^1)$ 上の超関数 $J_M(\gamma, f) \quad (f \in C_c^\infty(G(F_S)^1))$

が定められる．詳しい定義に関しては，[Ar4] もしくは [Ar5] を参照されたい．記号 G_γ で G における γ の中心化群の 1 を含む連結成分を記す．もし元 $\gamma\in G(F_S)$ が $G_\gamma\subset M$ を満たすならば，重み因子 $v_M(x)$ と一般ワイル判別式 $D(\gamma)$ と軌道上の測度 $\mathrm{d}x$ によって

$$J_M(\gamma,f)=|D(\gamma)|^{\frac{1}{2}}\int_{G_\gamma(F_S)\backslash G(F_S)}f(x^{-1}\gamma x)\,v_M(x)\,\mathrm{d}x$$

と定められる．$G_\gamma\not\subset M$ となる場合には，上の様な重み付き軌道積分の一次結合の極限として定義される．

これより Arthur による幾何サイドの細かい展開を説明しよう．引き続き Σ の有限部分集合 S を固定しておく．$(\mathcal{U}_G(F))_{G,S}$ で $G(F)$ のユニポテント元の $G(F_S)$-共役類を記す．W^G は G のワイル群とする．$\mathfrak{o}$ が $G(F)$ のユニポテント元全体であるとき，$J_{\mathrm{unip}}(f)=J_{\mathfrak{o}}(f)$ とおく．

定理 1.1. [Ar2, Corollary 8.3]. Σ の有限部分集合 S を固定し，S は Σ_∞ を含むとする．このとき，任意の $f\in C_c^\infty(G(F_S)^1)$ について

$$J_{\mathrm{unip}}(f\phi^S)=\sum_{M\supset M_0}\frac{|W^M|}{|W^G|}\sum_{u\in(\mathcal{U}_M(F))_{M,S}}a^M(S,u)\,J_M(u,f)$$

かつ $a^M(S,1)=\mathrm{vol}_M$ であるような係数 $a^M(S,u)$ が唯一存在する．ただし，M は M_0 を含むような G の *Levi* 部分群全体を走る．

この定理の公式が $J_{\mathrm{unip}}(f\phi^S)$ の細かい展開である．ユニポテント元 $u\neq 1$ に対する $a^M(S,u)$ の性質は，まだ一般的には理解されていない．大域的な超関数 $J_{\mathrm{unip}}(f\phi^S)$ は局所的な超関数 $J_M(u,f)$ の一次結合で表されている．つまり，右辺の係数 $a^M(S,u)$ は左辺の ϕ^S に由来する．したがって $a^M(S,1)=\mathrm{vol}_M$ のように，係数 $a^M(S,u)$ の性質は大域的な値で説明されるべきである．

元 $\gamma\in G(F)$ について, $G_{\gamma,+}$ を F 上定義される γ の G における中心化群とする．そして先と同様に G_γ は 1 を含む $G_{\gamma,+}$ の連結成分とする．元 $\gamma\in G(F)$ を一つ固定する．σ を γ の Jordan 分解における半単純部分とする．γ と γ' が (G,S)-同値であるとは, 次の条件 (i) と (ii) を満たす $G(F)$ の元 δ が存在することを意味する．

(i) σ と $\delta^{-1}\gamma'\delta$ の半単純部分が一致する．
(ii) ユニポテント元 $\sigma^{-1}\gamma$ と $\sigma^{-1}\delta^{-1}\gamma'\delta$ は $G_\sigma(F_S)$ において共役である．

$(\mathcal{U}_{G_\sigma}(F))_{G_\sigma,S}$ の元 u について σu が γ と (G,S)-同値となるような集合を $\{u\mid\sigma u\sim\gamma\}$ と書く．次のように記号を定める．

$$\varepsilon^G(\sigma)=\begin{cases}1 & \sigma\text{ は }G\text{ において }F\text{-楕円である場合,}\\ 0 & \text{その他の場合,}\end{cases}$$

$$\iota^G(\sigma)=G_{\sigma,+}(F)/G_\sigma(F).$$

$\{u \mid \sigma u \sim \gamma\}$ には有限群 $\iota^G(\sigma)$ が推移的に作用している．さらに

$$a^G(S,\gamma) = \varepsilon^G(\sigma)\,|\iota^G(\sigma)|^{-1} \sum_{\{u \mid \sigma u \sim \gamma\}} a^{G_\sigma}(S,u)$$

と置く．特に γ が半単純ならば

$$a^G(S,\gamma) = \varepsilon^G(\gamma)\,|\iota^G(\gamma)|^{-1}\,\mathrm{vol}_{G_\gamma}$$

となる．$(M(F)\cap\mathfrak{o})_{M,S}$ を $M(F)\cap\mathfrak{o}$ における (M,S)-同値類の有限集合とする．

定理 1.2. [Ar3, Theorem 8.1]． 任意の $\mathcal{O}$-同値類 $\mathfrak{o}$ に対して，Σ_∞ を含むある素点の有限集合 $S_\mathfrak{o}$ が存在して，任意の $S\supset S_\mathfrak{o}$ と任意の $f\in C_c^\infty(G(F_S)^1)$ について

$$J_\mathfrak{o}(f\phi^S) = \sum_{M\supset M_0}\frac{|W^M|}{|W^G|}\sum_{\gamma\in(M(F)\cap\mathfrak{o})_{M,S}} a^M(S,\gamma)\,J_M(\gamma,f)$$

