The crossed and monomial Burnside rings
(斜バーンサイド環と単項バーンサイド環)

竹ヶ原　裕元

室蘭工業大学

1960 年代の終わり頃に有限群のバーンサイド環が研究され始め, 可解群の特徴付けや誘導定理の証明への応用 ([13, 32] 参照) 及び単数群等の研究が進められた ([11, 14, 26, 42] 参照). その後の研究から, 有限群の表現に関してはバーンサイド環を含むより広い概念である G 関手やそれと同等な概念であるマッキー関手の理論が有効に働くことが分かってきた ([16, 19, 36, 40] 参照). さらに近年では, バーンサイド環の一般化である斜 (crossed) バーンサイド環や単項 (monomial) バーンサイド環, 及びそれらを拡張した諸概念の研究が進み, twisted quantum double の誘導定理などに応用されている ([4, 5, 6, 7, 15, 28, 29, 30, 33, 34]). 本報告では, twisted quantum double の誘導定理を導く理論, 及び最近の研究から単項バーンサイド環の単数群に関する結果を紹介する.

1　マッキー関手 (G 関手)

G を有限群, k を単位元をもつ可換環とする. k 上 G のマッキー関手, あるいは, k 上の G 関手とは, k 加群の族 $X(H)$, $H \le G$ と k 準同型の族

$$\begin{aligned}
&(\text{共役写像}) \quad \mathrm{con}^g_H : X(H) \to X({}^gH), \quad H \le G,\ g \in G,\\
&(\text{制限写像}) \quad \mathrm{res}^H_K : X(H) \to X(K), \quad K \le H \le G,\\
&(\text{誘導写像}) \quad \mathrm{ind}^H_K : X(K) \to X(H), \quad K \le H \le G
\end{aligned}$$

の組 $X = (X, \mathrm{con}, \mathrm{res}, \mathrm{ind})$ で, 次の公理を満たすものをいう:

(G.1) $\mathrm{con}^g_{{}^rH} \circ \mathrm{con}^r_H = \mathrm{con}^{gr}_H, \quad \mathrm{con}^h_H = \mathrm{id}_{X(H)}$,

(G.2) $\mathrm{res}^K_L \circ \mathrm{res}^H_K = \mathrm{res}^H_L, \quad \mathrm{res}^H_H = \mathrm{id}_{X(H)}$,

(G.3) $\mathrm{con}^g_K \circ \mathrm{res}^H_K = \mathrm{res}^{{}^gH}_{{}^gK} \circ \mathrm{con}^g_H$,

(G.4) $\mathrm{ind}^H_K \circ \mathrm{ind}^K_L = \mathrm{ind}^H_L, \quad \mathrm{ind}^H_H = \mathrm{id}_{X(H)}$,

(G.5) $\mathrm{con}^g_H \circ \mathrm{ind}^H_K = \mathrm{ind}^{{}^gH}_{{}^gK} \circ \mathrm{con}^g_K$,

(G.6) (マッキー公理)

$$\mathrm{res}^H_K \circ \mathrm{ind}^H_U = \sum_{KhU \in K\backslash H/U} \mathrm{ind}^K_{K\cap {}^hU} \circ \mathrm{res}^{{}^hU}_{K\cap {}^hU} \circ \mathrm{con}^h_U,$$

ここで $L \le K \le H \le G$, $U \le H$, $g, r \in G$ 及び $h \in H$.

マッキー関手 $X = (X, \mathrm{con}, \mathrm{res}, \mathrm{ind})$ が k 上 G のグリーン関手であるとは, $X(H)$, $H \leq G$ が k 代数, かつ共役写像及び制限写像が環準同型であって, さらに, 次の公理を満たしていることをいう:

(G.7) (フロベニウス公理)

$$\sigma \cdot \mathrm{ind}_K^H(\tau) = \mathrm{ind}_K^H(\mathrm{res}_K^H(\sigma) \cdot \tau), \quad \mathrm{ind}_K^H(\tau) \cdot \sigma = \mathrm{ind}_K^H(\tau \cdot \mathrm{res}_K^H(\sigma)),$$

ここで $K \leq H$, $\sigma \in X(H)$ 及び $\tau \in X(K)$.

X, Y を k 上 G のマッキー関手とするとき, マッキー関手の射 $f : X \to Y$ とは, k 準同型の族 $f_H : X(H) \to Y(H)$, $H \leq G$ で, 次の条件を満たすものをいう:

$$\begin{aligned} f_{{}^gH} \circ \mathrm{con}_H^g &= \mathrm{con}_H^g \circ f_H, \\ f_K \circ \mathrm{res}_K^H &= \mathrm{res}_K^H \circ f_H, \\ f_H \circ \mathrm{ind}_K^H &= \mathrm{ind}_K^H \circ f_K, \end{aligned}$$

ここで $K \leq H \leq G$ 及び $g \in G$.

次節以降に, グリーン関手の例である, バーンサイド環関手, 斜バーンサイド環関手, 単項バーンサイド環関手, 及び表現環関手を定義する.

2　バーンサイド環関手

グリーン関手の例として, 斜バーンサイド環関手や単項バーンサイド環関手を含む広い意味でのバーンサイド環関手を定義する. G のモノイド関手とは, モノイドの族 $M(H)$, $H \leq G$ と準同型の族

$$\begin{aligned} &(\text{共役写像}) \quad \mathrm{con}_H^g : M(H) \to M({}^gH), \quad H \leq G,\ g \in G, \\ &(\text{制限写像}) \quad \mathrm{res}_K^H : M(H) \to M(K), \quad K \leq H \leq G \end{aligned}$$

の組 $M = (M, \mathrm{con}, \mathrm{res})$ で, 次の条件を満たすものをいう:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{M.1})\ \mathrm{con}_{{}^rH}^g \circ \mathrm{con}_H^r = \mathrm{con}_H^{gr}, \quad \mathrm{con}_H^h = \mathrm{id}_{M(H)}, \\ &(\mathrm{M.2})\ \mathrm{res}_L^K \circ \mathrm{res}_K^H = \mathrm{res}_L^H, \quad \mathrm{res}_H^H = \mathrm{id}_{M(H)}, \\ &(\mathrm{M.3})\ \mathrm{con}_K^g \circ \mathrm{res}_K^H = \mathrm{res}_{{}^gK}^{{}^gH} \circ \mathrm{con}_H^g, \end{aligned}$$

ここで $L \leq K \leq H \leq G$, $g, r \in G$ 及び $h \in H$. 以下 M を G のモノイド関手とする. $H \leq G$ とし, $\widetilde{M}(H) = \prod_{K \leq H} M(K)$ とおく. このとき $\widetilde{M}(H)$ は作用 ${}^h(\sigma_K)_{K \leq H} = (\mathrm{con}_K^h(\sigma_K))_{{}^hK \leq H}$, ${}^\forall h \in H$, ${}^\forall(\sigma_K)_{K \leq H} \in M(H)$ により H モノイドとなる. $K \leq H$ に対して $M(K)$ を $\widetilde{M}(H)$ の部分モノイドと考える. 任意の有限左 H 集合 (以後, 単に H 集合) J, J' に対して J から J' への H 写像全体の集合を $\mathrm{Map}_H(J, J')$ で表す. H 集合のカテゴリー H-**set** からモノイドのカテゴリー **Mon** への反変関手 $T = T_H^M : H\text{-}\mathbf{set} \to \mathbf{Mon}$ を, 各 H 集合 J に対して

$$T(J) = \{\pi \in \mathrm{Map}_H(J, \widetilde{M}(H)) \mid \pi(x) \in M(H_x), \quad {}^\forall x \in J\},$$

ここで H_x は H における x の安定化群, により定義する. H 集合 J, J' と H 写像 $f : J' \to J$ に対して **Mon** におけるモルフィズム $T(f) : T(J) \to T(J')$ は

$$T(f)(\pi) : J' \to \widetilde{M}(H), \quad x \mapsto \mathrm{res}^{H_{f(x)}}_{H_x}(\pi(f(x))), \quad {}^{\forall}\pi \in T(J)$$

により定義される. この関手は加法的である. すなわち, 任意の H 集合 J_1, J_2 に対して包含写像 $\iota_i : J_i \to J_1 \dot{\cup} J_2$ から引き起こされる写像

$$T(\iota_1) \times T(\iota_2) : T(J_1 \dot{\cup} J_2) \to T(J_1) \times T(J_2)$$

は同型である ([20, Section 2] 参照). 任意の $(\pi_1, \pi_2) \in T(J_1) \times T(J_2)$ に対して

$$\pi_1 \dot{+} \pi_2 = (T(\iota_1) \times T(\iota_2))^{-1}(\pi_1, \pi_2)$$

とおく. H 集合 J と $T(J)$ の元 π の組 (J, π) は T の要素と呼ばれる. T の要素環のモルフィズム $f : (J', \pi') \to (J, \pi)$ は $T(f)(\pi) = \pi'$ となる H 写像 $f : J' \to J$ として定められる ([29, (2.10)] 参照).

