Cyclotomic q-Schur 代数の表現論

和田 堅太郎 (信州大学)

概要: Ariki-Koike 代数 (複素鏡映群 $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ に付随する cyclotomic Hecke 環) に付随する cyclotomic q-Schur 代数 $\mathscr{S}_{n,r}$ は, 対称群の Hecke 環に付随する q-Schur 代数の拡張として，[DJM] において導入された。それは，([R] の意味での) Ariki-Koike 代数の quasi-hereditary cover として位置づけられる。[DJM] では，組み合わせ論を用いた $\mathscr{S}_{n,r}$ の cellular 基底が構成されており，それを用いた重要な結果がいろいろ知られているが，その辺りのことについては，Mathas による良いサーベイ [M] が既にあるので，そちらを見て頂くことにして，この報告集では，講演者の得た，$\mathscr{S}_{n,r}$ の生成元と基本関係式を用いた表示と，その表示によって得られるいくつかの結果について，概説したいと思います。

§ 1. Ariki-Koike 代数と cyclotomic q-Schur 代数

R を可換環とし，パラメータとして, 可逆元 $q \in R$ と $s_1, \dots, s_r \in \mathbb{Z}$ を取る。このとき，$G(r,1,n)$ 型の複素鏡映群 $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ に付随する **Ariki-Koike 代数** ${}_R\mathscr{H}_{n,r}$ は，以下の生成元と基本関係式で定義される R 上の結合代数である;

生成元: $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$.
基本関係式:

$$(T_0 - q^{2s_1})(T_0 - q^{2s_2}) \dots (T_0 - q^{2s_r}) = 0, \quad (T_i - q)(T_i + q^{-1}) = 0 \quad (1 \le i \le n-1),$$
$$T_0T_1T_0T_1 = T_1T_0T_1T_0, \quad T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1} \quad (1 \le i \le n-2),$$
$$T_iT_j = T_jT_i \quad (|i-j| \ge 2).$$

以下，必要がない限り添え字の R は省略する。実際には，上の基本関係式において, 各 k に対し，q^{2s_k} を R の勝手な元 Q_k に置き換えたものも定義されるが, 表現論を考える上では，$Q_k = q^{2s_k}$ の場合のみを考えればよいことが知られている ([DM]) ので，今回はその場合を定義とした。ちなみに，R が 1 の原始 r 乗根 ζ を含むとし, $q = 1$, q^{2s_k} の代わりに ζ^k $(1 \le k \le r)$ とすると，$\mathscr{H}_{n,r}$ は $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ の R 上の群環と同型になる。さらに，任意の環 R とパラメータに対し，$\mathscr{H}_{n,r}$ は R 上自由であり，その rank が $r^n n!$ ($\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ の位数) であることが知られている ([AK])。特に $r=1$ のときは A_{n-1} 型, $r=2$ のときは B_n 型の Iwahori-Hecke 環となる。

$\mathfrak{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{Z}^r_{>0}$ に対し,

$$\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}) = \left\{ \mu = (\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(r)}) \,\middle|\, \begin{array}{c} \mu^{(k)} = (\mu^{(k)}_1, \ldots, \mu^{(k)}_{m_k}) \in \mathbb{Z}^{m_k}_{\geq 0} \\ \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{m_k} \mu^{(k)}_i = n \end{array} \right\}$$

とし，Ariki-Koike 代数 $\mathscr{H}_{n,r}$ に付随する **cyclotomic q-Schur 代数** $\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))$ を,

$$\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n.r}(\mathbf{m})) = \mathrm{End}_{\mathscr{H}^{op}_{n,r}} \Big(\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} m_\mu \cdot \mathscr{H}_{n,r} \Big)$$

によって定義する。ここで m_μ は $\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ によって定まる $\mathscr{H}_{n,r}$ の元である (定義は [DJM] 等を参照)。以下，必要がなければ単に $\mathscr{S}_{n,r}$ と表す。また，考えている環 R を明示する必要があるときは ${}_R\mathscr{S}_{n,r}$ のように書く。$\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))$ が良い性質を持つために，$\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ に対し，以下の条件を課すことが多い;

$$(*) \qquad m_k \geq n \text{ for all } r = 1, \ldots, r.$$

このとき，以下のことが知られている。

Theorem 1.1 ([DJM]). R が体であり，条件 $(*)$ を満たしているとき，以下のことが成り立つ。

(i) $\mathscr{S}_{n,r}$ は *quasi-hereditary cellular* 代数である。

(ii) $\mathscr{S}_{n,r} \cong \mathrm{End}_{\mathscr{H}^{op}_{n,r}} \Big(\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} m_\mu \cdot \mathscr{H}_{n,r} \Big), \quad \mathscr{H}_{n,r} \cong \mathrm{End}_{\mathscr{S}_{n,r}} \Big(\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} m_\mu \cdot \mathscr{H}_{n,r} \Big).$
つまり，$\mathscr{H}_{n,r}$ と $\mathscr{S}_{n,r}$ は $(\mathscr{S}_{n,r}, \mathscr{H}_{n,r})$-両側加群 $\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} m_\mu \cdot \mathscr{H}_{n,r}$ に関して *double centralizer property* を満たす。

$(\mathscr{S}_{n,r}, \mathscr{H}_{n,r})$-両側加群 $\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} m_\mu \cdot \mathscr{H}_{n,r}$ を用いて関手

$$\Omega_n = \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}_{n,r}}\big(\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} m_\mu \cdot \mathscr{H}_{n,r} \,, \,?\big) : \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod} \to \mathscr{H}_{n,r}\text{-mod}$$

を考えると (これは Schur 関手と呼ばれる完全関手 ([M, §5.1] 参照))，上の定理の double centralizer property は, Ω_n が射影加群上 fully faithful であることと同値である。つまり，$\mathscr{S}_{n,r}$ (resp. $\mathscr{S}_{n,r}$-mod) は，$\mathscr{H}_{n,r}$ (resp. $\mathscr{H}_{n,r}$-mod) の ([R] の意味での) quasi-hereditary cover (highest weight cover) であることが分かる。

§ 2. q-Schur 代数 ($r = 1$ の場合) の生成元と関係式を用いた表示

$r = 1$ (A 型) のとき，$\mathscr{S}_{n,1}$ は Dipper-James によって導入された q-Schur 代数であり，それは，一般線型 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_m$ に付随する量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の商代数であることが知られている。まず，そのことを簡単に復習しよう。

$P=\bigoplus_{i=1}^{m}\mathbb{Z}\varepsilon_i$ を $\mathfrak{gl}_m$ の weight lattice とし，$P^\vee=\bigoplus_{i=1}^{m}\mathbb{Z}h_i$ をその dual weight lattice とする。また，$\langle\,,\,\rangle : P\times P^\vee\to\mathbb{Z}$ を natural pairing (i.e. $\langle\varepsilon_i,h_j\rangle=\delta_{ij}$) とする。$\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}$ とおけば, $\Pi=\{\alpha_i\,|\,1\le i\le m-1\}$ が simple root の集合となる。P 上の半順序集合 (支配的順序) を，$\lambda,\mu\in P$ に対し，$\lambda\ge\mu\Leftrightarrow\lambda-\mu\in\bigoplus_{i=1}^{m}\mathbb{Z}_{\ge 0}\alpha_i$ によって定める。

$\mathcal{A}=\mathbb{Z}[\hat{q},\hat{q}^{-1}]$ を $\hat{q}$ を不定元とする $\mathbb{Z}$ 上のローラン多項式環とし，$\mathcal{K}=\mathbb{Q}(\hat{q})$ をその商体とする。量子群 $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ は以下の生成元と基本関係式によって定義される $\mathcal{K}$ 上の結合代数である。

生成元: e_i, f_i $(1\le i\le m-1)$, $K_i^{\pm}$ $(1\le i\le m)$.
基本関係式:

(Q1) $\quad K_i^+K_j^+=K_j^+K_i^+,\quad K_i^+K_i^-=K_i^-K_i^+=1,$

(Q2) $\quad K_i^+e_jK_i^-=\hat{q}^{\langle\alpha_j,h_i\rangle}e_j,\quad K_i^+f_jK_i^-=\hat{q}^{-\langle\alpha_j,h_i\rangle}f_j$

(Q3) $\quad [e_i,f_j]=\delta_{ij}\dfrac{K_i^+K_{i+1}^- - K_i^-K_{i+1}^+}{\hat{q}-\hat{q}^{-1}}$

(Q4)
$$\begin{aligned}&e_{i\pm1}e_i^2-(\hat{q}+\hat{q}^{-1})e_ie_{i+1}e_i+e_i^2e_{i+1}=0,\quad e_ie_j=e_je_i\quad(|i-j|\ge 2),\\ &f_{i\pm1}f_i^2-(\hat{q}+\hat{q}^{-1})f_if_{i+1}f_i+f_i^2f_{i+1}=0,\quad f_if_j=f_jf_i\quad(|i-j|\ge 2).\end{aligned}$$

V を $\{v_1,\dots,v_m\}$ を基底とする $\mathcal{K}$ 上の線形空間とすると，$U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ は V 上に

$$K_i^{\pm}\cdot v_j=\begin{cases}\hat{q}^{\pm1}v_j & \text{if } j=i,\\ v_j & \text{otherwise},\end{cases}$$
$$e_i\cdot v_j=\begin{cases}v_{j-1} & \text{if } j=i+1,\\ 0 & \text{otherwise},\end{cases}\qquad f_i\cdot v_j=\begin{cases}v_{j+1} & \text{if } j=i,\\ 0 & \text{otherwise},\end{cases}$$

によって作用する。この $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$-加群 V を $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ の自然表現という。さらに，$U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ の余積 $\Delta : U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\to U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\otimes U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ を通じて，$V^{\otimes n}$ は $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ 加群となる。この作用を $\rho : U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)\to\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ で表す。