が成り立つ．ただし，M は M_0 を含むような G の *Levi* 部分群全体を走る．

定理 1.1 と定理 1.2 より幾何サイド全体が重み付き軌道積分の一次結合で表される．上述から分かるように，すべての係数 $a^M(S,\gamma)$ はユニポテント元 u に対する係数 $a^M(S,u)$ によって与えられる．特に係数 $a^M(S,u)$ は M と S と u にのみ依存している．そのため，係数の性質が知りたいのであれば，ユニポテント元 u に対する係数 $a^G(S,u)$ の性質を明らかにすれば良い．G の階数が 1 である場合は [Ho] において，非アデール的な記述によって係数は概均質ゼータ関数によって記述されている．しかしながら，非アデール的な記述だと S に関する係数 $a^G(S,u)$ の挙動や跡公式の安定化との関係が良く分からない．そのため，Arthur の定式化に沿ったアデール的な記述が求められる．

2. GL(2) と SL(2)

このセクションでは GL(2) と SL(2) のユニポテント軌道積分の係数に関する結果について復習する．

係数を記述するための記号を導入する．各 $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ に対して，$\mathfrak{O}_v$ を F_v の整数環とし，π_v を素元，q_v を剰余体の位数とする．各素点 $v\in\Sigma$ について $|\,|_v$ を正規付値とし，イデールノルム $|\,| = \prod_{v\in\Sigma}|\,|_v$ を得る．$\mathbb{A}^\times$ をイデールとし，$\mathbb{A}^1=\{a\in\mathbb{A}^\times \mid |a|=1\}$，$(\mathbb{R}^\times)^0=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$ とする．次に $\chi=\prod_{v\in\Sigma}\chi_v$ を $F^\times\backslash\mathbb{A}^1\cong F^\times(\mathbb{R}^\times)^0\backslash\mathbb{A}^\times$ 上の指標とする．各 $v\in\Sigma$ について，ヘッケ L 関数の局所因子を

$$L_v(s,\chi_v) = \begin{cases}(1-\chi_v(\pi_v)q_v^{-s})^{-1} & v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}\text{ かつ }\chi_v\text{ は不分岐な場合，}\\ 1 & \text{その他}\end{cases}$$

と定め，Σ の有限集合 S に対してヘッケ L 関数を

$$L^S(s,\chi)=\prod_{v\notin S}L_v(s,\chi_v)\ ,\quad L(s,\chi)=\prod_{v\in\Sigma}L_v(s,\chi_v)$$

と定める．良く知られているように $L^S(s,\chi)$ と $L(s,\chi)$ は $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束し，s-平面に有理型接続される．$\mathbf{1}_F$ を $F^\times\backslash\mathbb{A}^1$ 上の自明な表現とし，

$$\zeta_F^S(s)=L^S(s,\mathbf{1}_F),\quad \zeta_F(s)=L(s,\mathbf{1}_F)$$

とおく．$\zeta_F^S(s)$ と $\zeta_F(s)$ は $s=1$ で 1 位の極を持つ．一方，$\chi\neq\mathbf{1}_F$ なら $L^S(s,\chi)$ と $L(s,\chi)$ は $s=1$ で正則である．定数 c_F を $\zeta_F(s)$ の $s=1$ での留数とし，

$$c_v=\begin{cases}(1-q_v^{-1})^{-1} & v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}\ \text{の場合，}\\ 1 & v\in\Sigma_\infty\ \text{の場合，}\end{cases}\quad c_S=\prod_{v\in S}c_v,\quad c_F^S=c_S^{-1}c_F$$

とする．さらに

$$\mathfrak{c}_F(S,\chi)=\lim_{s\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-1)L^S(s,\chi)$$

と置く．定数 $\mathfrak{c}_F(S,\chi)$ は $L^S(s,\chi)$ の $s=1$ におけるローラン展開の定数項であり，χ が非自明指標であれば $\mathfrak{c}_F(S,\chi)=L^S(1,\chi)$ である．特に

$$\mathfrak{c}_F(S)=\mathfrak{c}_F(S,\mathbf{1}_F)$$

と置く．これらを用いて係数を記述する．

次に係数を記述するための統一的な測度の正規化について述べておく．F_v 上のハール測度 $\mathrm{d}x_v$ と $\mathbf{K}_v$ 上のハール測度 $\mathrm{d}k_v$ を

$$\int_{\mathfrak{O}_v}\mathrm{d}x_v=1\quad(v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}),\quad \int_{\mathbf{K}_v}\mathrm{d}k_v=1\quad(v\in\Sigma)$$