H 集合 J を含む H 集合の同型類を $[J]$ で表すとき, H 集合の同型類の $\mathbb{Z}$ 線形結合 $\sum_J \ell_J[J]$, $\ell_J \in \mathbb{Z}$ 全体からなり, (集合論的) 直和 $[J_1 \dot{\cup} J_2]$ を加法 $[J_1] + [J_2]$, (集合論的) 直積 $[J_1 \times J_2]$ を乗法 $[J_1] \cdot [J_2]$ とする可換環をバーンサイド環といい, $\Omega(H)$ で表す ([10, §80] 参照). 以下 T の要素に関わる $\Omega(H)$ の一般化を述べる.

T の要素 (J, π) を含む T の要素の同型類を $\overline{(J, \pi)}$ で表す. $\mathbf{F}(H; T)$ を T の要素の同型類上の自由アーベル群とし, $\mathbf{F}(H; T)_0$ を $\overline{(J_1 \dot{\cup} J_2, \pi_1 \dot{+} \pi_2)} - \overline{(J_1, \pi_1)} - \overline{(J_2, \pi_2)}$ の形のすべての元で生成される部分群とする. $\mathbf{F}(H; T)$ における乗法を

$$\overline{(J_1, \pi_1)} \cdot \overline{(J_2, \pi_2)} = \overline{(J_1 \times J_2, T(\mathrm{Pr}_1)(\pi_1) \cdot T(\mathrm{Pr}_2)(\pi_2))},$$

ここで $\mathrm{Pr}_i : J_1 \times J_2 \to J_i$ は射影, により定義する. このとき $\mathbf{F}(H; T)$ は環であり, $\mathbf{F}(H; T)_0$ は両側イデアルである. 環 $\Omega(H; T)$ を剰余環 $\mathbf{F}(H; T)/\mathbf{F}(H; T)_0$ として定める. これは $F = T$ としてジャコブソン により定義された F バーンサイド環である ([20], [27] 参照). T の要素 (J, π) に対して $\Omega(H; T)$ の元 $\overline{(J, \pi)} + \mathbf{F}(H; T)_0$ を $[J, \pi]$ により表す. $[J_1, \pi_1] = [J_2, \pi_2] \iff \overline{(J_1, \pi_1)} = \overline{(J_2, \pi_2)}$ であることが [10, Lemma 80.4] の証明と同様な議論により示される. $[J_1, \pi_1]$, $[J_2, \pi_2] \in \Omega(H; T)$ の加法 $+$ と乗法 $\cdot$ は次で与えられる:

$$[J_1, \pi_1] + [J_2, \pi_2] = [J_1 \dot{\cup} J_2, \pi_1 \dot{+} \pi_2],$$

$$[J_1, \pi_1] \cdot [J_2, \pi_2] = [J_1 \times J_2, \pi_1 \cdot \pi_2],$$

ここで

$$\pi_1 \dot{+} \pi_2 : J_1 \dot{\cup} J_2 \to \widetilde{M}(H), \quad x \mapsto \begin{cases} \pi_1(x), & x \in J_1 \text{ のとき}, \\ \pi_2(x), & x \in J_2 \text{ のとき}, \end{cases}$$

及び

$$\begin{aligned}\pi_1\cdot\pi_2 : J_1\times J_2 &\to \widetilde{M}(H),\\ (x_1,x_2) &\mapsto \mathrm{res}^{H_{x_1}}_{H_{x_1}\cap H_{x_2}}(\pi_1(x_1))\cdot \mathrm{res}^{H_{x_2}}_{H_{x_1}\cap H_{x_2}}(\pi_2(x_2)).\end{aligned}$$

$K\le H$ とする. 各 H 集合 J に対して $\mathrm{res}^H_K(J)$ により J の K への制限を表す. V を K 集合とする. 集合の直積 $H\times V$ 上の K の作用を

$$r(h,x)=(hr^{-1},rx),\quad {}^\forall r\in K,\ {}^\forall(h,x)\in H\times V$$

により定め, 各 $(h,x)\in H\times V$ を含む K 軌道を $h\otimes x$ で表す. H 集合 $\mathrm{ind}^H_K(V)$ を K 軌道全体の集合 $\{h\otimes x\mid (h,x)\in H\times V\}$ に作用が

$$h(h'\otimes x)=hh'\otimes x,\quad {}^\forall h\in H,\ {}^\forall(h',x)\in H\times V$$

により与えられるものとして定め, 誘導 H 集合と呼ぶ ([10, §80] 参照). 各 $h\in H$ に対して ${}^hK$ 集合 $\mathrm{con}^h_K(V)$ を $\mathrm{ind}^H_K(V)$ の部分集合 $\{h\otimes x\mid x\in V\}$ に作用が

$${}^hr(h\otimes x)=h\otimes rx,\quad {}^\forall r\in K,\ {}^\forall x\in V$$

により与えられるものとして定め, 共役 ${}^hK$ 集合と呼ぶ.

グリーン関手 $\Omega^M=(\Omega^M,\mathrm{con},\mathrm{res},\mathrm{ind})$ を

$$\begin{aligned}&\Omega^M(H)=\Omega(H;T^M_H),\\ &\mathrm{con}^g_H([J,\pi])=[\mathrm{con}^g_H(J),{}^g\pi],\\ &\mathrm{res}^H_K([J,\pi])=[\mathrm{res}^H_K(J),\pi|_K],\\ &\mathrm{ind}^H_K([V,\varpi])=[\mathrm{ind}^H_K(V),\varpi^H],\end{aligned}$$

ここで $K\le H\le G$, $g\in G$, (J,π) は T^M_H の要素, 及び (V,ϖ) は T^M_K の要素, により定義する ([20, 27] 参照). ただし ${}^g\pi$, $\pi|_K$ 及び ϖ^H は $x\in J$, $y\in V$ 及び $h\in H$ に対して次により定義される:

$$({}^g\pi)(g\otimes x)=\mathrm{con}^g_{H_x}(\pi(x)),\quad \pi|_K(x)=\mathrm{res}^{H_x}_{K_x}(\pi(x)),\quad \varpi^H(h\otimes y)=\mathrm{con}^h_{K_y}(\varpi(y)).$$

$H\le G$ とする. $g\in G$, $K\le H$ 及び $s\in M(K)$ に対して ${}^gs=\mathrm{con}^g_K(s)$ とおき, H 写像 $\pi_s : H/K\to\widetilde{M}(H)=\prod_{U\le H}M(U)$ を

$$\pi_s(hK)=(\delta_{{}^hKU}\,{}^hs)_{U\le H},\quad {}^\forall h\in H$$

により定める. 集合 $\mathfrak{S}(H;M):=\{(K,s)\mid K\le H,\ s\in M(K)\}$ 上の H の作用を $h.(K,s)=({}^hK,{}^hs)$, ${}^\forall h\in H$ により定め, $\mathfrak{R}(H;M)$ を H 軌道の完全代表系とすれば, $\{[H/K,s]:=[H/K,\pi_s]\mid (K,s)\in\mathfrak{R}(H;M)\}$ が $\Omega^M(H)$ の $\mathbb{Z}$ 基底を成し,

$$\begin{aligned}&\mathrm{con}^g_H([H/U,s])=[{}^gH/{}^gU,{}^gs],\\ &\mathrm{res}^H_K([H/U,s])=\sum_{KhU\in K\backslash H/U}[K/K\cap{}^hU,{}^hs],\\ &\mathrm{ind}^H_K([K/L,t])=[H/L,t],\end{aligned}$$