一方で，$\widetilde{T}\in\mathrm{End}(V\otimes V)^{op}$ を，

$$(v_i\otimes v_j)\cdot\widetilde{T}=\begin{cases}\hat{q}v_i\otimes v_j & \text{if } i=j,\\ v_j\otimes v_i & \text{if } i<j,\\ v_j\otimes v_i+(\hat{q}-\hat{q}^{-1})v_i\otimes v_j & \text{if } i>j,\end{cases}$$

によって定める。さらに，$i=1,\dots,n-1$ に対し，$\widetilde{T}_i\in\mathrm{End}(V^{\otimes n})^{\mathrm{op}}$ を，

$$\widetilde{T}_i=\mathrm{id}_V^{\otimes(i-1)}\otimes\widetilde{T}\otimes\mathrm{id}_V^{\otimes(n-1-i)}$$

によって定めると，$\mathscr{H}_{n,1}$ (パラメータは $\hat{q}$) の $V^{\otimes n}$ 上の右作用が $\theta : \mathscr{H}_{n,1} \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})^{op}$ ($\theta(T_i) = \widetilde{T}_i$) によって定まる。

以上の設定で，$U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ と $\mathscr{H}_{n,1}$ の間で $V^{\otimes n}$ に関して double centralize property が成り立つことが, [J] で示されている (一般線型群と対称群の間の Schur-Weyl duality の $\hat{q}$-類似)。つまり，$V^{\otimes n}$ 上の $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ の作用と $\mathscr{H}_{n,1}$ の作用は互いに可換で,

$$\rho(U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)) = \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,1}^{\mathrm{op}}}(V^{\otimes n}), \quad \theta(\mathscr{H}_{n,1}) = \mathrm{End}_{U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)}(V^{\otimes n})^{op},$$

となる。単射 $\Lambda_{n,1}(m) \ni \mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \mapsto \sum_{j=1}^m \mu_j \varepsilon_j \in P$ によって，$\Lambda_{n,1}(m) \subset P$ と思うと，$U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$-加群としての $V^{\otimes n}$ のウェイト空間分解は,

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,1}(m)} V_\mu^{\otimes n}, \quad V_\mu^{\otimes n} = \{ v \in V^{\otimes n} \mid K_i^+ \cdot v = \hat{q}^{\langle \mu, h_i \rangle} v \text{ for } i = 1, \dots, m \}$$

となることが分かる。$V^{\otimes n}$ 上の $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ の作用と $\mathscr{H}_{n,1}$ の作用とは可換なので，各ウェイト空間 $V_\mu^{\otimes n}$ は $\mathscr{H}_{n,1}$-部分加群であり，さらに $\mathscr{H}_{n,1}$-加群として $V_\mu^{\otimes n} \cong m_\mu \cdot \mathscr{H}_{n,1}$ となる。以上のことより,

$$\rho(U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)) = \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,1}^{op}}(V^{\otimes n}) = \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,1}^{op}}\Big(\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,1}(m)} V_\mu^{\otimes n} \Big) \cong \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,1}^{op}}\Big(\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,1}(m)} m_\mu \cdot \mathscr{H}_{n,1} \Big)$$

となり，${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,1}$ ($\mathcal{K}$ 上の $\hat{q}$ をパラメータとする q-Schur 代数) は ρ の像と同型であることが分かる。

上記の事は，勝手な可換環 R とパラメータ $q \in R$ に対しても成り立つことが知られている ([Du])。ちゃんと書くと，$k \in \mathbb{Z}$ に対し，$[k] = (\hat{q}^k - \hat{q}^{-k})/(\hat{q} - \hat{q}^{-1})$ とし，自然数 k に対し，$[k]! = [k][k-1]\dots[1]$ とする ($[0]! = 1$ とする)。${}_{\mathcal{A}}U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ を $e_i^{(k)} := e_i^k/[k]!$, $f_i^{(k)} := f_i^k/[k]!$ $(1 \le i \le m-1,\ k \ge 1)$, $K_j^{\pm}$, $\begin{bmatrix} K_j; 0 \\ t \end{bmatrix} := \prod_{s=1}^{t} \dfrac{K_j^+ \hat{q}^{-s+1} - K_j^- \hat{q}^{s-1}}{\hat{q}^s - \hat{q}^{-s}}$ $(1 \le j \le m,\ t \ge 1)$ によって生成される $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ の $\mathcal{A}$-部分代数とし，$U_q(\mathfrak{gl}_m) := R \otimes_{\mathcal{A}} {}_{\mathcal{A}}U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ (環準同型 $\mathcal{A} \to R$ s.t. $\hat{q} \mapsto q$ によって R を $\mathcal{A}$-加群と思う) とすれば，上の ρ より誘導される全射 $\rho : U_q(\mathfrak{gl}_m) \to {}_R\mathscr{S}_{n,1}$ が得られる。Doty-Giaquinto は $\mathrm{Ker}\,\rho$ を求めることにより，以下のような，q-Schur 代数の生成元と関係式による表示を与えた。

Theorem 2.1 ([DG]).

(i) ${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,1}(\Lambda_{n,1}(m))$ は，生成元 e_i, f_i $(1 \le i \le m-1)$, $K_j^{\pm}$ $(1 \le j \le m)$ と基本関係式 (Q1) - (Q4) と

(S) $$K_1^+ K_2^+ \dots K_m^+ = q^n, \quad \prod_{k=0}^{n} (K_j^+ - q^k) = 0 \quad (1 \le j \le m),$$

によって定まる $\mathcal{K}$ 上の結合代数に同型である。

(ii) ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,1}$ は，$e_i^{(k)}, f_i^{(k)}, K_j^{\pm}, \begin{bmatrix} K_j;0 \\ t \end{bmatrix}$ *$(1 \le i \le m-1, 1 \le j \le m, 1 \le k, t)$* によって生成される ${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,1}$ の $\mathcal{A}$-部分代数である。さらに，${}_{R}\mathscr{S}_{n,1} \cong R \otimes_{\mathcal{A}} {}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,1}$ である。

§ 3. Cyclotomic q-Schur 代数の生成元と関係式を用いた表示

さて， cyclotomic q-Schur 代数 $\mathscr{S}_{n,r}$ を，生成元と基本関係式を用いて表すことを考えたいのだが，$\mathscr{S}_{n,r}$ $(r \ge 2)$ は $r=1$ のときのように, 良く知られている代数の商代数になることが知られているわけではない。しかし，以下のことが知られていた。

Proposition 3.1 ([DR]). $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$ が条件 $(*)$ を満たすとする。$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$ とおき，$\mathscr{S}_{n,r} = \mathscr{S}_{n,r}(\varLambda_{n,r}(\mathbf{m}))$, $\mathscr{S}_{n,1} = \mathscr{S}_{n,1}(\varLambda_{n,1}(m))$ を考える。すると，$\mathscr{S}_{n,r}$ *(resp.* $\mathscr{S}_{n,1}$*)* のある部分代数 *(*ボレル部分代数*)* $\mathscr{S}_{n,r}^{\le 0}$, $\mathscr{S}_{n,r}^{\ge 0}$ *(resp.* $\mathscr{S}_{n,1}^{\le 0}$, $\mathscr{S}_{n,1}^{\ge 0}$ *)* が存在して，

$$\mathscr{S}_{n,r} = \mathscr{S}_{n,r}^{\le 0} \cdot \mathscr{S}_{n,r}^{\ge 0} \quad (\textit{resp. } \mathscr{S}_{n,1} = \mathscr{S}_{n,1}^{\le 0} \cdot \mathscr{S}_{n,1}^{\ge 0})$$

と表せる。さらに，代数としての同型写像

$$\mathcal{F}^{\le 0} : \mathscr{S}_{n,1}^{\le 0} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_{n,r}^{\le 0}, \quad \mathcal{F}^{\ge 0} : \mathscr{S}_{n,1}^{\ge 0} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_{n,r}^{\ge 0},$$

が存在する。

つまり，ボレル部分代数に制限してしまえば，$r \ge 2$ の場合でも，A 型 $(r=1$ の場合$)$ と同じであり，A 型との違いは，上と下のボレル部分代数 $(\mathscr{S}_{n,r}^{\le 0}$ と $\mathscr{S}_{n,r}^{\ge 0})$ の間の交換関係の違いのみであることが分かる。さらに，A 型の場合のボレル部分代数 $\mathscr{S}_{n,1}^{\le 0}$ と $\mathscr{S}_{n,1}^{\ge 0}$ は，それぞれ, 量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ のボレル部分代数 $U_q^{\le 0}$ $(f_i^{(k)}$, $K_j^{\pm}$, $\begin{bmatrix} K_j;0 \\ t \end{bmatrix}$ 達で生成される部分代数$)$ と $U_q^{\ge 0}$ $(e_i^{(k)}$, $K_j^{\pm}$, $\begin{bmatrix} K_j;0 \\ t \end{bmatrix}$ 達で生成される部分代数$)$ の $\rho : U_q(\mathfrak{gl}_m) \to \mathrm{End}_{\mathscr{H}_{n,1}^{op}}(V^{\otimes n}) \cong \mathscr{S}_{n,1}$ における像と同型であることが分かる。まとめると，

$$\mathscr{S}_{n,r} = \mathscr{S}_{n,r}^{\le 0} \cdot \mathscr{S}_{n,r}^{\ge 0}, \quad U_q^{\le 0} \xrightarrow{\mathcal{F}^{\le 0} \circ \rho} \mathscr{S}_{n,r}^{\le 0} \text{ (全射)}, \quad U_q^{\ge 0} \xrightarrow{\mathcal{F}^{\ge 0} \circ \rho} \mathscr{S}_{n,r}^{\ge 0} \text{ (全射)},$$