と正規化する．また M を M_0 を含む Levi 部分群とし，P を $M_P=M$ となる標準放物型部分群とする．Δ_0 の $\mathfrak{a}_M$ 上で消えない単純ルートに対応する基本ウェイトからなる集合を $\widehat{\Delta}_P$ と書く．また，$\mathfrak{a}_M$ の部分空間 $\mathfrak{a}_M^G$ の定義については [Ar5, p.24] を参照されたい．

$$\mathrm{vol}(\mathfrak{a}_M^G/\mathbb{Z}(\Delta_P^\vee))=1$$

によって実ベクトル空間 $\mathfrak{a}_M^G$ 上のハール測度を正規化しておく．

これより $G=\mathrm{GL}(2)$ としよう．Σ の部分集合として $\Sigma_\mathbb{R}$ を実素点全体，$\Sigma_\mathbb{C}$ を複素素点全体とする．$G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト群 $\mathbf{K}$ として

$$\mathbf{K}=\prod_{v\in\Sigma}\mathbf{K}_v,\quad \mathbf{K}_v=\mathrm{U}(2)\ \ (v\in\Sigma_\mathbb{C}),$$

$$\mathbf{K}_v=\mathrm{O}(2)\ \ (v\in\Sigma_\mathbb{R}),\quad \mathbf{K}_v=G(\mathfrak{O}_v)\ \ (v\in\Sigma_{\mathrm{fin}})$$

をとる．そして，G の極小 Levi 部分群として

$$M_0 = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G\}$$

をとる．記号

$$u(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いる．$(\mathcal{U}_G(F))_{F,S} = \{1,\, u(1)\}$ なので，問題の係数については $u(1)$ のみを考えれば良い．ユニポテント元 $u(1)$ の軌道積分を

$$J_G(u(1), f) = c_S \int_{\mathbf{K}_S} \int_{F_S} f(k^{-1}u(x)k) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}k$$

により定める．

定理 2.1. [JL, p.271 (v)]. S は Σ_∞ を含むと仮定する．このとき

$$a^{\mathrm{GL}(2)}(S, u(1)) = \frac{\mathrm{vol}_{M_0}}{2c_F} \mathfrak{c}_F(S)$$

が成り立つ．

この定理の証明について [JL] が分かり難いときは，[GJ, FL] を参照されたい．

次に $G = \mathrm{SL}(2)$ としよう．$\mathbf{K}$ と M_0 は $\mathrm{GL}(2)$ の $\mathbf{K}$ と M_0 を $\mathrm{SL}(2)$ に制限することで定める．そして，直接計算より

$$(\mathcal{U}_G(F))_{F,S} = \{1\,,\ u(\alpha) \mid \alpha \in F^\times / F^\times \cap (F_S^\times)^2\ \}$$

を得る．ユニポテント軌道積分を

$$J_G(u(\alpha), f) = c_S \int_{\mathbf{K}_S} \int_{\alpha(F_S^\times)^2} f_S(k^{-1}u(x)k) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}k \quad (\alpha \in F_S^\times)$$

と定める．また $\mathbb{A}/F^\times \cong \mathbb{A}^\times / F^\times (\mathbb{R}^\times)^0$ 上の指標 $\chi = \prod_{v \in \Sigma} \chi_v$ に対して

$$\chi_S = \prod_{v \in S} \chi_v$$

と置く．

定理 2.2. [LL, p.39 (5.11)]. S は Σ_∞ を含むと仮定する．元 $x \in F^\times$ について，等式

$$a^{\mathrm{SL}(2)}(S, u(x)) = \frac{\mathrm{vol}_{M_0}}{2\, c_F} \sum_\chi \chi_S(x)\, \mathfrak{c}_F(S, \chi)$$

が成り立つ．ただし，上の和において $\chi = \prod_{v \in \Sigma} \chi_v$ はすべての $v \notin S$ について χ_v が不分岐であるような 2 次指標全体を走る．

この定理はLabesseとLanglandsのユニポテント項の安定化より導かれる．そのため，ユニポテント項の安定化と係数の研究は密接に関係していることが分かる．実際，2次拡大L/Fによるトーラス$R^{(1)}_{L/F}(\mathbb{G}_m)$はSL(2)の内視群であり，係数に現れる2次指標の項に対応している．

GL(3)のユニポテント軌道積分の係数については[Fli, Ma]を参照されたい．また[HW]の付録でGL(3)とSL(3)の係数についてまとめてある．LabesseとLanglandsのユニポテント項の安定化の手法がそのままSL(3)の場合に応用可能で，3次指標χに関する$\mathfrak{c}_F(S,\chi)\mathfrak{c}_F(S,\chi^{-1})$が係数に現れる．もちろんSL(3)の内視群に関係している．

3. GSp(2) と Sp(2)

階数2の連結簡約代数群GSp(2)と斜交群Sp(2)を

$$\mathrm{GSp}(2)=\left\{g\in\mathrm{GL}(4)\,\middle|\,\exists\mu(g)\in\mathrm{GL}(1)\text{ s.t.}\right.$$
$$\left.{}^tg\begin{pmatrix}O_2&I_2\\-I_2&O_2\end{pmatrix}g=\mu(g)\begin{pmatrix}O_2&I_2\\-I_2&O_2\end{pmatrix}\right\},$$

そして

$$\mathrm{Sp}(2)=\{g\in\mathrm{GSp}(2)\mid\mu(g)=1\}$$

と定める．ただし，O_mはm次の零行列で，I_mはm次の単位行列とする．このセクションではGSp(2)とSp(2)のユニポテント軌道積分の係数に関する[HW]の結果を紹介する．他の非半単純元の係数（つまり，半単純元の中心化群のユニポテント元の係数）については[HW]を参照されたい．それらの係数は$\mathfrak{c}_F(S,\chi)$によって記述される．