ここで $g \in G$, $U \leq H$, $s \in M(U)$, $L \leq K \leq H$ 及び $t \in M(L)$, となる. $[H/K, s]$, $[H/U, t] \in \Omega^M(H)$ に対して乗法は次で与えられる:

$$[H/K, s] \cdot [H/U, t] = \sum_{KhU \in K\backslash H/U} [H/K \cap {}^hU, s \cdot {}^ht].$$

例 2.1 S を有限 G モノイドとする. モノイド関手 $M = M_S = (M_S, \mathrm{con}, \mathrm{res})$ を, 各 $H \leq G$ に対して $M(H) = C_S(H) := \{s \in S \mid {}^hs = s,\ {}^\forall h \in H\}$, ここで ${}^hs$ は h の s への作用を表す, により定める. ただし $K \leq H \leq G$ 及び $g \in G$ に対して $\mathrm{con}_H^g : M(H) \to M({}^gH)$, $s \mapsto {}^gs$ 及び $\mathrm{res}_K^H : M(H) \to M(K)$, $s \mapsto s$ である. このとき $\mathrm{C}\Omega(H, S) := \Omega^M(H)$, $H \leq G$ を斜バーンサイド環関手と呼ぶ ([30] 参照). $H \leq G$ とする. T_H^M の要素は斜 H 集合と呼ばれ ([7, Definition 2.1], [17, Definition 4.2.1], [29, (1.2)] 参照), $\mathrm{C}\Omega(H, S)$ は斜バーンサイド環と呼ばれる ([7, 29] 参照). $S = \{\epsilon\}$, ϵ は単位元, のときは, $\Omega(H) := \mathrm{C}\Omega(H, \{\epsilon\})$, $H \leq G$ をバーンサイド環関手と呼ぶ ([10, §80], [36, Section 6], [40, Example 2.11] 参照).

例 2.2 G が有限アーベル群 A の作用群であるとする. $H \leq G$ として, G の作用の H への制限により, H は A の作用群である. 写像 $\sigma : H \to A$ が

$$\sigma(h_1h_2) = \sigma(h_1)\,{}^{h_1}\sigma(h_2), \quad {}^\forall h_1,\ h_2 \in H$$

を満たすとき, σ を 1 コサイクル, あるいは斜準同型と呼ぶ. $Z^1(H, A)$ により, H から A への 1 コサイクル全体の集合を表す. $Z^1(H, A)$ における乗法を

$$\sigma \cdot \tau(h) = \sigma(h)\tau(h), \quad {}^\forall \sigma,\ \tau \in Z^1(H, A),\ {}^\forall h \in H$$

により定める. $Z^1(H, A)$ は $1_H : H \to A$, $h \mapsto \epsilon$ を単位元とするアーベル群である. $H \leq G$ 及び $\sigma \in Z^1(H, A)$ に対して 1 コサイクル $g\sigma : {}^gH \to A$, $g \in G$ を

$$g\sigma(ghg^{-1}) = {}^g\sigma(h), \quad {}^\forall h \in H$$

により定め, また 1 コサイクル $\sigma^a : H \to A$, $a \in A$ を

$$\sigma^a(h) = a^{-1}\sigma(h)\,{}^ha, \quad {}^\forall h \in H$$

により定める. 定義から $h\sigma = \sigma^{\sigma(h)}$, $g(\sigma^a) = (g\sigma)^{{}^ga}$, ${}^\forall h \in H$, ${}^\forall \sigma \in Z^1(H, A)$, ${}^\forall g \in G$, ${}^\forall a \in A$ である. $Z^1(H, A)$ は右 A 集合であるが, $H^1(H, A)$ により A 軌道の完全代表系を表す. 各 $\sigma \in Z^1(H, A)$ について, すべての $a \in A$ に対して $\sigma^a =_A \sigma$ と表し, $\overline{\sigma}$ により $\overline{\sigma} =_A \sigma$ である $H^1(H, A)$ の元を表す. モノイド関手 $M = M^A = (M^A, \mathrm{con}, \mathrm{res})$ を, 各 $H \leq G$ に対して $M(H) = H^1(H, A)$, 及び $\mathrm{con}_H^g : M(H) \to M({}^gH)$, $\sigma \mapsto \overline{g\sigma}$; $\mathrm{res}_K^H : M(H) \to M(K)$, $\sigma \mapsto \overline{\sigma|_K}$, ${}^\forall K \leq H \leq G$, ${}^\forall g \in G$ により定める. ただし $\sigma|_K$ は σ の K への制限を表す. $\Omega(H, A) := \Omega^M(H)$, $H \leq G$ を単項バーンサイド環関手と呼ぶ ([2, 15] 参照).

3　単項バーンサイド環の基本定理

例 2.2 の記号の下で, 各 $H \leq G$ に対して $\mathbb{Z}H^1(H,A)$ を $\mathbb{Z}$ 係数の群環とする. 環準同型の族 $\mathrm{con}_H^g : \mathbb{Z}H^1(H,A) \to \mathbb{Z}H^1({}^gH,A)$, $\sigma \mapsto \overline{g\sigma}$, ${}^\forall H \leq G$, ${}^\forall \sigma \in H^1(H,A)$, ${}^\forall g \in G$ を用いて, 環の直積 $\prod_{H\leq G} \mathbb{Z}H^1(H,A)$ の部分環 $\mathcal{G}(G,A)$ を

$$\mathcal{G}(G,A) = \left\{ (x_H)_{H\leq G} \in \prod_{H\leq G} \mathbb{Z}H^1(H,A) \,\middle|\, \mathrm{con}_H^g(x_H) = x_{{}^gH}, \quad {}^\forall g \in G \right\},$$

と定義し, 単項バーンサイド環 $\Omega(G,A)$ のゴースト環と呼ぶ.

集合 $\mathfrak{S}(G,H^1(-,A)) := \{(U,\tau) \mid U \leq G,\ \tau \in H^1(U,A)\}$ 上の G の作用を $g(U,\tau) = ({}^gU, \overline{g\tau})$, ${}^\forall g \in G$ により定め, $\mathfrak{R}(G,H^1(-,A))$ を G 軌道の完全代表系とする. 各 $(U,\tau) \in \mathfrak{S}(G,H^1(-,A))$ に対して $[(G/U)_\tau]$ により $[G/U,\tau]$ を表すとき, $\{[(G/U)_\tau] \mid (U,\tau) \in \mathfrak{R}(G,H^1(-,A))\}$ が $\Omega(G,A)$ の $\mathbb{Z}$ 基底を成す. $\Omega(G,A)$ から $\mathcal{G}(G,A)$ への準同型 $\rho : \Omega(G,A) \to \mathcal{G}(G,A)$ を

$$[(G/U)_\tau] \mapsto \left(\sum_{gU\in G/U,\, H\leq {}^gU} \mathrm{res}_H^{{}^gU} \circ \mathrm{con}_U^g(\tau) \right)_{H\leq G}$$

により定める. また, 写像 $\eta : \mathcal{G}(G,A) \to \Omega(G,A)$ を

$$(y_H)_{H\leq G} \mapsto \sum_{H\leq G} \sum_{U\leq H} |U|\mu(U,H) \sum_{\sigma\in H^1(H,A)} \ell_\sigma [(G/U)_{\sigma|_U}],$$

ここで $y_H = \sum_{\sigma\in H^1(H,A)} \ell_\sigma \sigma$ 及び μ は G の部分群束のメービウス関数 ([1] 参照), により定める. 次の命題が成り立つ ([5, Proposition 2.4] 参照).