となっている。特に，${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ $(R = \mathcal{K}$ でパラメータが $\hat{q})$ は，代数として $\mathcal{F}^{\le 0} \circ \rho(f_i)$, $\mathcal{F}^{\ge 0} \circ \rho(e_i)$ $(1 \le i \le m-1)$, $\mathcal{F}^{\le 0} \circ \rho(K_j^{\pm}) = \mathcal{F}^{\ge 0} \circ \rho(K_j^{\pm})$ $(1 \le j \le m)$ によって生成されることが分かる。そこで，これらの生成元の間の $({}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ における$)$ 関係式を調べることによって，${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ の生成元と基本関係式による表示を得た ([W1])。${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ の基本関係式を書くために，少し準備をしよう。

$\Gamma(\mathbf{m})=\{(i,k)\,|\,1\le i\le m_k,\,1\le k\le r\}$ とし，$\Gamma(\mathbf{m})$ と集合 $\{1,2,\dots,m\}$ とを対応 $(i,k)\leftrightarrow\sum_{l=1}^{k-1}m_l+i$ によって同一視する。また，$\Gamma'(\mathbf{m})=\Gamma(\mathbf{m})\setminus\{(m_r,r)\}$ とおき，同様な対応で集合 $\{1,2,\dots,m-1\}$ と同一視する。便宜上 $(m_k+1,k)=(1,k+1)$, $(0,k+1)=(m_k,k)$ と考える (上の対応より自然である)。上の同一視により，$\mathfrak{gl}_m$ のウェイト格子は，$P=\bigoplus_{i=1}^{m}\mathbb{Z}\varepsilon_i=\bigoplus_{(i,k)\in\Gamma(\mathbf{m})}\mathbb{Z}\varepsilon_{(i,k)}$ と表せ，単射 $\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})\ni\mu\mapsto\sum_{(i,k)\in\Gamma(\mathbf{m})}\mu_i^{(k)}\varepsilon_{(i,k)}\in P$ によって，$\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ は P の部分集合と思えることに注意しよう。また， simple root の集合 Π も $\Pi=\{\alpha_{(i,k)}\,|\,(i,k)\in\Gamma'(\mathbf{m})\}$ と表せ，$\mu\in P$ に対し，P の中で $\mu\pm\alpha_{(i,k)}$ 等が意味を持つことに注意しよう。これらの準備のもと，$\mathscr{S}_{n,r}$ は以下のように表される。

Theorem 3.2 ([W1]). $\mathbf{m}=(m_1,\dots,m_r)$ は条件 $(*)$ を満たすとする。

(i) ${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))$ は，$e_{(i,k)},f_{(i,k)}$ *(*$(i,k)\in\Gamma'(\mathbf{m})$*)*, $K^{\pm}_{(j,l)}$ *(*$(j,l)\in\Gamma(\mathbf{m})$*)* を生成元とし，基本関係式 (Q1), (Q2), (Q4), (S) と

(CS)

$$[e_{(i,k)},f_{(j,l)}]=\delta_{(i,k),(j,l)}\begin{cases}\dfrac{K^{+}_{(i,k)}K^{-}_{(i+1,k)}-K^{-}_{(i,k)}K^{+}_{(i+1,k)}}{\hat{q}-\hat{q}^{-1}} & \text{if } i\ne m_k,\\[2ex] -\hat{q}^{2s_{k+1}}\dfrac{K^{+}_{(m_k,k)}K^{-}_{(1,k+1)}-K^{-}_{(m_k,k)}K^{+}_{(1,k+1)}}{\hat{q}-\hat{q}^{-1}} & \text{if } i=m_k\\ \quad +K^{+}_{(m_k,k)}K^{-}_{(1,k+1)}Y_{(m_k,k)} & \end{cases}$$

によって定まる $\mathcal{K}$ 上の結合代数に同型である。ここで，$Y_{(m_k,k)}$ は，${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ の *Jucys-Murphy elements* を生成元によって表したものによって記述される *(*そのような記述を計算することは可能だが，具体的な表示を与えることは，今のところ出来ていない*)*。

(ii) ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}$ は，$e^{(c)}_{(i,k)},f^{(c)}_{(i,k)},K^{\pm}_{(j,l)},\begin{bmatrix}K_{(j,l)};0\\ t\end{bmatrix}$ *(*$(i,k)\in\Gamma'(\mathbf{m})$, $(j,l)\in\Gamma(\mathbf{m})$, $1\le c,t$*)* によって生成される ${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ の $\mathcal{A}$-部分代数である。さらに，${}_{R}\mathscr{S}_{n,r}\cong R\otimes_{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}$ である。

さて，A 型の q-Schur 代数 $\mathscr{S}_{n,1}(\Lambda_{n,1}(m))$ の場合，量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の自然表現の n 階テンソル積表現 $V^{\otimes n}$ の作用を与える準同型 $\rho:U_q(\mathfrak{gl}_m)\to\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ の像と $\mathscr{S}_{n,1}(\Lambda_{n,1}(m))$ とが同型になっていた。さらに，$U_q(\mathfrak{gl}_m)$-加群 $V^{\otimes n}$ に現れるウェイトは，$\Lambda_{n,1}(m)\subset P$ であった。このことは，${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,1}(\Lambda_{n,1}(m))$ の定義関係式 (S) によって，$K_j^{\pm}$ $(1\le j\le m)$ の取り得る固有値が制限されていることに対応する。さらに，$\mu\in\Lambda_{n,1}(m)$ に対し，$\mathscr{H}_{n,1}$-加群として，$V_\mu^{\otimes n}\cong m_\mu\cdot\mathscr{H}_{n,1}$ であった。

$(r\ge 2$ の$)$ cyclotomic q-Schur 代数 $\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))$ に対しても，${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))$ の定義関係式の中に (S) が含まれているので，$K^{\pm}_{(j,l)}$ $((j,l)\in\Gamma(\mathbf{m}))$ の取り得る固有値 (それらの同時固有値をやはりウェイトと呼ぼう) は，A 型の場合と同様で，$\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))$-加群の取り得るウェイトは， $\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ と一致する (同一視 $P=$

$\bigoplus_{i=1}^{m}\mathbb{Z}\varepsilon_i=\bigoplus_{(i,k)\in\Gamma(\mathbf{m})}\mathbb{Z}\varepsilon_{(i,k)}$ のもとで，$\Lambda_{n,1}(m)=\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ であることに注意しよう)。このとき，$\mu\in\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し，やはり $m_\mu\cdot\mathscr{H}_{n,r}$ は μ-ウェイト空間となっている。

A 型の q-Schur 代数の場合は，${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,1}(\Lambda_{n,1}(m))$ のカルタン部分代数 (K_j ($1\leq j\leq m$) で生成される部分代数) を各ウェイト空間への射影を与えるベキ等元に置き換えた表示 (量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ の Lusztig's modified form に対応するもの) も与えられている ([DG])。cyclotomic q-Schur 代数の場合もやはりそのような表示が得られ，以下のようになる。

Theorem 3.3 ([W1])**.** $\mathbf{m}=(m_1,\dots,m_r)$ は条件 $(*)$ を満たすとする。

(i) ${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))$ は $E_{(i,k)}$, $F_{(i,k)}$ *(*$(i,k)\in\Gamma'(\mathbf{m})$*)*, 1_λ *(*$\lambda\in\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$*)* を生成元とし，以下の基本関係式 (CS1) - (CS4) によって定まる $\mathcal{K}$ 上の結合代数に同型である。

(CS1) $$1_\lambda 1_\mu=\delta_{\lambda,\mu}1_\lambda,\qquad \sum_{\lambda\in\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})}1_\lambda=1,$$

(CS2) $$E_{(i,k)}1_\lambda=\begin{cases}1_{\lambda+\alpha_{(i,k)}}E_{(i,k)} & \textit{if } \lambda+\alpha_{(i,k)}\in\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}),\\ 0 & \textit{otherwise,}\end{cases}$$
$$F_{(i,k)}1_\lambda=\begin{cases}1_{\lambda-\alpha_{(i,k)}}F_{(i,k)} & \textit{if } \lambda-\alpha_{(i,k)}\in\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}),\\ 0 & \textit{otherwise,}\end{cases}$$
$$1_\lambda E_{(i,k)}=\begin{cases}E_{(i,k)}1_{\lambda-\alpha_{(i,k)}} & \textit{if } \lambda-\alpha_{(i,k)}\in\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}),\\ 0 & \textit{otherwise,}\end{cases}$$
$$1_\lambda F_{(i,k)}=\begin{cases}F_{(i,k)}1_{\lambda+\alpha_{(i,k)}} & \textit{if } \lambda+\alpha_{(i,k)}\in\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}),\\ 0 & \textit{otherwise,}\end{cases}$$

(CS3) $$E_{(i,k)}F_{(j,l)}-F_{(j,l)}E_{(i,k)}$$
$$=\delta_{(i,k),(j,l)}\begin{cases}\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})}[\lambda_i^{(k)}-\lambda_{i+1}^{(k)}]1_\lambda & \textit{if } i\neq m_k\\ \displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})}\Big(-\hat{q}^{2s_{k+1}}[\lambda_{m_k}^{(k)}-\lambda_1^{(k)}]+Y^\lambda_{(m_k,k)}\Big)1_\lambda & \textit{if } i=m_k\end{cases}$$

(CS4) $$E_{(i\pm1,k)}E_{(i,k)}^2-(\hat{q}+\hat{q}^{-1})E_{(i,k)}E_{(i\pm1,k)}E_{(i,k)}+E_{(i,k)}^2E_{(i\pm1,k)}=0,$$
$$E_{(i,k)}E_{(j,l)}=E_{(j,l)}E_{(i,k)}\ (|(i,k)-(j,l)|\geq2),$$
$$F_{(i\pm1,k)}F_{(i,k)}^2-(\hat{q}+\hat{q}^{-1})F_{(i,k)}F_{(i\pm1,k)}F_{(i,k)}+F_{(i,k)}^2F_{(i\pm1,k)}=0,$$
$$F_{(i,k)}F_{(j,l)}=F_{(j,l)}F_{(i,k)}\ (|(i,k)-(j,l)|\geq2),$$