まず記述の簡略化のためにSが2を割る素点をすべて含むことを仮定する．そして係数の記述のために2元2次形式の空間に関する新谷ゼータ関数を導入する．$F^\times/(F^\times)^2$における$d\in F^\times$の同値類を$\check{d}$と記述する．各$\check{d}$に対して類体論より$\mathbb{A}^1/F^\times$上の2次指標$\chi_d=\prod_v\chi_{d,v}$が得られる．

$$\mathfrak{Q}(F)=\{\check{d}\in F^\times/(F^\times)^2\mid d\in F^\times-(F^\times)^2\}$$

と置く．そして，$d_S\in F_S^\times$について

$$\mathfrak{Q}(F,S,d_S)=\{\check{d}\in\mathfrak{Q}(F)\mid d\in d_S(F_S^\times)^2\}$$

と置く．$\chi_{d,v}$が分岐している$v\notin S$についてのq_vの積を$N(\mathfrak{f}_d^S)$によって記す．つまり，$N(\mathfrak{f}_d^S)=\prod_{v\notin S,\,\chi_{d,v}\text{ is ram.}}q_v$であり，$\chi_d$は2次指標で$S$は2を割る素点を全部含むため$\mathfrak{f}_d^S$は$\prod_{v\notin S}\chi_{d,v}$の導手を意味する．このとき$S$と$d_S\in F_S^\times$に対する2元2次形式の空間に関する新谷ゼータ

関数が

$$\xi^S(s;d_S)=\frac{\zeta_F^S(2s-1)\,\zeta_F^S(2s)}{\zeta_F^S(2)}\sum_{\check{d}\in\mathfrak{Q}(F,S,d_S)}\frac{L^S(1,\chi_d)}{L^S(2s,\chi_d)\,N(\mathfrak{f}_d^S)^{s-\frac{1}{2}}}$$

と与えられる．ゼータ関数 $\xi^S(s;d_S)$ は [Da] で与えられた $\xi_{\mathbf{x}_S}(s)$ と本質的に一致するが，彼の議論は跡公式の定式化に適していない．そのため我々は，齋藤氏による概均質ゼータ関数の明示的公式 [Sa1, Sa2] から $\xi^S(s;d_S)$ を導くことで議論を簡略化し，有理軌道とアデール軌道の関係や局所的な測度と大域的な測度の関係を見通し良くした．[Si] や [Sh] で扱われていたオリジナルの形の新谷ゼータ関数は [Sa2, Section 2] に書かれている方法で $\xi^S(s;d_S)$ と関係付けることができる．$\xi^S(s;d_S)$ の s-平面への有理型接続は [Yu] より従う．$\xi^S(s;d_S)$ は $s=3/2$ に 1 位の極を持つことに注意されたい (cf. [HW])．ゆえに

$$\mathfrak{C}_F(S,d_S)=\lim_{s\to3/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(s-\frac{3}{2}\Big)\xi^S(s;d_S)$$

とおくと，$\mathfrak{C}_F(S,d_S)$ は $\xi^S(s;\alpha)$ の $s=3/2$ におけるローラン展開の定数項となる．

ユニポテント元の記述のために次の記号を用いる．

$$\nu(n_{12},n_{13},n_{14},n_{24})=\begin{pmatrix}1&n_{12}&n_{13}&n_{14}\\0&1&n_{14}-n_{12}n_{24}&n_{24}\\0&0&1&0\\0&0&-n_{12}&1\end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}(2).$$

また F 上定義される 2 次の対称行列の空間を V とする，つまり

$$V=\{X\in M(2)\mid X={}^tX\}$$

とする．群 $\mathrm{GSp}(2)$ と $\mathrm{Sp}(2)$ は四つのユニポテント元のクラス (i) 単位元 (unit), (ii) 極小 (minimal), (iii) 準正則 (subregular), (iv) 正則 (regular) を持つ．次のようにクラス (ii)(iii)(iv) に属する元の記号を定めておく．

$$n_{\mathrm{min}}(\alpha)=\nu(0,\alpha,0,0),\quad n_{\mathrm{reg}}(\alpha)=\nu(1,0,\alpha,\alpha)$$

$$n_{\mathrm{sub}}(X)=\nu(0,x_1,x_{12},x_2),\quad ただし\ X=\begin{pmatrix}x_1&x_{12}\\x_{12}&x_2\end{pmatrix}\in V\ とする．$$

有限素点 $v\in\Sigma_{\mathrm{fin}}$ について，前のセクションで固定した F_v 上のハール測度と $\mathrm{d}X_v=\mathrm{d}x_{1,v}\mathrm{d}x_{12,v}\mathrm{d}x_{2,v}$, $X_v=\begin{pmatrix}x_{1,v}&x_{12,v}\\x_{12,v}&x_{2,v}\end{pmatrix}$ によって $V(F_v)$ 上のハール測度を定める．

これより $G=\mathrm{GSp}(2)$ とする．まず G の極小 Levi 部分群 M_0 を G に属する対角行列全体からなる部分群として定める．M_0 を含む Levi 部

分群 M_1 と M_2 を次のように定める．

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} * & O_2 \\ O_2 & * \end{pmatrix} \in G \right\}, \quad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}.$$