命題 3.1 (i) $\eta \circ \rho = |G|\mathrm{id}_{\Omega(G,A)}$.　(ii) $\rho \circ \eta = |G|\mathrm{id}_{\mathcal{G}(G,A)}$.

系 3.2 ρ は環の単射準同型である.

注意 3.3 $H \leq G$ とし, H の非共役な部分群の集まりで最大なものを $\mathrm{Cl}(H)$ で表す. $A = \{\epsilon\}$ として, バーンサイド環 $\Omega(H)$ を $\Omega(H,A)$ と同一視する. また, $\mathcal{G}(H,A) = \prod_{K\leq H} \mathbb{Z}$ である. $\Omega(H)$ に対して命題 3.1 を適用すると, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(H)$ の原始べき等元全体が $e_K^{(H)} = (1/|H|)\eta((x_K(L))_{L\leq H})$, $K \in \mathrm{Cl}(H)$ で与えられる. ただし, ある $h \in H$ について $L = {}^hK$ であるとき $x_K(L) = 1$ であり, そうでないとき $x_K(L) = 0$ である. 定義から, 各 $K \in \mathrm{Cl}(H)$ に対して

$$e_K^{(H)} = \frac{1}{|N_H(K)|} \sum_{U\leq K} |U|\mu(U,K)[H/U] \tag{I}$$

である (Gluck [18], Yoshida [41] 参照).

加法群 $\widetilde{\Omega}(G,A)$ を

$$\widetilde{\Omega}(G,A) = \prod_{(K,\nu)\in\mathfrak{R}(G,H^1(-,A))} \mathbb{Z},$$

により定義する. また, 加法的写像 $\varphi : \Omega(G,A) \to \widetilde{\Omega}(G,A)$ を

$$\varphi([(G/U)_\tau]) = (|\{gU \in G/U \mid K \le {}^gU, \quad \nu =_A (g\tau)|_K\}|)_{(K,\nu)\in\mathfrak{R}(G,H^1(-,A))}$$

により定義し, バーンサイド準同型と呼ぶ. このとき, $\rho = \kappa\circ\varphi$ を満たす加法群の同型 $\kappa : \widetilde{\Omega}(G,A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(G,A)$ が存在し, φ は単射となっている.

各 $(U,\tau)\in\mathfrak{S}(G,H^1(-,A))$ に対して $N_G(U,\tau) = \{g\in N_G(U) \mid \mathrm{con}_U^g(\tau) = \tau\}$, $W_G(U,\tau) = N_G(U,\tau)/U$ とおく. 各 $g\in N_G(U,\tau)$ に対して

$$H^1_\tau(\langle g\rangle U, A) = \{\nu \in H^1(\langle g\rangle U, A) \mid \tau = \mathrm{res}_U^{\langle g\rangle U}(\nu)\}$$

とおき, 加法群 $\mathrm{Obs}(G,A)$ を

$$\mathrm{Obs}(G,A) = \prod_{(U,\tau)\in\mathfrak{R}(G,H^1(-,A))} \mathbb{Z}/|W_G(U,\tau)|\mathbb{Z}$$

により定義する. 加法的写像 $\psi : \widetilde{\Omega}(G,A) \to \mathrm{Obs}(G,A)$ を

$$(y_{(K,\nu)})_{(K,\nu)\in\mathfrak{R}(G,H^1(-,A))} \mapsto (z_{(U,\tau)} \bmod |W_G(U,\tau)|)_{(U,\tau)\in\mathfrak{R}(G,H^1(-,A))},$$

ここで, (K,ν) が (H,σ) を含む G 軌道の代表ならば $y_{(H,\sigma)} = y_{(K,\nu)}$ として,

$$z_{(U,\tau)} = \sum_{gU\in W_G(U,\tau),\, \nu\in H^1_\tau(\langle g\rangle U,A)} y_{(\langle g\rangle U,\nu)},$$

により定義し, コーシー・フロベニウス写像と呼ぶ. 次の定理はコーシー・フロベニウスの定理 [43, Lemma 2.7 (Cauchy-Frobenius)] を用いて証明される ([11, Proposition 1.3.5], [42, Lemma 2.1] 参照).

定理 3.4 (基本定理) 次の加法群の列は完全である:

$$0 \longrightarrow \Omega(G,A) \xrightarrow{\varphi} \widetilde{\Omega}(G,A) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Obs}(G,A) \longrightarrow 0.$$

4 ツイン関手

X を k 上 G のマッキー関手とする. 各 $H\le G$ に対して $X(H)$ は作用が

$$\left(\sum_{K\le H} \ell_K[H/K]\right)\cdot x = \sum_{K\le H} \ell_K \mathrm{ind}_K^H \circ \mathrm{res}_K^H(x), \quad {}^\forall \ell_K \in k,\ {}^\forall x \in X(H)$$

で与えられる $\Omega(H)$ 加群である ([16, Proposition 4.2], [40, Example 2.11] 参照). $|G|$ が k における単数ならば, $K < H \leq G$ に対して $\mathrm{res}^H_K(e_H^{(H)}) = 0$ (式 (I) 参照), $\mathrm{res}^H_K(e_H^{(H)} \cdot x) = 0$, ${}^\forall x \in X(H)$ 及び $e_H^{(H)} \cdot \mathrm{ind}^H_K(y) = 0$, ${}^\forall y \in X(K)$ が成り立つ. 各 $H \leq G$ に対して

$$\mathcal{T}^X(H) = \sum_{K<H} \{\mathrm{ind}^H_K(y) \mid y \in X(K)\},$$

$$\mathcal{K}^X(H) = \bigcap_{K<H} \{x \in X(H) \mid \mathrm{res}^H_K(x) = 0\}$$

とおく. H が X に関してプライモーディアルであるとは $\mathcal{T}^X(H) \neq X(H)$ が成り立つことをいい ([36] 参照), コプライモーディアルであるとは $\mathcal{K}^X(H) \neq \{0\}$ が成り立つことをいう ([5] 参照). $\mathcal{P}(X)$ で X に関するプライモーディアル部分群全体の集合を表し, $\mathcal{C}(X)$ で X に関するコプライモーディアル部分群全体の集合を表す. 次の命題は [5, Proposition 6.2] で述べられている.

命題 4.1 X を k 上 G のマッキー関手とする. $|G|$ が k における単数ならば, 任意の $H \leq G$ に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}^X(H) = \{e_H^{(H)} \cdot x \mid x \in X(H)\}, \quad && \mathcal{T}^X(H) = \{x - e_H^{(H)} \cdot x \mid x \in X(H)\}, \\ &X(H) = \mathcal{K}^X(H) \oplus \mathcal{T}^X(H), && \mathcal{C}(X) = \mathcal{P}(X). \end{aligned}$$

各 $H \leq G$ に対して

$$\overline{X}(H) = \overline{X(H)} := X(H)/\mathcal{T}^X(H)$$

とおく. k 上 G のマッキー関手 $\overline{X}^+ = (\overline{X}^+, \mathrm{con}^+, \mathrm{res}^+, \mathrm{ind}^+)$ は, 次で与えられ, X のツイン関手と呼ばれる ([5, 9, 36] 参照).

$$\overline{X}^+(H) = \left\{ (x_U)_{U\leq H} \in \prod_{U\leq H} \overline{X}(U) \;\middle|\; (\overline{\mathrm{con}^h_H(x_U)})_{{}^hU\leq H} = (\overline{x_U})_{U\leq H}, \quad {}^\forall h \in H \right\},$$

$$\mathrm{con}^{+g}{}_H((\overline{x_U})_{U\leq H}) = (\overline{\mathrm{con}^g_H(x_U)})_{{}^gU\leq {}^gH},$$

$$\mathrm{res}^{+H}{}_K((\overline{x_U})_{U\leq H}) = (\overline{x_U})_{U\leq K},$$

$$\mathrm{ind}^{+H}{}_K((\overline{y_U})_{U\leq K}) = \sum_{hK\in H/K} (c^h_L)_{L\leq H},$$

ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, $(x_U)_{U\leq H} \in \overline{X}^+(H)$, $(y_U)_{U\leq K} \in \overline{X}^+(K)$ 及び

$$c^h_L = \begin{cases} \overline{\mathrm{con}^h_U(y_U)}, & L = {}^hU,\ U \leq K \text{ の場合}, \\ 0, & \text{その他の場合}. \end{cases}$$

X がグリーン関手ならば $\overline{X}^+$ もグリーン関手である.