ここで，$Y^\lambda_{(m_k,k)}$ は，${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ の *Jucys-Murphy elements* を生成元によって表したものによって記述される。

(ii) ${}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}$ は $E^{(b)}_{(i,k)} = E^b_{(i,k)}/[b]!$, $F^{(b)}_{(i,k)} = F^b_{(i,k)}/[b]!$ *(*$(i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m}), b \geq 1$*)*, 1_λ *(*$\lambda \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$*)* によって生成される ${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ の $\mathscr{A}$-部分代数である。さらに，${}_{R}\mathscr{S}_{n,r} \cong R \otimes_{\mathcal{A}} {}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}$ である。

同型 ${}_{R}\mathscr{S}_{n,r} \cong R \otimes_{\mathcal{A}} {}_{\mathcal{A}}\mathscr{S}_{n,r}$ のもとで，${}_{R}\mathscr{S}_{n,r}$ の生成元 $1 \otimes E^{(b)}_{(i,k)}$, $1 \otimes F^{(b)}_{(i,k)}$, $1 \otimes 1_\lambda$ を再び, それぞれ $E^{(b)}_{(i,k)}$, $F^{(b)}_{(i,k)}$, 1_λ で表すことにする。互いに直交するベキ等元 1_μ ($\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$) は，$\mathscr{S}_{n,r} = \mathrm{End}_{\mathscr{H}^{op}_{n,r}}\big(\bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} m_\mu \cdot \mathscr{H}_{n,r}\big)$ の元としては，$m_\mu \cdot \mathscr{H}_{n,r}$ への射影である。${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ の基本関係式より，以下のことが成り立つ。

Corollary 3.4 ([W1])**.** $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ は条件 $(*)$ を満たすとする。

$\mathscr{S}^-_{n,r}$ (resp. $\mathscr{S}^+_{n,r}$) を $F^{(b)}_{(i,k)}$ (resp. $E^{(b)}_{(i,k)}$) ($(i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m}), b \geq 1$) によって生成される $\mathscr{S}_{n,r}$ の部分代数，$\mathscr{S}^0_{n,r}$ を 1_λ ($\lambda \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$) によって生成される $\mathscr{S}_{n,r}$ の部分代数とすると，以下のような (弱い意味での) 三角分解が成り立つ;

$$\mathscr{S}_{n,r} = \mathscr{S}^-_{n,r} \cdot \mathscr{S}^0_{n,r} \cdot \mathscr{S}^+_{n,r}. \tag{3.4.1}$$

§ 4. Weyl 加群とその指標

この章では，$\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ は条件 $(*)$ を満たすと仮定する（この仮定を外しても多くの事は若干の修正のもと成立するが，記述の繁雑さを避けるのと，議論を簡略化するためにこの仮定を置く)。さらに，R は体であるとする。

まず，$\mathscr{S}_{n,r}$ に対し，最高ウェイト加群を定義しよう。これは，量子群 (あるいは Lie 代数) に対するものと同様であるが，$\mathscr{S}_{n,r}$-加群に現れるウェイトは $\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ に制限されていて，$\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し，μ に対応するウェイト空間への射影が $\mathscr{S}_{n,r}$ のベキ等元 1_μ によって与えられることに注意しよう。

$\mathscr{S}_{n,r}$-加群 M が最高ウェイト λ ($\lambda \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$) の最高ウェイト加群であるとは，ある $v_\lambda \in M$ が存在して, 以下の (i), (ii), (iii) を満たすことである;

(i) M は $\mathscr{S}_{n,r}$-加群として v_λ によって生成される。
(ii) $1_\mu \cdot v_\lambda = \delta_{\lambda,\mu} v_\lambda$.
(iii) $E^{(b)}_{(i,k)} \cdot v_\lambda = 0$ ($(i,k) \in \Gamma'(\mathbf{m})$, $b \geq 1$).

この定義，三角分解 (3.4.1),　及び $\mathscr{S}_{n,r}$ の関係式より，M が最高ウェイト λ の最高ウェイト加群であるとき，$1_\mu \cdot M \neq 0$ ならば $\lambda \geq \mu$ (この順序は P における支配的順序) であり，$1_\lambda \cdot M = Rv_\lambda$ であることが分かる。

$\mathscr{S}_{n,r}$ に関しても，量子群の Verma 加群と同様な普遍的である最高ウェイト加群を，以下のように構成することができる。$\mathscr{S}^{\geq 0}_{n,r}$ を $\mathscr{S}^0_{n,r}$ と $\mathscr{S}^+_{n,r}$ によって生成される $\mathscr{S}_{n,r}$ の部分代数とする (これは，[DR] の意味での (上) ボレル部分代数と一致する)。代数としての全射準同型 $\mathscr{S}^{\geq 0}_{n,r} \to \mathscr{S}^0_{n,r}$ が，$E^{(b)}_{(i,k)} \mapsto 0$, $1_\mu \mapsto 1_\mu$ によって与えられ，この全射準同型を通じて，$\mathscr{S}^0_{n,r}$ の既約加群 $R1_\lambda$ を $\mathscr{S}^{\geq 0}_{n,r}$-加群とみなしたも

のを θ_λ とする。このとき，$\mathscr{S}_{n,r}$-加群 $\Delta(\lambda)$ を, θ_λ の誘導表現

$$\Delta(\lambda) = \mathscr{S}_{n,r} \otimes_{\mathscr{S}_{n,r}^{\geq 0}} \theta_\lambda$$

として定義する。定義より，$\Delta(\lambda) \neq 0$ は, 最高ウェイト λ の最高ウェイト加群であり，テンソル積の普遍性より，M が最高ウェイト λ の最高ウェイト加群ならば，M は $\Delta(\lambda)$ の商加群となる。この $\Delta(\lambda)$ を Weyl 加群と呼ぶ。

${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ の基本関係式より導かれる $\mathscr{S}_{n,r}$ の関係式のみで，$\Delta(\lambda) \neq 0$ は唯一つの極大部分加群を持ち，$L(\lambda) := \operatorname{Top}\Delta(\lambda)$ が最高ウェイト λ の既約な最高ウェイト加群となり，$\{L(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}) \text{ s.t. } \Delta(\lambda) \neq 0\}$ が，既約 $\mathscr{S}_{n,r}$-加群の同型類の完全代表系を与えることが分かる ([W1])。さらに，[DJM] で得られている $\mathscr{S}_{n,r}$ の cellular 構造と合わせることによって，より強く以下のことが分かる。

Proposition 4.1 ([DJM]-[W1]).
$\Lambda_{n,r}^{+} = \{\lambda \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}) \mid \lambda_1^{(k)} \geq \lambda_2^{(k)} \geq \cdots \geq \lambda_{m_k}^{(k)}\ (1 \leq k \leq r)\}$ とする *(i.e.* サイズが n である r-分割全体の集合*)*。このとき，以下の事が成り立つ。

(i) $\Delta(\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \in \Lambda_{n,r}^{+}$. さらに，$\Delta(\lambda)$ は，[DJM] で構成された $\mathscr{S}_{n,r}$ の *cellular* 基底から得られる λ に対応する *cell* 加群 *(standard* 加群*)* と同型である。

(ii) $\{L(\lambda) := \operatorname{Top}\Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_{n,r}^{+}\}$ は, 既約 $\mathscr{S}_{n,r}$-加群の同型類の完全代表系を与える。

(iii) $\mathscr{S}_{n,r}$ が半単純である時，$\{\Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_{n,r}^{+}\}$ は, 既約 $\mathscr{S}_{n,r}$-加群の同型類の完全代表系を与える。

(iv) $\Delta(\lambda)$ *(*$\lambda \in \Lambda_{n,r}^{+}$*)* の組成列に現れる $L(\mu)$ *(*$\mu \in \Lambda_{n,r}^{+}$*)* と同型なものの数を $[\Delta(\lambda) : L(\mu)]$ *(*分解定数という*)* と表すと，$[\Delta(\lambda) : L(\mu)] \neq 0$ ならば $\lambda \geq \mu$ であり，$[\Delta(\lambda) : L(\lambda)] = 1$ である。

$K_0(\mathscr{S}_{n,r}\text{-mod})$ を有限次元 $\mathscr{S}_{n,r}$-加群のなす圏 $\mathscr{S}_{n,r}$-mod の Grothendieck 群とし，$M \in \mathscr{S}_{n,r}$-mod に対し，その $K_0(\mathscr{S}_{n,r}\text{-mod})$ での像を $[M]$ と表すことにすると，Proposition 4.1 (iv) より，$\{[\Delta(\lambda)] \mid \lambda \in \Lambda_{n,r}^{+}\}$ が $K_0(\mathscr{S}_{n,r}\text{-mod})$ の $\mathbb{Z}$-自由基底を与えることが分かる (これらは，quasi-hereditary 代数の基本的な性質である)。

次に，$\mathscr{S}_{n,r}$-加群の (１つの) 特徴付けとして，$\mathscr{S}_{n,r}$-加群の指標を導入しよう。(CS1) より, $1_\lambda \in \mathscr{S}_{n,r}$ $(\lambda \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))$ は，$\mathscr{S}_{n,r}$ の単位元の互いに直交するベキ等元への分解 $1 = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} 1_\lambda$ を与えている。この分解に沿って，$\mathscr{S}_{n,r}$-加群 M は，$M = \bigoplus_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} 1_\mu \cdot M$ と分解する。この分解を用いて，$\mathscr{S}_{n,r}$-加群 M の指標 $\operatorname{ch} M \in \bigotimes_{k=1}^{r} \mathbb{Z}[x_{(1,k)}, x_{(2,k)}, \dots, x_{(m_k,k)}]$ を，

$$\operatorname{ch} M = \sum_{\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} \dim_R \big(1_\mu \cdot M\big) x^\mu, \quad \text{where } x^\mu = \otimes_{k=1}^{r} x_{(1,k)}^{\mu_1^{(k)}} x_{(2,k)}^{\mu_2^{(k)}} \cdots x_{(m_k,k)}^{\mu_{m_k}^{(k)}}$$