極大コンパクト群 $\mathbf{K} = \prod_{v\in\Sigma} \mathbf{K}_v$ を，$v \in \Sigma_\infty$ について

$$\mathbf{K}_v = \left\{ \begin{pmatrix} A & cB \\ -\overline{B} & c\overline{A} \end{pmatrix} \in G(F_v) \;\middle|\; \begin{array}{c} A\,{}^tB = B\,{}^tA, \\ A\,{}^t\overline{A} + B\,{}^t\overline{B} = I_2,\ c \in \mathbb{C}^1 \end{array} \right\}$$

とし，$v \in \Sigma_{\mathrm{fin}}$ について $\mathbf{K}_v = G(\mathfrak{O}_v)$ とすることで定める．もちろん，M_0 と $\mathbf{K}$ はアーサー跡公式の定式化に必要な仮定を満たす．V の部分集合である 2 次の非退化対称行列全体を V^0 で記す．そして，$V^0(F_S)$ 上の同値関係 $\sim_S$ を，

$$X \sim_S Y \quad \Leftrightarrow \quad \det(X^{-1}Y) \in (F_S^\times)^2$$

によって定める．このとき

$$(\mathcal{U}_G(F))_{G,S} = \{1,\ n_{\min}(1),\ n_{\mathrm{sub}}(X),\ n_{\mathrm{reg}}(1) \mid X \in V^0(F)/{\sim_S}\}$$

が成り立つ．テスト関数 $f \in C_c^\infty(G(F_S)^1)$ に対して，次のようにユニポテント軌道積分を与える．

$$J_G(n_{\min}(1), f) = c_S \int_{K_S} \int_{F_S} f(k^{-1} n_{\min}(x) k)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}k,$$

$$J_G(n_{\mathrm{sub}}(X), f) = 2^{|S|} c_S \int_{K_S} \int_{V^0(F_S,X)} f(k^{-1} n_{\mathrm{sub}}(Y) k)\, \mathrm{d}Y\, \mathrm{d}k,$$

ただし $V^0(F_S, X) = \{Y \in V^0(F_S) \mid Y \sim_S X\}$ とする，

$$J_G(n_{\mathrm{reg}}(1), f) = c_S^2 \int_{K_S} \int_{F_S^{\oplus 4}} f(k^{-1}\nu(x_1,x_2,x_3,x_4)k)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3\, \mathrm{d}x_4\, \mathrm{d}k.$$

以上の設定の下で，次の結果を得る．

定理 3.1. [HW, Theorem 6.5]．S は Σ_∞ とすべての 2 を割る素点を含むと仮定する．このとき，

$$a^{\mathrm{GSp}(2)}(S, n_{\min}(1)) = \frac{\mathrm{vol}_{M_2}}{2\,c_F}\, \zeta_F^S(2),$$

$$a^{\mathrm{GSp}(2)}(S, n_{\mathrm{sub}}(X)) = \frac{\mathrm{vol}_{M_1}}{2\,c_F}\, \mathfrak{C}_F(S, -\det(X)) + \frac{\mathrm{vol}_{M_1}}{2\,c_F} \begin{cases} \zeta_F^S(3)^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \zeta_F^S(s)|_{s=3} & X \sim_S \mathfrak{x}_1 \text{ のとき}, \\ 0 & X \not\sim_S \mathfrak{x}_1 \text{ のとき}, \end{cases}$$

$$a^{\mathrm{GSp}(2)}(S, n_{\mathrm{reg}}(1)) = \frac{\mathrm{vol}_{M_0}}{2\,c_F^2}\,(\mathfrak{c}_F(S))^2 + \frac{3\,\mathrm{vol}_{M_0}}{4\,c_F^2}\,\mathfrak{c}'_F(S)\,c_F^S$$

が成り立つ．ただし，$X \in V^0(F)$,

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{c}'_F(S) = \frac{1}{2}\lim_{s\to+1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}(s-1)\,\zeta_F^S(s)$$

とする．

次に $G = \mathrm{Sp}(2)$ としよう．Levi 部分群 M_0, M_1, M_2 と極大コンパクト群 $\mathbf{K}$ については，GSp(2) のものを Sp(2) に制限することで定める．元 $X \in V^0(F_v)$ について $\varepsilon_v(X)$ を F_v 上のハッセ不変量とする．$V^0(F_S)$ 上の同値関係 $\sim'_S$ を

$$X \sim'_S Y \ \Leftrightarrow 「\det(X^{-1}Y) \in (F_S^\times)^2 \text{ かつ } \varepsilon_v(X) = \varepsilon_v(Y)\ (\forall v \in S)」$$

によって定める．そうすると，

$$(\mathcal{U}_G(F))_{G,S} = \left\{ 1,\ n_{\min}(\alpha),\ n_{\mathrm{sub}}(X),\ n_{\mathrm{reg}}(\alpha) \,\middle|\, \begin{array}{c} \alpha \in F^\times/(F^\times \cap (F_S^\times)^2), \\ X \in V^0(F)/\sim'_S \end{array} \right\}$$