マッキー関手の射 $\beta : X \to \overline{X}^+$ を, 各 $H \le G$ に対して

$$\beta_H(x) = (\overline{\mathrm{res}^H_K(x)})_{K \le H}, \quad x \in X(H)$$

により定める ([36] 参照). X がグリーン関手ならば β_H は環準同型である.

次の命題は Thévenaz による ([36, Proposition 12.5] 参照)

命題 4.2 X を k 上 G のマッキー関手とする. $|G|$ が k における単数ならば, 任意の $H \le G$ に対して β_H は同型で, 次が成り立つ:

$$\beta_H^{-1}((\overline{x_K})_{K \le H}) = \sum_{K \in \mathrm{Cl}(H) \cap \mathcal{P}(X)} \frac{|K|}{|N_H(K)|} \mathrm{ind}^H_K(e^{(K)}_K \cdot x_K), \quad (\overline{x_K})_{K \le H} \in \overline{X}^+(H).$$

命題 4.2 より, $|G|$ が k における単数ならば, 任意の $H \le G$ に対して

$$x = \sum_{K \in \mathrm{Cl}(H) \cap \mathcal{P}(X)} \frac{|K|}{|N_H(K)|} \mathrm{ind}^H_K(e^{(K)}_K \cdot \mathrm{res}^H_K(x)), \quad x \in X(H)$$

が成り立つ ([36, Section 7] 参照). また, 任意の $K \le G$ に対して

$$e^{(K)}_K \cdot x = \frac{1}{|K|} \sum_{U \le K} |U| \mu(U, K) \mathrm{ind}^K_U \circ \mathrm{res}^K_U(x), \quad x \in X(K)$$

より, 次の系が得られる ([5, Example 6.9] 参照).

系 4.3 X を k 上 G のマッキー関手とする. $|G|$ が k における単数ならば, 任意の $H \le G$ に対して次が成り立つ:

$$x = \sum_{K \in \mathrm{Cl}(H) \cap \mathcal{P}(X)} \frac{1}{|N_H(K)|} \sum_{U \le K} |U| \mu(U, K) \mathrm{ind}^H_U \circ \mathrm{res}^H_U(x), \quad x \in X(H).$$

5 斜マッキー関手

以下, S を有限 G モノイドとし, $\mathrm{St}_S(G) = \{G_s \mid s \in S\}$, ここで G_s は s の安定化群, とおく. k 上 $\mathrm{St}_S(G)$ のマッキー束とは, k 準同型の族

$$\mathrm{con}_{s}{}^{g}_{H} : X_s(H) \to X_{{}^g s}({}^g H), \quad s \in S,\ H \le G_s,\ g \in G,$$

斜共役写像, を備えたマッキー関手の集まり $X = \{X_s = (X_s, \mathrm{con}, \mathrm{res}, \mathrm{ind})\}_{s \in S}$ で, 次の公理を満たすものをいう:

(C.0) $\mathrm{con}_{s}{}^{t}_{H} = \mathrm{con}^t_H$,

(C.1) $\mathrm{con}_{{}^r s}{}^{g}_{{}^r H} \circ \mathrm{con}_{s}{}^{r}_{H} = \mathrm{con}_{s}{}^{gr}_{H}$,

(C.2) $\mathrm{con}_{s}{}^{g}_{K} \circ \mathrm{res}^H_K = \mathrm{res}^{{}^g H}_{{}^g K} \circ \mathrm{con}_{s}{}^{g}_{H}$,

(C.3) $\mathrm{con}_{s}{}^{g}_{H} \circ \mathrm{ind}^H_K = \mathrm{ind}^{{}^g H}_{{}^g K} \circ \mathrm{con}_{s}{}^{g}_{K}$,

ここで $s \in S$, $K \leq H \leq G_s$, $g, r \in G$ 及び $t \in G_s$. この場合, X は X_s, $s \in S$ で構成されるマッキー束と呼ばれる. k 上 G のマッキー関手 X は自然に $X_s := X = (X, \mathrm{con}, \mathrm{res}, \mathrm{ind})$, $s \in S$ で構成されるマッキー束と考えられる.

X を k 上 $\mathrm{St}_S(G)$ のマッキー束とし, マッキー関手 $X_S = (X_S, \mathrm{con}, \mathrm{res}, \mathrm{ind})$ を

$$\begin{aligned}
X_S(H) &= \left\{ (x(s))_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s(H_s) \;\middle|\; \mathrm{con}_{s}{}^{h}_{H_s}(x(s)) = x({}^h s), \quad {}^\forall h \in H \right\},\\
\mathrm{con}^g_H((x(s))_{s\in S}) &= (\mathrm{con}_{s}{}^{g}_{H_s}(x(s)))_{{}^g s\in S},\\
\mathrm{res}^H_K((x(s))_{s\in S}) &= (\mathrm{res}^{H_s}_{K_s}(x(s)))_{s\in S},\\
\mathrm{ind}^H_K((y(s))_{s\in S}) &= \left(\sum_{H_s hK \in H_s\backslash H/K} \mathrm{ind}^{H_s}_{({}^hK)_s} \circ \mathrm{con}_{h^{-1}s}{}^{h}_{K_{h^{-1}s}}(y({}^{h^{-1}}s)) \right)_{s\in S},
\end{aligned}$$

ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, $(x(s))_{s\in S} \in X_S(H)$ 及び $(y(s))_{s\in S} \in X_S(K)$, により定義し ([30] 参照), X 上の斜マッキー関手と呼ぶ. X がマッキー関手のとき, この構成はドレス構成と呼ばれる. X がグリーン関手のとき, $X_S(H)$ における積が

$$(x(s))_{s\in S}(y(t))_{t\in S} = \left(\sum_{(s,t)\in H_r\backslash S\times S,\, st=r} \mathrm{ind}^{H_r}_{H_{s,t}}(\mathrm{res}^{H_s}_{H_{s,t}}(x(s)) \cdot \mathrm{res}^{H_t}_{H_{s,t}}(y(t))) \right)_{r\in S},$$

ここで $H_{s,t} = H_s \cap H_t$, により与えられ, X_S はグリーン関手となる ([6, 30] 参照).

H が X に関してプライモーディアルであるとは, ある $s \in C_S(H)$ に対して $\mathcal{T}^{X_s}(H) \neq X_s(H)$ が成り立つことをいい, コプライモーディアルであるとは, ある $s \in C_S(H)$ に対して $\mathcal{K}^{X_s}(H) \neq \{0\}$ が成り立つことをいう. $\mathcal{P}(X)$ で X に関するプライモーディアル部分群全体の集合を表し, $\mathcal{C}(X)$ で X に関するコプライモーディアル部分群全体の集合を表す.