によって定める。以下，$x^{(k)} = \{x_{(1,k)}, \dots, x_{(m_k,k)}\}$ とし，$\mathbb{Z}[x^{(k)}] = \mathbb{Z}[x_{(1,k)}, \dots, x_{(m_k,k)}]$ と表すことにする。

$\{L(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda^+_{n,r}\}$ が既約 $\mathscr{S}_{n,r}$-加群の完全代表系を与え，さらに，$L(\lambda)$ は最高ウェイト加群であることから, $1_\mu \cdot L(\lambda) \neq 0$ ならば $\lambda \geq \mu$ であり，$\dim_R 1_\lambda \cdot L(\lambda) = 1$ であることに注意すれば，任意の $\mathscr{S}_{n,r}$-加群 M の組成重複度は，その指標 $\mathrm{ch}\, M$ によって一意的に定まることが分かる。よって，well-defined である ($\mathbb{Z}$-加群としての) 単射準同型 $\mathrm{ch} : K_0(\mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}) \to \bigoplus_{k=1}^r \mathbb{Z}[x^{(k)}]$ $([M] \mapsto \mathrm{ch}\, M)$ を得る。特に，$\mathscr{S}_{n,r}$ が半単純であるならば，その加群は，指標によって (同型を除いて) 一意的に定まる。

さて，Weyl 加群は，$\mathscr{S}_{n,r}$ の普遍的な最高ウェイト加群であり，その指標は考えている基礎体やパラメータには依らない。また，Weyl 加群の指標が分かれば，既約加群の指標を求めることと，分解定数を求めることとは同値である。よって，Weyl 加群の指標を求めることは基本的な問題であるが，[DJM] で構成されている $\mathscr{S}_{n,r}$ の cellular 基底を用いれば，Weyl 加群の指標を半標準盤 (よく知られている半標準盤を一般化したもの) を用いて表すことができる。まず，(ここの意味での) 半標準盤を定義しよう。$\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$ に対し，

$$[\lambda] = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 1} \mid 1 \leq a \leq m_c,\ 1 \leq b \leq \mu^{(c)}_a,\ 1 \leq c \leq r\}$$

とおく。$\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}) \in \Lambda^+_{n,r}$ に対し，各 $\lambda^{(k)}$ は分割であり，$[\lambda]$ は各分割 $\lambda^{(k)}$ に対応するヤング図を並べたものと同一視できる。

例えば, $\lambda = ((3,2),(3,1),(1,1))$ のとき，

$$[\lambda] = \left(\ydiagram{3,2}\, , \ydiagram{3,1}\, , \ydiagram{1,1} \right)$$

である。$\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$ と $\mu \in \Lambda_{n,r}(\mathbf{m})$ に対し，枠が λ でウェイトが μ の盤 T とは，写像

$$T : [\lambda] \to \Gamma(\mathbf{m}) \text{ s.t. } \mu^{(k)}_i = \sharp\{x \in [\lambda] \mid T(x) = (i,k)\}$$

のことである。$\Gamma(\mathbf{m})$ と $\{1, \dots, m\}$ の同一視のもとで，$(i,k), (j,l) \in \Gamma(\mathbf{m})$ に対し，自然数の通常の全順序を考える (i.e. $(i,k) \geq (j,l) \Leftrightarrow (\sum_{b=1}^{k-1} m_b + i) \geq (\sum_{b=1}^{l-1} m_b + j)$)。このとき，枠が λ でウェイトが μ の盤 T が半標準盤であるとは，以下の (i), (ii), (iii) を満たすことである;

(i) $T((a,b,c)) = (i,k)$ ならば，$c \leq k$ である,
(ii) $(a, b+1, c) \in [\lambda]$ ならば，$T((a,b,c)) \leq T((a,b+1,c))$ である,
(iii) $(a+1, b, c) \in [\lambda]$ ならば，$T((a,b,c)) < T((a+1,b,c))$ である.

枠が λ でウェイトが μ の盤 T に対し，$x \in [\lambda]$ に対応するヤング図の箱の中に，$T(x)$ の値を書き込んで表す。例えば, $\lambda = ((3,2),(3,1),(1,1))$, $\mu = ((2,1),(2,2),(3,1))$

に対し,

$$T = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline (1,1) & (1,1) & (1,2) \\ \hline (2,1) & (1,3) \\ \cline{1-2} \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline (1,2) & (2,2) & (1,3) \\ \hline (2,2) \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline (1,3) \\ \hline (2,3) \\ \hline \end{array} \right)$$

は枠が λ でウェイトが μ の半標準盤であるが,

$$T = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline (1,1) & (2,1) & (1,2) \\ \hline (1,1) & (1,3) \\ \cline{1-2} \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline (2,2) & (1,2) & (1,3) \\ \hline (2,2) \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline (1,3) \\ \hline (2,3) \\ \hline \end{array} \right)$$

や,

$$T = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline (1,1) & (1,1) & (1,2) \\ \hline (1,2) & (1,3) \\ \cline{1-2} \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline (2,1) & (2,2) & (1,3) \\ \hline (2,2) \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline (1,3) \\ \hline (2,3) \\ \hline \end{array} \right)$$

は，枠が λ でウェイトが μ の盤だが，半標準盤ではない。

枠が λ でウェイトが μ の半標準盤全体の集合を $\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)$ と表すことにすると，[DJM] の cellular 基底より以下のことが分かる。

Proposition 4.2 ([DJM]-[W1]). $\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$ に対し,

$$\operatorname{ch}\Delta(\lambda) = \sum_{\mu\in\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})} \sharp\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)x^{\mu}.$$

A 型 $(r=1)$ のときは，$\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)$ は通常の半標準盤のなす集合であり，$\sharp\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)$ は Kostka 係数と一致し，$\operatorname{ch}\Delta(\lambda)$ は Schur 多項式であることがよく知られている。($r \geq 2$ の場合の) $\mathscr{S}_{n,r}$ の Weyl 加群の指標に対しても，これらの組み合わせ論との関係を調べてみよう。Weyl 加群の指標は，基礎体やパラメータに依らないので，以下，$\mathcal{K}$ 上のもの (パラメータは $\hat{q}$) を考える。$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{m_1}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{gl}_{m_r}$ を $\mathfrak{gl}_m$ の Levi 部分代数とし，$U_{\hat{q}}(\mathfrak{g}) \cong U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m_1})\otimes\cdots\otimes U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m_r})$ を ($\mathcal{K}$ 上の) 対応する量子群とする。$U_{\hat{q}}(\mathfrak{g}) \cong U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m_1})\otimes\cdots\otimes U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m_r})$ の $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m_k})$ の部分に対応する Chevalley 生成元を $e_{(i,k)}, f_{(i,k)}, K^{\pm}_{(j,k)}$ $(1\leq i\leq m_k-1, 1\leq j\leq m_k)$ とすると，$U_{\hat{q}}(\mathfrak{g})$ と ${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ の定義関係式より，代数としての準同型写像 $\Phi_{\mathfrak{g}} : U_{\hat{q}}(\mathfrak{g}) \to {}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ $(e_{(i,k)} \mapsto e_{(i,k)}, f_{(i,k)} \mapsto f_{(i,k)}, K^{\pm}_{(j,k)} \mapsto K^{\pm}_{(j,l)})$ が存在することが分かる。ただし，$\Phi_{\mathfrak{g}}$ は全射ではない ($e_{(m_k,k)}, f_{(m_k,k)}$ は $\Phi_{\mathfrak{g}}$ の像には含まれない)。しかし，カルタン部分代数 ($K^{\pm}_{(j,l)}$ 達で生成される部分代数) は, その固有値を関係式 (S) によって制限されるが, そのまま移されるので，${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$-加群を $\Phi_{\mathfrak{g}}$ によって引き戻して $U_{\hat{q}}(\mathfrak{g})$-加群とみなしても，その指標は保たれる。また，${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$-加群を $\Phi_{\mathfrak{g}}$ によって引き戻したものは，$U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_m)$ の次数 n の多項式表現であり，特に半単純である。そこで，${}_{\mathcal{K}}\mathscr{S}_{n,r}$ の Weyl 加群 $\Delta(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda^+_{n,r})$ を $\Phi_{\mathfrak{g}}$ によって引き戻すと，既約分解

$$\Delta(\lambda) \cong \bigoplus_{\mu\in\Lambda^+_{n,r}} \left(W(\mu^{(1)})\boxtimes\cdots\boxtimes W(\mu^{(r)})\right)^{\oplus\beta_{\lambda\mu}} \tag{4.2.1}$$

を得る。ここで，$W(\mu^{(k)})$ は分割 $\mu^{(k)}$ に対応する $U_{\hat{q}}(\mathfrak{gl}_{m_k})$ の Weyl 加群 (既約最高ウェイト加群) であり，その指標は分割 $\mu^{(k)}$ に対応する Schur 多項式 $S_{\mu^{(k)}}(x^{(k)}) \in \mathbb{Z}[x^{(k)}]^{\mathfrak{S}(x^{(k)})}$ である。よって，既約分解 (4.2.1) を用いることによって，

$$\mathrm{ch}\,\Delta(\lambda) = \sum_{\mu \in \Lambda^+_{n,r}} \beta_{\lambda\mu} \Big(\otimes_{k=1}^{r} S_{\mu^{(k)}}(x^{(k)}) \Big)$$

を得る (Proposition 4.2 と合わせれば，半標準盤の個数 $\sharp\mathcal{T}_0(\lambda,\nu)$ を，Kostka 係数と重複度 $\beta_{\lambda\mu}$ を用いて表せる)。これより，$\mathrm{ch}\,\Delta(\lambda) \in \bigotimes_{k=1}^{r} \mathbb{Z}[x^{(k)}]^{\mathfrak{S}(x^{(k)})}$ となり，単射準同型 $\mathrm{ch} : K_0(\mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}) \to \bigotimes_{k=1}^{r} \mathbb{Z}[x^{(k)}]$ の像が $\bigotimes_{k=1}^{r} \mathbb{Z}[x^{(k)}]^{\mathfrak{S}(x^{(k)})}$ に含まれることが分かる。