が成り立つ．テスト関数 $f \in C_c^\infty(G(F_S)^1)$ に対して，次のようにユニポテント軌道積分を定める．

$$J_G(n_{\min}(\alpha), f) = c_S \int_{K_S} \int_{\alpha(F_S^\times)^2} f(k^{-1} n_{\min}(x) k)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}k,$$

$$J_G(n_{\mathrm{sub}}(X), f) = 2^{|S|} c_S \int_{K_S} \int_{V'(F_S, X)} f(k^{-1} n_{\mathrm{sub}}(Y) k)\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}k,$$

ただし $V'(F_S, X) = \{Y \in V^0(F_S) \mid Y \sim'_S X\}$ とおく，

$$J_G(n_{\mathrm{reg}}(\alpha), f) = c_S^2 \int_{K_S} \mathrm{d}k \int_{F_S^{\oplus 3}} \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 \int_{\alpha(F_S^\times)^2} \mathrm{d}x_4 \; f(k^{-1}\nu(x_1, x_2, x_3, x_4)k).$$

定理 3.2. [HW, Theorem 7.5]．S は Σ_∞ とすべての 2 を割る素点を含むと仮定する．元 $\alpha \in F^\times$ について

$$a^{\mathrm{Sp}(2)}(S, n_{\min}(\alpha)) = \frac{\mathrm{vol}_{M_2}}{2\,c_F} \sum_{\chi} \chi_S(\alpha)\, L^S(2, \chi)$$

となる．上の和における $\chi = \prod_{v\in\Sigma} \chi_v$ は任意の $v \notin S$ について χ_v が不分岐であるような $\mathbb{A}^1/F^\times$ 上の 2 次指標全体を走る．次に $X \in V^0(F)$

について

$$
\begin{aligned}
a^{\mathrm{Sp}(2)}(S, n_{\mathrm{sub}}(X)) =& \frac{\mathrm{vol}_{M_1}}{2\,c_F}\mathfrak{C}_F(S, -\det(X)) \\
&+ \frac{\mathrm{vol}_{M_1}}{2\,c_F}\Big(\prod_{v\in S}\varepsilon_v(X)\Big) \sum_{\check{d}\in\mathfrak{Q}^{\mathrm{ur}}(F,S,-\det(X))} L^S(1,\chi_d) \\
&+ \frac{\mathrm{vol}_{M_1}}{2\,c_F}\begin{cases}\zeta_F^S(3)^{-1}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_F^S(s)|_{s=3} & X \sim'_S \mathfrak{x}_1 \text{ のとき}, \\ 0 & X \not\sim'_S \mathfrak{x}_1 \text{ のとき} \end{cases}
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$\mathfrak{x}_1$ は定理 *3.1* で与えた，そして $\mathfrak{C}_F(S,\alpha)$ は $\xi^S(s;\alpha)$ の $s=3/2$ におけるローラン展開の定数項であり，上の和における記号 $\mathfrak{Q}^{\mathrm{ur}}(F,S,d_S)$ は

$$
\mathfrak{Q}^{\mathrm{ur}}(F,S,d_S) = \{\check{d}\in\mathfrak{Q}(F,S,d_S) \mid \chi_{d,v} \text{ は不分岐 } (\forall v\notin S)\}
$$

と定義する．元 $\alpha\in F^\times$ について

$$
a^{\mathrm{Sp}(2)}(S, n_{\mathrm{reg}}(\alpha)) = \\
\frac{\mathrm{vol}_{M_0}}{4\,c_F^2}\sum_{\chi}\left\{2\,\mathfrak{c}_F(S,\chi)\,\mathfrak{c}_F(S) + w(\chi)\,\mathfrak{c}'_F(S,\chi)\,c_F^S\right\}\chi_S(\alpha)
$$

が成り立つ．ただし

$$
w(\chi) = \begin{cases} 3 & \chi = \mathbf{1}_F \text{ のとき}, \\ 1 & \chi \neq \mathbf{1}_F \text{ のとき}, \end{cases} \qquad \mathfrak{c}'_F(S,\chi) = \frac{1}{2}\lim_{s\to+1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}(s-1)\,L^S(s,\chi)
$$

と定め，上の和で $\chi=\prod_{v\in\Sigma}\chi_v$ は任意の $v\notin S$ について χ_v が不分岐であるような $\mathbb{A}^1/F^\times$ 上のすべての 2 次指標を走る．

定理 3.1 と定理 3.2 を比較し，[As] における局所ユニポテント軌道積分に関する安定化の研究を見れば，係数の記述における各項と内視群の関係を結び付けることができる (cf. [HW, p.10])．

4. 証明の一部

定理 3.1 と 3.2 の証明におけるキーポイントとして，(1) ユニポテント元に関する重み因子の明示的計算, (2) ユニポテント元の各クラスの寄与の収束性の証明, (3) [Si, Sh, Yu] の新谷ゼータ関数の解析接続, (4) [LL] によるユニポテント軌道積分の安定化, (5) [Sa1, Sa2] の概均質ゼータ関数の明示的公式, (6) Siegel, Weil, Ono のアデール上の平均値の公式 (cf. [Ono])，の六つが挙げられる．すべてを説明すると長くなるので，一番面白いと思われる (5)[Sa1, Sa2] に関する Sp(2) の準正則なユニポテント元の寄与と新谷ゼータ関数の関係についてのみ説明したい．証明過程において跡公式に新谷ゼータ関数を接続すると，跡公式の安定化と新谷ゼータ関数の性質の両立が見えてくる．その結果，係数の性