各 $K \leq H \leq G$ に対して

$$\begin{aligned}
(\mathcal{K}^X)_S(H) &= \left\{ (x(s))_{s\in S} \in \prod_{s\in S} \mathcal{K}^{X_s}(H_s) \;\middle|\; x(s) = 0, \quad {}^\forall s \in S - C_S(H) \right\},\\
\overline{X}_S(H) &= \prod_{s\in C_S(H)} \overline{X_s(H)},\\
\overline{X}_S(K)^{N_H(K)} &= \left\{ (\overline{x(s)})_{s\in C_S(K)} \in \overline{X}_S(K) \;\middle|\; \begin{array}{r} \overline{\mathrm{con}_{s}{}^{h}_{K}(x(s))} = \overline{x({}^h s)}, \\ {}^\forall s \in C_S(K),\ {}^\forall h \in N_H(K) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

とおく. X がグリーン関手ならば, 各 $K \leq H \leq G$ に対して

$$\begin{aligned}
\overline{X}_{\otimes S}(H) &= \overline{X(H)} \otimes_k kC_S(H),\\
\overline{X}_{\otimes S}(K)^{N_H(K)} &= \left\{ \sum_{s\in C_S(K)} \overline{x(s)} \otimes s \in \overline{X}_{\otimes S}(K) \;\middle|\; \begin{array}{r} \overline{\mathrm{con}^h_K(x(s))} = \overline{x({}^h s)}, \\ {}^\forall s \in C_S(K) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

とおく. 特に $\overline{X}_{\otimes S}(H)$ は k 代数であり, $\overline{X}_S(H)$ と同型である.

命題 5.1 X を k 上 $\mathrm{St}_S(G)$ のマッキー束とし, $|G|$ が k における単数であるとする. このとき, 任意の $H \le G$ に対して $\mathcal{K}^{X_S}(H) = (\mathcal{K}^X)_S(H)$ が成り立ち, 写像

$$\overline{X_S(H)} \to \overline{X}_S(H), \quad \overline{(x(s))_{s\in S}} \mapsto (\overline{x(s)})_{s\in C_S(H)}$$

は k 同型である. 特に $\mathcal{C}(X_S) = \mathcal{C}(X)$, $\mathcal{P}(X_S) = \mathcal{P}(X)$ が成り立つ.

系 5.2 X を k 上 $\mathrm{St}_S(G)$ のマッキー束とし, $|G|$ は k における単数であるとする. このとき, 任意の $H \le G$ に対して次の写像は k 同型である:

$$X_S(H) \to \prod_{K\in \mathrm{Cl}(H)\cap\mathcal{P}(X)} \overline{X}_S(K)^{N_H(K)},$$
$$(x(s))_{s\in S} \mapsto \left(\left(\overline{\mathrm{res}^{H_s}_K(x(s))}\right)_{s\in C_S(K)}\right)_{K\in \mathrm{Cl}(H)\cap\mathcal{P}(X)}.$$

さらに, X がグリーン関手ならば, 任意の $H \le G$ に対して次の写像は k 代数同型である:

$$X_S(H) \to \prod_{K\in \mathrm{Cl}(H)\cap\mathcal{P}(X)} \overline{X}_{\otimes S}(K)^{N_H(K)},$$
$$(x(s))_{s\in S} \mapsto \left(\sum_{s\in C_S(K)} \overline{\mathrm{res}^{H_s}_K(x(s))} \otimes s\right)_{K\in \mathrm{Cl}(H)\cap\mathcal{P}(X)}.$$

系 5.3 X を k 上 $\mathrm{St}_S(G)$ のマッキー束とする. $|G|$ が k における単数ならば, 任意の $H \le G$ 及び任意の $(x(s))_{s\in S} \in X_S(H)$ に対して次が成り立つ:

$$(x(s))_{s\in S} = \sum_{K\in \mathrm{Cl}(H)\cap\mathcal{P}(X)} \frac{1}{|N_H(K)|} \sum_{U\le K} |U|\mu(U,K)\mathrm{ind}^H_U \circ \mathrm{res}^H_U((x(s))_{s\in S}).$$

6 捻れ群環の表現におけるブラウアの誘導定理

以後, 単に加群というときには, 左加群を意味する. $\alpha : G\times G \to \mathbb{C}^\times$ は標準化された 2 コサイクル, すなわち,

$$\alpha(rs,t)\alpha(r,s) = \alpha(r,st)\alpha(s,t), \quad {}^\forall r,\, s,\, t \in G$$

を満たし, s または t が単位元である限り $\alpha(s,t) = 1$ であるとする. 各 $H \le G$ に対して $\mathbb{C}^\alpha H$ により, 基底が $\{\overline{s}\}_{s\in H}$ で与えられ, 積が $\overline{s}\,\overline{t} = \alpha(s,t)\overline{st}$, ${}^\forall s,\, t \in H$ で与えられる半単純 $\mathbb{C}$ 代数を表し, それを捻れ群環と呼ぶ ([21] 参照). 各 $H \le G$ に対して $R_\alpha(H) := R(\mathbb{C}^\alpha H)$ を有限生成 $\mathbb{C}^\alpha H$ 加群の同型類の $\mathbb{Z}$ 線形結合からなり, 直和を加法とする加法群とする. $R_\alpha = (R_\alpha, \mathrm{con}, \mathrm{res}, \mathrm{ind})$ により, 通常の共役, 制限, 及び誘導写像をもつマッキー関手を表し ([3] 参照), これを $\mathbb{C}^\alpha G$ 表現関手と呼ぶ. 次の補題を準備する ([5, Example 9.7], [33, Lemma 8.2] 参照) :

補題 6.1 ([34]) $U \trianglelefteq K \leq G$ とし, K/U は巡回群であるとする. N を $\mathbb{C}$ 上 1 次元 $\mathbb{C}^\alpha U$ 加群とし, 任意の $r \in K$ に対して N は $\mathrm{con}_U^r(N)$ に同型であるとする. このとき, M が有限生成既約 $\mathbb{C}^\alpha K$ 加群であって, N が $\mathrm{res}_U^K(M)$ の組成因子ならば, N は $\mathrm{res}_U^K(M)$ に同型である.

各 $H \leq G$ に対して $\mathrm{Irr}_\alpha(H)$ を既約 $\mathbb{C}^\alpha H$ 加群の同型類全体の集合とし, $\mathrm{Lin}_\alpha(H)$ を $\mathbb{C}$ 上 1 次元 $\mathbb{C}^\alpha H$ 加群の同型類全体の集合とする. 2 節で定義した Ω^M は, 集合の族 $M(H) := \mathrm{Lin}_\alpha(H)$, $H \leq G$ に対してもマッキー関手として定義される. 加法的準同型の族 $\lambda_H^\alpha : R_\alpha(H) \to \mathbb{Z}\mathrm{Lin}_\alpha(H)$, $H \leq G$ を

$$\lambda_H^\alpha(\chi) = \begin{cases} \chi, & \chi \in \mathrm{Lin}_\alpha(H) \text{ の場合}, \\ 0, & \chi \in \mathrm{Irr}_\alpha(H) - \mathrm{Lin}_\alpha(H) \text{ の場合} \end{cases}$$

により定義する. $H \leq G$ とする. マッキー関手 R_α の誘導写像は, 加法的写像

$$\Theta_H : \Omega^M(H) \to R_\alpha(H), \quad [H/K, \nu] \mapsto \mathrm{ind}_K^H(\nu), \quad {}^\forall K \leq H,\ {}^\forall \nu \in \mathrm{Lin}_\alpha(K)$$

を引き起こす. このとき, $\mathcal{C}(R_\alpha)$ が G の巡回部分群の集合であること ([34] 参照) 及び補題 6.1 から, 加法的写像

$$\Psi_H : R_\alpha(H) \to \Omega^M(H), \quad \chi \mapsto \sum_{(U,\tau)\in\mathfrak{R}(H;M)} m_\tau^\alpha(\chi)[U,\tau], \quad {}^\forall \chi \in R_\alpha(H)$$

が存在して $\Theta_H \circ \Psi_H = \mathrm{id}_{R_\alpha(H)}$ が成り立つ ([4, 5, 34] 参照). ただし

$$m_\tau^\alpha(\chi) = \frac{1}{|W_H(U,\tau)|} \sum_{(K,\nu)\in\mathfrak{S}(H;M)_{\geq(U,\tau)}} \mu(U,K)\delta_{\lambda_K^\alpha \circ \mathrm{res}_K^H(\chi),\nu},$$

$$\mathfrak{S}(H;M)_{\geq(U,\tau)} = \{(K,\nu) \in \mathfrak{S}(H;M) \mid U \leq K, \quad \nu|_U = \tau\}$$

である. 特に, ブラウアの誘導定理の一般化を得る.