上記のことから，既約分解 (4.2.1) における重複度 $\beta_{\lambda\mu}$ を計算することが重要となる。事実として，$U_{\hat{q}}(\mathfrak{g})$ の多項式表現に対しては，その結晶基底が存在することが知られていて，重複度 $\beta_{\lambda\mu}$ は，$\Delta(\lambda)$ の $U_{\hat{q}}(\mathfrak{g})$-加群としての結晶基底を記述できれば計算できる。一方で，[DJM] によって，$\Delta(\lambda)$ の基底は，枠が λ である半標準盤 $\mathcal{T}_0(\lambda) = \cup_{\mu\in\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})}\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)$ で添え字付けられることが知られている。そこで，枠が λ である半標準盤の集合 $\mathcal{T}_0(\lambda)$ 上に $\mathfrak{g}$-結晶構造を与え，それが，$\Delta(\lambda)$ の結晶基底と結晶として同型であることを示すことによって，半標準盤の組み合わせ論を用いて，重複度 $\beta_{\lambda\mu}$ を計算する。$\mathcal{T}_0(\lambda)$ 上の $\mathfrak{g}$-結晶構造は，[KN] で与えられた，半単純 Lie 環に付随する量子群の有限次元既約加群の結晶基底の組み合わせ論的な記述 (admissible reading と呼ばれているもの) の一般化として与えられるが，記述が多少繁雑になるため省略する ([W2], [W4] を参照)。ここでは，その結論として，重複度 $\beta_{\lambda\mu}$ を計算する方法を与えよう。

(Step-1): $T \in \mathcal{T}_0(\lambda,\mu)$ $(\lambda,\mu \in \Lambda^+_{n,r})$ に対し，数列の組

$$\mathbf{a}(T) = (\mathbf{a}^{(1)}(T), \mathbf{a}^{(2)}(T), \dots, \mathbf{a}^{(r)}(T)), \text{ where } \mathbf{a}^{(k)}(T) = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_{|\mu^{(k)}|}^{(k)})$$

を，以下のようにして定める。

- 各 $k = 1,\dots,r$ に対し，半標準盤 T の箱の中に書かれた数字の組の 2 番目の数字が k であるものの 1 番目の数字を，T の中で一番右上にある箱から順に, 上から下へ，右から左へ，という順に並べた数列を $\mathbf{a}^{(k)}(T)$ とする。

例えば,

$$T = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline (1,1) & (1,1) & (1,2) \\ \hline (2,1) & (1,3) & \\ \cline{1-2} \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline (1,2) & (2,2) & (1,3) \\ \hline (2,2) & (3,2) & \\ \cline{1-2} \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline (1,3) \\ \hline (2,3) \\ \hline \end{array} \right)$$

であるとき，まず，２番目の数字が 1 である物を考えると,

$$T=\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline (1,1) & (1,1) & \\ \hline (2,1) & \\ \cline{1-2}\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \cline{1-2}\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}\right)$$ であり，その１番目の数字を右上から順に並べていくと $\mathbf{a}^{(1)}(T)=(1,1,2)$ となる。

同様に,

$$T=\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & (1,2) \\ \hline \ & \ \\ \cline{1-2}\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline (1,2) & (2,2) & \\ \hline (2,2) & (3,2) \\ \cline{1-2}\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}\right)$$ より，$\mathbf{a}^{(2)}(T)=(2,3,1,2,1)$,

$$T=\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \qquad\quad & \ \\ \hline \ & (1,3) \\ \cline{1-2}\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & (1,3) \\ \hline \ & \ \\ \cline{1-2}\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|}\hline (1,3) \\ \hline (2,3) \\ \hline\end{array}\right)$$ より，$\mathbf{a}^{(3)}(T)=(1,2,1,1)$

となる。

(Step-2): $T\in\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)$ に対し，T が $\mathfrak{g}$-singular であるということを, 以下の条件を満たすものとして定義する;

(条件) 数列 $\mathbf{a}^{(k)}(T)=(a_1^{(k)},a_2^{(k)},\dots,a_{|\mu^{(k)}|}^{(k)})$ $(1\le k\le r)$ に対し,

$$\begin{aligned}&\sharp\{j\,|\,a_j^{(k)}=1,\,1\le j\le t\}\ge\sharp\{j\,|\,a_j^{(k)}=2,\,1\le j\le t\}\ge\cdots\\ &\cdots\ge\sharp\{j\,|\,a_j^{(k)}=|\mu^{(k)}|,\,1\le j\le t\}\end{aligned}$$

が任意の $t=1,2,\dots,|\mu^{(k)}|$ に対し成り立つ。

(Step-3): $\lambda,\mu\in\Lambda_{n,r}^+$ に対し,

$$\beta_{\lambda\mu}=\sharp\{T\in\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)\,|\,T:\ \mathfrak{g}\text{-singular}\}$$

が成り立つ ([W2])。

Remark 4.3. この計算法は, Littlewood-Richardson 係数を計算するための, Littlewood-Richardson rule の一般化と思え, $\beta_{\lambda\mu}$ は Littlewood-Richardson 係数の一般化と思える ([W2, Remark 3.9] も参照)。

最後に，Weyl 加群の指標と対称関数との関係を見ておこう。
$\Xi_{\mathbf{m}}=\bigotimes_{k=1}^r\mathbb{Z}[x^{(k)}]^{\mathfrak{S}(x^{(k)})}$ とおき，$\Xi_{\mathbf{m}}^n$ を次数 n の斉次対称多項式からなる $\Xi_{\mathbf{m}}$ の $\mathbb{Z}$-部分加群とする。各 $n\ge 0$ に対し，$\mathbf{m}$ に関する射影極限 $\Xi^n=\varprojlim_{\mathbf{m}}\Xi_{\mathbf{m}}^n$ を取り，$\Xi=\bigoplus_{n\ge0}\Xi^n$ とおけば，Ξ は無限個の変数 $X^{(k)}=\{X_1^{(k)},X_2^{(k)},\dots,\}$ $(k=1,\dots,r)$ を持った，対称関数のなす環 $\bigotimes_{k=1}^r\mathbb{Z}[X^{(k)}]^{\mathfrak{S}(X^{(k)})}$ と一致する。ここで, $\mathbf{m}$ に関する射影極限を取るという操作は，$\mathscr{S}_{n,r}$-mod の中では以下のような関手に対応する。
$\mathbf{m}'=(m_1',\dots,m_r')\in\mathbb{Z}_{>0}^r$ を $m_k'\ge m_k$ $(1\le k\le r)$ を満たすものとする。このとき，自然に $\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})\subset\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}')$ と思うことが出来る。このとき，$1_{\mathbf{m}}=\sum_{\mu\in\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})}1_\mu\in\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}'))$ とすると，代数として $1_{\mathbf{m}}\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}'))1_{\mathbf{m}}\cong\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))$ となる。この同型を通じて，$1_{\mathbf{m}}\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}'))$ を $(\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m})),\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}')))$-両側

加群と思い，関手

$$\Psi_{\mathbf{m}',\mathbf{m}} := 1_{\mathbf{m}}\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}'))\otimes_{\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}'))}? : \mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}'))\text{-mod} \to \mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))\text{-mod}$$

を考えると，これは完全関手であり，Weyl 加群を Weyl 加群へ移す。特に，$\Psi_{\mathbf{m}',\mathbf{m}}$ が完全関手であることから，$\mathbb{Z}$-加群としての準同型

$$[\Psi_{\mathbf{m}',\mathbf{m}}] : K_0(\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}'))\text{-mod}) \to K_0(\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))\text{-mod})$$

を引き起こし， 以下の図式が可換になる;

$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}'))\text{-mod}) \arrow[r, "{[\Psi_{\mathbf{m}',\mathbf{m}}]}"] \arrow[d, "\mathrm{ch}"'] & K_0(\mathscr{S}_{n,r}(\Lambda_{n,r}(\mathbf{m}))\text{-mod}) \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\
\bigotimes_{k=1}^{r} \mathbb{Z}[x_{(1,k)},\dots,x_{(m'_k,k)}]^{\mathfrak{S}_{m'_k}} \arrow[r] & \bigotimes_{k=1}^{r} \mathbb{Z}[x_{(1,k)},\dots,x_{(m_k,k)}]^{\mathfrak{S}_{m_k}} \quad (x_{(j,l)} \mapsto 0 \text{ for } j > m_k)
\end{tikzcd}$$

以上のことから，$\mathrm{ch}(\Delta(\lambda))$ $(\lambda \in \Lambda_{n,r}^{+})$ に対し，射影極限 Ξ^n での像が存在することが分かるので，それを $\widehat{\mathrm{ch}}(\Delta(\lambda))$ と書くことにする。

Remark 4.4. $\mathbf{m}$ が条件 $(*)$ を満たすときは，関手 $\Psi_{\mathbf{m}',\mathbf{m}}$ は圏の同値を与える。

これまでのことをまとめると，以下の定理を得る。

Theorem 4.5 ([W2])**.**
(i) $\{\widehat{\mathrm{ch}}\Delta(\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda_{n,r}^{+},\, n \geq 0\}$ は, $\Xi = \bigotimes_{k=1}^{r} \mathbb{Z}[X^{(k)}]^{\mathfrak{S}(X^{(k)})}$ の $\mathbb{Z}$-自由基底を与える。
(ii) $\lambda \in \Lambda_{n,r}^{+}$ に対し,

$$\widehat{\mathrm{ch}}\Delta(\lambda) = \sum_{\mu \in \Lambda_{n,r}^{+}} \beta_{\lambda\mu}\Big(\otimes_{k=1}^{r} S_{\mu^{(k)}}(X^{(k)})\Big),$$