質を明らかにするためには跡公式の安定化の観点を持つことが大切であることが分かる．具体的には2次指標付きの新谷ゼータ関数と Sp(2) の内視群が結び付く．[Sa2] の明示的公式によって概均質ゼータ関数と内視群が一般的に関係付けれることが今後は期待される．

これより $G=\mathrm{Sp}(2)$ の準正則なユニポテント元の寄与について考えよう．跡公式のテスト関数 $f\in C_c^\infty(G(F_S)^1)$ に対して，

$$\Phi(X)=\int_{\mathbf{K}} f\phi^S(k^{-1}n_{\mathrm{sub}}(X)k)\,\mathrm{d}k \quad (X\in V(\mathbb{A}))$$

とおく．そして $\mathrm{d}m$ を $M_1(\mathbb{A})\cong \mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ 上のハール測度とする．2元2次形式の空間に関するゼータ積分が

$$Z^{\mathrm{Sp}(2)}(\Phi,s)=\int_{\mathrm{GL}(2,F)\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})}|\det(m)^2|^s \sum_{X\in V^0(F),\,-\det(X)\notin(F^\times)^2}\Phi({}^tmXm)\,\mathrm{d}m$$

と定められる．さらに，$-\det(X)\in(F^\times)^2$ となる元 $n_{\mathrm{sub}}(X)$ の寄与はゼータ積分

$$\mathfrak{T}(\Phi,s)=\int_{\mathbb{A}^\times}\int_{\mathbb{A}}\Phi(\begin{pmatrix} n & a\\ a & 0\end{pmatrix})\,|a|^{2s-1}\,\log\|(n/2,a)\|\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}^\times a$$

と関係している．記号 $\|(,)\|_v$ は通常の $F_v\oplus F_v$ 上のノルムで，$\|(,)\|=\prod_{v\in\Sigma}\|(,)\|_v$ と置く (cf. [HW, p.12])．このとき，準正則なユニポテント元の寄与は

$$\lim_{s\to 3/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-\frac{3}{2})Z^{\mathrm{Sp}(2)}(\Phi,s)+\mathfrak{T}(\Phi,\frac{3}{2})$$

と一致する．そして，適当な測度の正規化と重み因子の明示的計算によって，等式

$$\mathfrak{T}(\Phi,\frac{3}{2})=\frac{\mathrm{vol}_{M_2}}{2}J_{M_2}(1,f)+\frac{\mathrm{vol}_{M_1}}{2c_F}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\zeta_F^S(s)|_{s=3}}{\zeta_F^S(3)}J_G(\nu_{\mathrm{sub}}(\mathfrak{x}_1),f)$$

を導くことができる．よって問題は $Z^{\mathrm{Sp}(2)}(\Phi,s)$ の項である．

新たな2次指標付きのゼータ積分 $Z(\Phi,s,\chi)$ を

$$Z(\Phi,s,\chi)=\int_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times}\int_{\mathrm{PGL}(2,F)\backslash\mathrm{PGL}(2,\mathbb{A})}|a^2|^s\,\chi(\frac{a}{\det(m)}) \sum_{X\in V^0(F),\,-\det(X)\notin(F^\times)^2}\Phi(\frac{a}{\det(m)}\,{}^tmXm)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}^\times a$$

と定義する．[LL] におけるユニポテント項の安定化の手法により

$$Z^{\mathrm{Sp}(2)}(\Phi,s)=\sum_{\chi}Z(\Phi,s,\chi)$$

が成り立つ．ただし，上の和の χ は $\mathbb{A}^1/F^\times$ 上のすべての 2 次指標を走る．さらに [Sa1, Sa2] の結果より，

$$Z(\Phi,s,\mathbf{1}_F)=\frac{\mathrm{vol}_{M_1}2^{|S|}}{2c_F^S}\sum_{\alpha\in F_S^\times/(F_S^\times)^2}Z_S(\Phi_S,s,\mathbf{1};\alpha)\,\xi^S(s,\alpha),$$

もし $d\notin(F^\times)^2$ かつ $\chi_{d,v}$ が不分岐 ($\forall v\notin S$) なら

$$Z(\Phi,s,\chi_d)=\frac{\mathrm{vol}_{M_1}2^{|S|}}{2c_F^S\zeta_F^S(2)}Z_S(\Phi_S,s,\chi_{d,S};d)\,L^S(1,\chi_d)\,\zeta_F^S(2s-1),$$

もし $d\notin(F^\times)^2$ かつ $\chi_{d,v}$ は分岐 ($\exists v\notin S$) なら

$$Z(\Phi,s,\chi_d)=0$$

が成り立つ．ただし，$Z_S(\Phi_S,s,\chi_S;\alpha)$ は局所ゼータ関数のことで，詳細は [HW, Section 4.4] を参照されたい．定理 3.2 の $a^{\mathrm{Sp}(2)}(S,n_{\mathrm{sub}}(X))$ の等式における値 $L^S(1,\chi_d)$ は $Z(\Phi,3/2,\chi_d)$ に由来する．$L^S(1,\chi_d)$ の項は $\mathrm{Sp}(2)$ の楕円内視群 $\mathrm{SO}(2,\chi_d)\times\mathrm{SL}(2)$ の中心元の寄与に対応していると考えられる．特に特殊値だけでなくゼータ関数として内視群との対応が記述出来ている点が興味深い．上の公式をすべて合わせると，