命題 6.2 ([34]) 上記の記号の下で, 次が成り立つ:

$$\chi = \sum_{(U,\tau)\in\mathfrak{R}(G;M)} m_\tau^\alpha(\chi)\mathrm{ind}_U^G(\tau), \quad \chi \in R_\alpha(G).$$

この結果は次節定義する有限群の twisted quantum double の表現における誘導定理に拡張される ([34] 参照).

7 有限群の twisted quantum double の表現における誘導定理

$(\mathbb{C}G)^*$ を群環 $\mathbb{C}G$ から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$ 線形写像全体とする. $f_1, f_2 \in (\mathbb{C}G)^*$ に対して $(c_1f_1+c_2f_2)(g) = c_1f_1(g)+c_2f_2(g)$, $(f_1f_2)(g) = f_1(g)f_2(g)$, ${}^\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, ${}^\forall g \in G$

と定め, $(\mathbb{C}G)^*$ を $\mathbb{C}$ 代数と考える. 集合 $\{\phi_s \in (\mathbb{C}G)^* \mid s \in G\}$, ここで $s \neq g \in G$ の場合に $\phi_s(g) = 0$ 及び $\phi_s(s) = 1$, は $(\mathbb{C}G)^*$ の $\mathbb{C}$ 基底を成す.

$\omega : G \times G \times G \to \mathbb{C}^\times$ は標準化された 3 コサイクル, すなわち,

$$\omega(g, r, s)\omega(g, rs, t)\omega(r, s, t) = \omega(gr, s, t)\omega(g, r, st), \quad {}^\forall g,\ r,\ s,\ t \in G$$

を満たし, g, r あるいは s が単位元である限り $\omega(g, r, s) = 1$ であるとする. ω に関する G の twisted quantum double $D^\omega(G)$ は $\mathbb{C}$ 空間 $(\mathbb{C}G)^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}G$ において

$$\begin{array}{ll} \text{積} & (\phi_s \otimes g)(\phi_t \otimes r) = \theta_s(g, r)\phi_s\phi_{{}^g t} \otimes gr, \\ \text{余積写像} & \Delta(\phi_r \otimes g) = \displaystyle\sum_{s,\, t \in G,\, st = r} \gamma_g(s, t)(\phi_s \otimes g) \otimes (\phi_t \otimes g), \end{array}$$

ここで

$$\theta_s(g, r) = \frac{\omega(s, g, r)\omega(g, r, {}^{(gr)^{-1}}s)}{\omega(g, {}^{g^{-1}}s, r)}, \quad \gamma_s(g, r) = \frac{\omega(g, r, s)\omega(s, {}^{s^{-1}}g, {}^{s^{-1}}r)}{\omega(g, s, {}^{s^{-1}}r)},$$

を与えて定義される準三角準ホップ代数である ([12, 22, 25, 38] 参照).

$H \leq G$ とし, $D^\omega(G)$ の部分代数 $D^\omega_G(H)$ を

$$D^\omega_G(H) = \sum_{s \in G,\, h \in H} \mathbb{C}\phi_s \otimes h$$

により定義する. 各 $h \in H$ は $\sum_{s \in G} \phi_s \otimes h \in D^\omega_G(H)$ と同一視され, $(\mathbb{C}G)^*$ は $D^\omega_G(H)$ の部分代数 $(\mathbb{C}G)^* \otimes \epsilon$ と同一視される. $RD^\omega_G(H) := R(D^\omega_G(H))$ を有限生成 $D^\omega_G(H)$ 加群の同型類の $\mathbb{Z}$ 線形結合からなり, 直和を加法とする加法群とする. $RD^\omega_G = (RD^\omega_G, \mathrm{Dcon}, \mathrm{Dres}, \mathrm{Dind})$ により, 通常の共役, 制限, 及び誘導写像をもつマッキー関手を表し ([3] 参照), これを $D^\omega(G)$ 表現関手と呼ぶ.

$H \leq G$, $s \in G$ とする. g, r, $t \in H_s$ ならば

$$\theta_s(g, r) = \gamma_s(g, r) = \frac{\omega(s, g, r)\omega(g, r, s)}{\omega(g, s, r)}, \quad \theta_s(tg, r)\theta_s(t, g) = \theta_s(t, gr)\theta_s(g, r)$$

が成り立つ. このように

$$\theta_s : H_s \times H_s \to \mathbb{C}^\times, \quad (g, r) \mapsto \theta_s(g, r)$$

は標準化された 2 コサイクルである.

G^c を G が共役 ${}^r s$, ここで r, $s \in G$, により作用する G モノイド G とし, $\overline{H \backslash G^c}$ を G^c における H 軌道の完全代表系とする.

各 $s \in G^c$ に対して $D^\omega_G(H)$ の両側イデアル $D^\omega_s(H)$ を

$$D^\omega_s(H) = \sum_{rH_s \in H/H_s} \sum_{h \in H} \mathbb{C}\phi_{{}^r s} \otimes h$$

により定義する．$D_G^\omega(H)$ は $D_s^\omega(H)$, $s \in \overline{H\backslash G^c}$ の直和で表され, 任意の $D_G^\omega(H)$ 加群 M は部分加群 $D_s^\omega(H)M$, $s \in \overline{H\backslash G^c}$ の直和で表される．任意の $D_s^\omega(H)$ 加群, $s \in G^c$, は $D_G^\omega(H)$ 加群とみなされる．

$s \in G^c$ とし, $D_s^\omega(H)$ の左イデアル $E_s^\omega(H)$ を

$$E_s^\omega(H) = \sum_{h \in H} \mathbb{C}\phi_{{}^h s} \otimes h$$

により定義する．捻れ群環 $\mathbb{C}^{\theta_s}H_s$ を $E_s^\omega(H)$ の部分空間とみなし, $\overline{h} \in \mathbb{C}^{\theta_s}H_s$, $h \in H_s$ を $\phi_s \otimes h \in E_s^\omega(H)$ と同一視する．このとき, $E_s^\omega(H)$ は右 $\mathbb{C}^{\theta_s}H_s$ 加群と考えられる．また, $D_G^\omega(H)$ 加群 M に対して $\phi_s M := \{\phi_s x \mid x \in M\}$ を左 $\mathbb{C}^{\theta_s}H_s$ 加群と考える．準備として, いくつか補題を述べる．

補題 7.1 ([34]) $H \leq G$, $s \in G^c$ とする．有限生成 $\mathbb{C}^{\theta_s}H_s$ 加群の圏 $\mathbb{C}^{\theta_s}H_s$-**mod** と有限生成 $D_s^\omega(H)$ 加群の圏 $D_s^\omega(H)$-**mod** は, 次の関手により圏同値となる:

$$\zeta_{H,s}^1 : \mathbb{C}^{\theta_s}H_s\text{-}\mathbf{mod} \to D_s^\omega(H)\text{-}\mathbf{mod}, \quad N \mapsto E_s^\omega(H) \otimes_{\mathbb{C}^{\theta_s}H_s} N,$$

$$\zeta_{H,s}^2 : D_s^\omega(H)\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbb{C}^{\theta_s}H_s\text{-}\mathbf{mod}, \quad M \mapsto \phi_s M.$$

以下, 補題 7.1 における記号を用いる．$s \in G^c$, $g \in G$ とする．$H \leq G_s$ のとき, 任意の有限生成 $\mathbb{C}^{\theta_s}H$ 加群 N に対して ${\mathrm{con}_s}_H^g(N) \in \mathbb{C}^{\theta_{{}^g s}}{}^gH$ を

$$\begin{aligned} {\mathrm{con}_s}_H^g(N) &= \zeta_{{}^gH,\, {}^g s}^2 \circ \mathrm{Dcon}_H^g \circ \zeta_{H,s}^1(N) \\ &= (\phi_{{}^g s} \otimes g) \otimes_{D_G^\omega(H)} (E_s^\omega(H) \otimes_{\mathbb{C}^{\theta_s}H} N), \end{aligned}$$