ここで，$S_{\mu^{(k)}}(X^{(k)}) \in \mathbb{Z}[X^{(k)}]^{\mathfrak{S}(X^{(k)})}$ は，分割 $\mu^{(k)}$ に対応する *Schur* 関数である。

さて，$\{\widehat{\mathrm{ch}}\Delta(\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda_{n,r}^{+},\, n \geq 0\}$ は対称関数環 $\Xi = \bigotimes_{k=1}^{r} \mathbb{Z}[X^{(k)}]^{\mathfrak{S}(X^{(k)})}$ の基底なので，それぞれの積を考えることが出来る。これらの積に関して，組合せ論的な議論により以下のことが分かる。

Proposition 4.6. $\Lambda_{\geq 0,r}^{+} = \cup_{n\geq 0}\Lambda_{n,r}^{+}$ とおくとき，$\lambda, \mu \in \Lambda_{\geq 0,r}^{+}$ に対し，

$$\widehat{\mathrm{ch}}\Delta(\lambda)\widehat{\mathrm{ch}}\Delta(\mu) = \sum_{\nu \in \Lambda_{\geq 0,r}^{+}} \Big(\prod_{k=1}^{r} \mathrm{LR}_{\lambda^{(k)}\mu^{(k)}}^{\nu^{(k)}}\Big)\widehat{\mathrm{ch}}\Delta(\nu),$$

ここで，$\mathrm{LR}_{\lambda^{(k)}\mu^{(k)}}^{\nu^{(k)}}$ は，分割 $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$, $\nu^{(k)}$ に対する *Littlewood-Richardson* 係数である。

Remark 4.7. 上の命題より，$\bigoplus_{n\geq 0}\mathscr{S}_{n,r}$-mod 上に，“良い” テンソル圏の構造が入る可能性が示唆されるが，現段階ではその辺のことはよく分かっていない。

§ 5. 誘導，制限関手と Fock 空間の圏化

この章でも R は体であるとする。

$\mathscr{S}_{n,r}$-mod と $\mathscr{S}_{n+1,r}$-mod の間に誘導，制限関手を定義するために，以下の設定で考える;

$$\mathbf{m}=(m_1,m_2,\dots,m_{r-1},m_r)\in\mathbb{Z}^r_{>0} \text{ such that } m_k\geq n+1 \text{ for all } k=1,\dots,r,$$
$$\mathbf{m}'=(m_1,m_2,\dots,m_{r-1},m_r-1)$$

とし，

$$\mathscr{S}_{n+1,r}=\mathscr{S}_{n+1,r}(\varLambda_{n+1,r}(\mathbf{m})),\quad \mathscr{S}_{n,r}=\mathscr{S}_{n,r}(\varLambda_{n,r}(\mathbf{m}'))$$

とする。上記のように $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}'$ の取り方を制限することは，後で，$\mathscr{S}_{n+1,r}$ と $\mathscr{S}_{n,r}$ との代数としての関係や，それぞれの加群の間の関係を直接調べる際に必要な制限であるが，Remark 4.4 でも注意したように，$\mathbf{m}$ が条件 $(*)$ を満たしていれば，$\mathscr{S}_{n,r}(\varLambda_{n,r}(\mathbf{m}))$-mod は，$\mathbf{m}$ の取り方に依らずに同値となるので，表現論を調べる上では，上記の $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}'$ の取り方に対する制限は本質的ではないことに注意しよう。

上記の設定のもとで，単射 $\gamma:\varLambda_{n,r}(\mathbf{m}')\to\varLambda_{n+1,r}(\mathbf{m})$ を

$$\gamma((\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(r-1)},\lambda^{(r)}))=(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(r-1)},\widehat{\lambda}^{(r)}),\ \text{where } \widehat{\lambda}^{(r)}=(\lambda^{(r)}_1,\lambda^{(r)}_2,\dots,\lambda^{(r)}_{m_r-1},1)$$

によって定めることにより，$\varLambda_{n,r}(\mathbf{m}')$ を $\varLambda_{n+1,r}(\mathbf{m})$ の部分集合と思う。このとき，以下のことが成り立つ。

Proposition 5.1 ([W3])**.** 代数としての単射準同型写像 $\iota:\mathscr{S}_{n,r}\to\mathscr{S}_{n+1,r}$ が，

$$E^{(c)}_{(i,k)}\mapsto E^{(c)}_{(i,k)}\xi,\quad F^{(c)}_{(i,k)}\mapsto F^{(c)}_{(i,k)}\xi\quad ((i,k)\in\varGamma'(\mathbf{m}'),\ c\geq 1),$$
$$1_\lambda\mapsto 1_{\gamma(\lambda)}\quad (\lambda\in\varLambda_{n,r}(\mathbf{m}'))$$

によって定まる。ここで，$\xi=\sum_{\lambda\in\varLambda_{n,r}(\mathbf{m}')}1_{\gamma(\lambda)}\in\mathscr{S}_{n+1,r}$ である。

単射準同型写像 $\iota:\mathscr{S}_{n,r}\to\mathscr{S}_{n+1,r}$ のもとで，$\mathscr{S}_{n,r}$ の単位元は $\xi\in\mathscr{S}_{n+1,r}$ に写されることに注意すれば，$\mathscr{S}_{n+1,r}\xi$ (resp. $\xi\mathscr{S}_{n+1,r}$) は自然に $(\mathscr{S}_{n+1,r},\mathscr{S}_{n,r})$-両側加群 (resp. $(\mathscr{S}_{n,r},\mathscr{S}_{n+1,r})$-両側加群) となる。この両側加群を用いて以下の関手を定義

する;

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_n^{n+1} &:= \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}_{n+1,r}}(\mathscr{S}_{n+1,r}\xi, ?) : \mathscr{S}_{n+1,r}\text{-mod} \to \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod},\\
\mathrm{Ind}_n^{n+1} &:= \mathscr{S}_{n+1,r}\xi \otimes_{\mathscr{S}_{n,r}} ? : \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod} \to \mathscr{S}_{n+1,r}\text{-mod},\\
\mathrm{coInd}_n^{n+1} &:= \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}_{n,r}}(\xi\mathscr{S}_{n+1,r}, ?) : \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod} \to \mathscr{S}_{n+1,r}\text{-mod}.
\end{aligned}
$$

また，$\mathscr{H}_{n,r}$ は自然に $\mathscr{H}_{n+1,r}$ の (単位元を共有する) 部分代数とみなせるので，作用の制限を用いて，以下の関手を定義する;

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathscr{H}}\mathrm{Res}_n^{n+1} &:= \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_{n+1,r}}(\mathscr{H}_{n+1,r}, ?) : \mathscr{H}_{n+1,r}\text{-mod} \to \mathscr{H}_{n,r}\text{-mod},\\
{}^{\mathscr{H}}\mathrm{Ind}_n^{n+1} &:= \mathscr{H}_{n+1,r} \otimes_{\mathscr{H}_{n,r}} ? : \mathscr{H}_{n,r}\text{-mod} \to \mathscr{H}_{n+1,r}\text{-mod},\\
{}^{\mathscr{H}}\mathrm{coInd} &:= \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}_{n,r}}(\mathscr{H}_{n+1,r}, ?) : \mathscr{H}_{n,r}\text{-mod} \to \mathscr{H}_{n+1,r}\text{-mod}.
\end{aligned}
$$

さらに，$\mathscr{S}_{n,r}$ は [DJM] によって cellular 代数であることが示されているので，その cellular 構造を定める反自己同型写像 (involution) $\theta_n : \mathscr{S}_{n,r} \to \mathscr{S}_{n,r}$ が存在する。そこで，$M \in \mathscr{S}_{n,r}$-mod に対し，$M^{\circledast} := \mathrm{Hom}_R(M, R)$ (自然な右 $\mathscr{S}_{n,r}$-加群 $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ の作用を θ_n で捻って左 $\mathscr{S}_{n,r}$-加群と思ったもの) を対応させる反変関手 $\circledast_n : \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod} \to \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}$ $(M \mapsto M^{\circledast})$ を考える。$\mathscr{S}_{n+1,r}$ に対しても，同様に反変関手 $\circledast_{n+1} : \mathscr{S}_{n+1,r}\text{-mod} \to \mathscr{S}_{n+1,r}\text{-mod}$ を考える。

ついでに，Schur 関手 $\Omega_n : \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod} \to \mathscr{H}_{n,r}\text{-mod}$ $(\Omega_{n+1} : \mathscr{S}_{n+1,r}\text{-mod} \to \mathscr{H}_{n+1,r}\text{-mod})$ というものがあったことを思い出しておこう。すると，以下のことが成り立つ。

Theorem 5.2 ([W3])**.**

(i) 関手の同値 $\mathrm{Ind}_n^{n+1} \cong \mathrm{coInd}_n^{n+1}$ が成り立つ。よって，Ind_n^{n+1} は Res_n^{n+1} の左かつ右随伴関手であり，特に，Ind_n^{n+1}, Res_n^{n+1} は完全関手である。

(ii) 関手の同値 $\mathrm{Res}_n^{n+1} \circ \circledast_{n+1} \cong \circledast_n \circ \mathrm{Res}_n^{n+1}$，$\mathrm{Ind}_n^{n+1} \circ \circledast_n \cong \circledast_{n+1} \circ \mathrm{Ind}_n^{n+1}$ が存在する。

(iii) 関手の同値 $\Omega_n \circ \mathrm{Res}_n^{n+1} \cong {}^{\mathscr{H}}\mathrm{Res}_n^{n+1} \circ \Omega_{n+1}$，$\Omega_{n+1} \circ \mathrm{Ind}_n^{n+1} \cong {}^{\mathscr{H}}\mathrm{Ind}_n^{n+1} \circ \Omega_n$ が存在する。