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to3/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s-\frac{3}{2})Z^{\mathrm{Sp}(2)}(\Phi,s)\\
&=\frac{\mathrm{vol}_{M_1}}{2}J_{M_1}(1,f)\\
&\quad+\frac{\mathrm{vol}_{M_1}}{2c_F}\sum_{\alpha\in F_S^\times/(F_S^\times)^2}\mathfrak{C}_F(S,\alpha)\sum_{X\in Q(F,S,\alpha)}J_G(n_{\mathrm{sub}}(X),f)\\
&\quad+\frac{\mathrm{vol}_{M_1}}{2c_F}\sum_{\check{d}\in\mathfrak{Q}^{\mathrm{ur}}(F,S)}L^S(1,\chi_d)\sum_{X\in Q(F,S,d)}\Big(\prod_{v\in S}\varepsilon_v(X)\Big)J_G(n_{\mathrm{sub}}(X),f)\\
&=\frac{\mathrm{vol}_{M_1}}{2}J_{M_1}(1,f)\\
&\quad+\frac{\mathrm{vol}_{M_1}}{2c_F}\sum_{X\in V^0(F)/\sim'_S}J_G(n_{\mathrm{sub}}(X),f)\\
&\quad\times\Big\{\mathfrak{C}_F(S,-\det(X))+\Big(\prod_{v\in S}\varepsilon_v(X)\Big)\sum_{\check{d}\in\mathfrak{Q}^{\mathrm{ur}}(F,S,-\det(X))}L^S(1,\chi_d)\Big\}
\end{aligned}$$

を得る．ただし，$\mathfrak{Q}^{\mathrm{ur}}(F,S)=\{\check{d}\in\mathfrak{Q}(F)\mid \chi_{d,v}$ は不分岐 $(\forall v\notin S)\}$ とし，そして $Q(F,S,\alpha)=\{x\in V^0(F_S)\mid -\det(x)\in\alpha(F_S^{\times})^2\}/\sim'_S$ とする．この等式より定理 3.2 の準正則なユニポテント元の軌道積分の係数の公式が従う．

References

[Ar1] J. Arthur, The trace formula in invariant form, Ann. of Math. (2) **114** (1981), 1–74.

[Ar2] J. Arthur, A measure on the unipotent variety, Canad. J. Math. **37** (1985), 1237–1274.

[Ar3] J. Arthur, On a family of distributions obtained from orbits, Canad. J. Math. **38** (1986), 179–214.

[Ar4] J. Arthur, The local behaviour of weighted orbital integrals, Duke Math. J. **56** (1988), 223–293.

[Ar5] J. Arthur, An introduction to the trace formula, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, 1–263, Clay Math. Proc., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[As] M. Assem, Unipotent orbital integrals of spherical functions on p-adic 4×4 symplectic groups, J. Reine Angew. Math. **437** (1993), 181–216.

[Da] B. Datskovsky, A mean-value theorem for class numbers of quadratic extensions, in: A tribute to Emil Grosswald: number theory and related analysis, 179–242, Contemp. Math. **143**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[FL] T. Finis, E. Lapid, On the Arthur-Selberg trace formula for GL(2), Groups Geom. Dyn. **5** (2011), 367–391.

[Fli] Y. Flicker, The trace formula and base change for GL(3), Lecture Notes in Mathematics **927**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[GJ] S. Gelbart, H. Jacquet, Forms of GL(2) from the analytic point of view. Automorphic forms, representations and L-functions, Part 1, pp. 213–251, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[JL] H. Jacquet, R. P. Langlands, Automorphic forms on GL(2), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[Ho] W. Hoffmann, The nonsemisimple term in the trace formula for rank one lattices, J. Reine Angew. Math. **379** (1987), 1–21.

[HW] W. Hoffmann, S. Wakatsuki, On the geometric side of the Arthur trace formula for the symplectic group of rank 2, arXiv:1310.0541, submitted.

[LL] J.-P. Labesse, R. P. Langlands, L-indistinguishability for SL(2), Canad. J. Math. **31** (1979), 726–785.

[Ma] J. Matz, Arthur's trace formula for GL(2) and GL(3) and non-compactly supported test functions, Dissertation, Universität Bonn.

[Ono] T. Ono, A mean value theorem in adele geometry, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 275–288.

[Sa1] H. Saito, Explicit formula of orbital p-adic zeta functions associated to symmetric and Hermitian matrices, Comment. Math. Univ. St. Paul. **46** (1997), 175–216.

[Sa2] H. Saito, Explicit form of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces, Math. Ann. **315** (1999), 587–615.

[Sh] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **22** (1975), 25–65.

[Si] C. L. Siegel, Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen, (German), Math. Z. **43** (1938), 682–708.

[Yu] A. Yukie, On the Shintani zeta function for the space of binary quadratic forms, Math. Ann. **292** (1992), 355–374.

〒 920-1192 石川県金沢市角間町 金沢大学理工研究域数物科学系
E-mail address: `wakatsuk@staff.kanazawa-u.ac.jp`