この定理は,

- $\mathscr{S}_{n,r}$ が quasi-hereditary cellular 代数であること (standard 加群，costandard 加群, tilting 加群等の性質),
- $\mathscr{H}_{n,r}$ が symmetric 代数であること ([MM] : これより，${}^{\mathscr{H}}\mathrm{Ind}_n^{n+1} \cong {}^{\mathscr{H}}\mathrm{coInd}_n^{n+1}$ を得る),
- $\mathscr{S}_{n,r}$ が $\mathscr{H}_{n,r}$ の quasi-hereditary cover であること (これより，$\mathscr{H}_{n,r}$-proj 上の性質のいくつかが, $\mathscr{S}_{n,r}$-proj 上にリフトする)
- [DJM] によって構成された $\mathscr{S}_{n,r}$ の cellular 基底, [W1] で得た $\mathscr{S}_{n,r}$ の生成元, 及び Weyl 加群の最高ウェイト加群としての特徴付け,

等をフルに活用して証明される (詳しくは [W3] 参照)。

以下，$\bigoplus_{n\geq 0}\mathscr{S}_{n,r}$-mod 上に，上で定義した誘導，制限関手 Ind_n^{n+1}, Res_n^{n+1} を用いて，圏論的な A 型アファイン Lie 環の作用を定義するために，パラメータに対し，以下の条件を加える ($\mathscr{H}_{n,r}$ (よって $\mathscr{S}_{n,r}$) はパラメータ $q \in R$ と $s_1, \dots, s_r \in \mathbb{Z}$ を持っていたことに注意)。

(CP): ある自然数 e が存在して，$1+(q^2)+(q^2)^2+\cdots+(q^2)^{e-1} = 0$ かつ $1+(q^2)+\cdots+(q^2)^t \neq 0$ $(0<t<e-1)$ を満たす。

まず，$\mathscr{S}_{n,r}$-mod のブロックへの射影を用いて，Ind_n^{n+1}, Res_n^{n+1} を細分化する。$x=(a,b,c) \in [\lambda]$ $(\lambda \in \Lambda^+_{n,r})$ に対し，その residue を $\mathrm{res}(x) := (q^2)^{b-a+s_c}$ と定義する。条件 (CP) より，$\mathrm{res}(x) \in \{(q^2)^0, (q^2)^1, \dots, (q^2)^{e-1}\}$ である。$x \in [\lambda]$ に対し，$\mathrm{res}(x) = (q^2)^i$ $(0 \leq i \leq e-1)$ であるとき，x を λ の i-node と呼ぶ。また，$\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$ に対し，

$$r(\lambda) := (r_0(\lambda), r_1(\lambda), \dots, r_{e-1}(\lambda)) \in \mathbb{Z}^e_{\geq 0}, \text{ where } r_i(\lambda) := \sharp\{x \in [\lambda] \mid x : i\text{-node}\}$$

とし，

$$R_{n,e} := \{r(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda^+_{n,r}\} \subset \mathbb{Z}^e$$

と定める。

$\mathscr{S}_{n,r}$ の Weyl 加群 $\Delta(\lambda)$ は, 直既約加群なので，$\mathscr{S}_{n,r}$-mod のあるブロックに属する。さらに，cellular 代数の一般論より，$\mathscr{S}_{n,r}$-mod のブロックは，$\Delta(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda^+_{n,r})$ の linkage class (共通の組成因子を持つ Weyl 加群を繋いでいってできる同値類) と 1 対 1 に対応する。このことを踏まえて，[LM] において，$\mathscr{S}_{n,r}$-mod のブロックと $R_{n,e}$ とが 1 対 1 に対応することが示されている。ここで，$\Delta(\lambda)$ は，$r(\lambda) \in R_{n,e}$ に対応するブロックに属する。

$\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{e-1}) \in \mathbb{Z}^e$ に対し，関手 $1_{\mathbf{b}} : \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod} \to \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}$ を，

$$1_{\mathbf{b}} = \begin{cases} \mathbf{b} \text{ に対応するブロックへの射影} & \text{if } \mathbf{b} \in R_{n,e}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める。また，$\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{e-1}) \in \mathbb{Z}^e$ と $0 \leq i \leq e-1$ に対し，

$$\mathbf{b} \pm i := (b_0, \dots, b_{i-1}, b_i \pm 1, b_{i+1}, \dots, b_{e-1})$$

と定める。以上の準備のもとで, Ind_n^{n+1}, Res_n^{n+1} の細分化を

$$\mathrm{Ind}_n^{n+1} = \bigoplus_{i=0}^{e-1} i\text{-}\mathrm{Ind}_n^{n+1}, \text{ where } i\text{-}\mathrm{Ind}_n^{n+1} := \bigoplus_{\mathbf{b}\in R_{n,e}} 1_{\mathbf{b}+i} \circ \mathrm{Ind}_n^{n+1} \circ 1_{\mathbf{b}},$$

$$\mathrm{Res}_n^{n+1} = \bigoplus_{i=0}^{e-1} i\text{-}\mathrm{Res}_n^{n+1}, \text{ where } i\text{-}\mathrm{Res}_n^{n+1} := \bigoplus_{\mathbf{b}\in R_{n+1,e}} 1_{\mathbf{b}-i} \circ \mathrm{Res}_n^{n+1} \circ 1_{\mathbf{b}}$$

によって定める。さらに, $i\text{-Ind} := \bigoplus_{n\geq 0} i\text{-}\mathrm{Ind}_n^{n+1}$, $i\text{-Res} := \bigoplus_{n\geq 0} i\text{-}\mathrm{Res}_n^{n+1}$ とすると, i-Ind, i-Res は $\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{S}_{n,r}$-mod からそれ自身への完全関手を与えるので, i-Ind, i-Res より誘導される $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod})$ 上の作用をそれぞれ [i-Ind], [i-Res] と表すことにすると, 以下のことが成り立つ。

Theorem 5.3 ([W3]). *パラメータが条件 (CP) を満たすと仮定する。このとき,* $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod})$ *上に,* $e_i := [i\text{-Res}]$, $f_i := [i\text{-Ind}]$ $(0 \leq i \leq e-1)$ *を Chevalley 生成元とする,* $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$ *の作用が定まり,* $\widehat{\mathfrak{sl}}_e$*-加群として,*

$$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\bigoplus_{n\geq 0} \mathscr{S}_{n,r}\text{-mod}) \cong \mathcal{F}[\mathbf{s}]$$

となる。ここで, $\mathcal{F}[\mathbf{s}]$ *は multi-charge* $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_r)$ *のレベル r-Fock 空間である。*

Remark 5.4.

R が標数 0 の体で, パラメータが条件 (CP) を満たすとき, [RSVV], [L], [SW] によって (独立に), 上の定理の圏化のもとで, $\mathscr{S}_{n,r}$ の直既約 tilting 加群 (resp. 既約加群) が, Uglov [U] によって与えられた $\mathcal{F}[\mathbf{s}]$ の標準基底に対応することが示されている。

References

[AK] S. Ariki and K. Koike, A Hecke algebra of $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})\wr\mathfrak{S}_n$ and construction of its irreducible representations, *Adv. Math.* **106** (1994), 216-243.

[DJM] R. Dipper, G. James, and A. Mathas, Cyclotomic q-Schur algebras, *Math. Z.* **229** (1998), 385-416.

[DM] R. Dipper and A. Mathas, Morita equivalences of Ariki-Koike algebras, *Math. Z.* **240** (2002), 579-610.

[DG] S. Doty and A. Giaquinto, Presenting Schur Algebras, *International Mathematical Research Notices* **36** (2002) 1907-1944.

[Du] J. Du, *A note on quantized Weyl reciprocity at root of unity,* Algebra Colloq. **2** (1995), 363–372.

[DR] J. Du and H. Rui, Borel type subalgebras of the q-Schur^m algebra, *J. Algebra* **213** (1999), 567-595.

[J] M. Jimbo, *A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation,* Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247–252.

[KN] M. Kashiwara and T. Nakashima, *Crystal Graphs for Representations of the q-Analogue of Classical Lie Algebras,* J. Algebra **165** (1994), 295–345.

[L] I. Losev, *Proof of Varagnolo-Vasserot conjecture on cyclotomic categories O*, preprint arXiv:1305.4894 .

[LM] S. Lyle and A. Mathas, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras*, Adv. Math. **216** (2007), 854-878.

[MM] G. Malle and A. Mathas, Symmetric cyclotomic Hecke algebras, *J. Algebra* **205** (1998), 275-293.

[M] A. Matahs, The representation theory of the Ariki-Koike and cyclotomic q-Schur algebras. In "*Representation theory of algebraic groups and quantum groups*", *Adv. Stud. Pure Math.* Vol. **40**, Math. Soc. Japan, Tokyo 2004, pp. 261-320.

[R] R. Rouquier, q-Schur algebras and complex reflection groups, *Moscow Math. J.* **8**, (2008) 119-158.

[RSVV] R. Rouquier, P. Shan, M. Varagnolo and E. Vasserot, Categorifications and cyclotomic rational double affine Hecke algebras, preprint arXiv:1305.4456.

[SW] C. Stroppel and B. Webster, Quiver Schur algebras and q-Fock space, preprint arXiv : 1110.1115.

[U] D. Uglov, *Canonical bases of higher level q-deformed Fock spaces and Kazhdan-Lusztig polynomials*, Progress in Math. **191**, Birkhauser (2000).

[W1] K. Wada, Presenting cyclotomic q-Schur algebras, *Nagoya Math. J.* **201** (2011), 45-116.

[W2] K. Wada, On Weyl modules of cyclotomic q-Schur algebras, *Contemp. Math.* **565** (2012), 261-286.

[W3] K. Wada, Induction and restriction functors for cyclotomic q-Schur algebras, to appear in Osaka Journal of Math.

[W4] 和田 堅太郎, On Weyl modules of cyclotomic q-Schur algebras, 第１３回代数群と量子群の表現論研究集会 報告集, 59-72.