ここで $\mathrm{Dcon}_H^g \circ \zeta_{H,s}^1(N)$ は $D_{{}^g s}^\omega({}^gH)$ 加群と考えている, により定義する．

補題 7.2 ([34]) $H \leq G$, $s \in G^c$, $h \in H$ とする．(i) 任意の有限生成 $\mathbb{C}^{\theta_s}H_s$ 加群 N に対して $D_G^\omega(H)$ 加群として次が成り立つ:

$$\zeta_{H,s}^1(N) \cong \zeta_{H,\, {}^h s}^1 \circ {\mathrm{con}_s}_{H_s}^h(N).$$

(ii) 任意の有限生成 $D_G^\omega(H)$ 加群 M に対して $\mathbb{C}^{\theta_{{}^h s}}H_{{}^h s}$ 加群として次が成り立つ:

$$\phi_{{}^h s} M \cong {\mathrm{con}_s}_{H_s}^h(\phi_s M).$$

加法的写像の族 ${\mathrm{con}_s}_H^g : R(\mathbb{C}^{\theta_s}H) \to R(\mathbb{C}^{\theta_{{}^g s}}{}^gH)$, $s \in G^c$, $H \leq G_s$, $g \in G$ を

$${\mathrm{con}_s}_H^g([N]) = [{\mathrm{con}_s}_H^g(N)] = [\zeta_{{}^gH,\, {}^g s}^2 \circ \mathrm{Dcon}_H^g \circ \zeta_{H,s}^1(N)], \quad N \in \mathbb{C}^{\theta_s}H\text{-}\mathbf{mod},$$

ここで $[N]$ は N を含む $\mathbb{C}^{\theta_s}H$ 加群の同型類, により定め, 斜共役写像と呼ぶ．

補題 7.3 ([34]) マッキー関手の集まり $R_s^\theta := R_{\theta_s} = (R_{\theta_s}, \mathrm{con}, \mathrm{res}, \mathrm{ind})$, $s \in G^c$ と斜共役写像 ${\mathrm{con}_s}_H^g : R(\mathbb{C}^{\theta_s}H) \to R(\mathbb{C}^{\theta_{{}^g s}}{}^gH)$, $s \in G^c$, $H \leq G_s$, $g \in G$ は $\mathbb{Z}$ 上 $\mathrm{St}_{G^c}(G)$ のマッキー束 R^θ を定める．

各 $H \leq G$ に対して有限生成 $D^\omega_G(H)$ 加群 M を含む $D^\omega_G(H)$ 加群の同型類を $[M]$ で表す. 補題 7.1, 7.2 より, 各 $H \leq G$ に対して次の加法的同型が存在する:

$$\Gamma_H : RD^\omega_G(H) \to R^\theta_{G^c}(H), \quad [M] \mapsto ([\phi_s M])_{s\in G^c} = ([\zeta^2_{H,s}(D^\omega_s(H)M)])_{s\in G^c},$$

$$\Gamma'_H : R^\theta_{G^c}(H) \to RD^\omega_G(H), \quad ([N(s)])_{s\in G^c} \mapsto \sum_{s\in \overline{H\backslash G^c}} [\zeta^1_{H,s}(N(s))].$$

定理 7.4 ([34]) マッキー関手 RD^ω_G は $R^\theta_{G^c}$ と同型である. 実際, 加法的同型の族 $\Gamma_H : RD^\omega_G(H) \to R^\theta_{G^c}(H)$, $H \leq G$ は同型 $\Gamma : RD^\omega_G \to R^\theta_{G^c}$ を定める.

ω が自明, すなわち, $\omega(g,r,s) = 1$, $^\forall g, r, s \in G$ ならば, $D(G) = D^\omega(G)$, $D_G(H) = D^\omega_G(H)$, ここで $H \leq G$, 及び $RD_G = RD^\omega_G$ とおく. $\mathbb{C}$ 代数 $D(G)$ は G の quantum double と呼ばれる ([12, 24, 37] 参照). 各 $H \leq G$ に対して $R(D_G(H))$ は有限生成 $D_G(H)$ 加群の同型類の $\mathbb{Z}$ 線形結合からなり, 直和を加法, テンソル積を乗法とする環である. さらに, マッキー関手 RD_G についてフロベニウス公理が成り立ち, RD_G はグリーン関手である ([37, Section 5] 参照).

$a(G)$ を $\mathbb{C}G$ の表現環, すなわち, 有限生成 $\mathbb{C}G$ 加群の同型類の $\mathbb{Z}$ 線形結合からなり, 直和を加法, テンソル積を乗法とする可換環とする ([10, §80D] 参照). $\mathbb{Z}$ 上 G のグリーン関手 $a = (a, \mathrm{con}, \mathrm{res}, \mathrm{ind})$ を通常の共役, 制限, 及び誘導写像をもつ環の族 $a(H)$, $H \leq G$ として定め, $\mathbb{C}G$ 表現環関手と呼ぶ.

次の定理 7.4 の系を得る ([30, Theorem 5.5] 参照).

系 7.5 ([34]) グリーン関手 RD_G は a_{G^c} と同型である. 実際, 加法的同型の族 $\Gamma_H : RD_G(H) \to a_{G^c}(H)$, $H \leq G$ は環同型の族であり, グリーン関手の同型 $\Gamma : RD_G \to a_{G^c}$ を定める.

注意 7.6 例 2.1 の記号の下で $S = G^c$ とし, $H \leq G$ とする. 斜 G 集合 $(G/H, s)$ の $\mathbb{C}$ スパン $\langle (G/H, s)\rangle_{\mathbb{C}}$ は

$$(\phi_t \otimes g)(rH, s) = \delta_{t\,{}^{gr}s}(grH, s), \quad ^\forall g, r, t \in G$$

により $D(G)$ 加群であり ([39, p. 18] 参照), G_s 集合 G_s/H の $\mathbb{C}$ スパン $\langle G_s/H\rangle_{\mathbb{C}}$ は自然に $\mathbb{C}G_s$ 加群の構造をもつ. ω が自明であるとき,

$$\zeta^1(\langle G_s/H\rangle_{\mathbb{C}}) = \left(\sum_{r\in G} \mathbb{C}\phi_{{}^r s} \otimes r\right) \otimes_{\mathbb{C}G_s} \langle G_s/H\rangle_{\mathbb{C}}$$

であり, 次の写像は $D(G)$ 加群同型である:

$$\zeta^1(\langle G_s/H\rangle_{\mathbb{C}}) \to \langle (G/H, s)\rangle_{\mathbb{C}}, \quad (\phi_{{}^r s} \otimes r) \otimes H \mapsto (rH, s).$$

グリーン関手の同型 $\Xi : \Omega_{G^c} \to a_{G^c}$ を環同型の族

$$\Xi_K : \Omega_{G^c}(K) \to a_{G^c}(K), \quad (([V(t)])_{t\in G^c}) \mapsto ([\langle V(t)\rangle_{\mathbb{C}}])_{t\in G^c}, \quad K \leq G,$$

ここで $V(t)$ は K_t 集合で $\langle V(t)\rangle_{\mathbb{C}}$ は $V(t)$ の $\mathbb{C}$ スパン, として定める. このときグリーン関手の同型 $\Theta : \mathrm{C}\Omega(-,G^c) \to \Omega_{G^c}$ が存在して ([31, 34] 参照), 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{C}\Omega(-,G^c) & \xrightarrow{\Gamma^{-1}\circ\Xi\circ\Theta} & RD_G \\ \Theta\big\downarrow & & \big\downarrow\Gamma \\ \Omega_{G^c} & \xrightarrow[\Xi]{} & a_{G^c} \end{array}$$

について $\Gamma_G^{-1} \circ \Xi_G \circ \Theta_G([G/H,s]) = [\langle (G/H,s)\rangle_{\mathbb{C}}]$ を得る.

もう 1 つの定理 7.4 の系を得る ([37, Theorem 5.5] 参照).

系 7.7 ([34]) 次の写像は $\mathbb{Q}$ 同型である:

$$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} R(D^{\omega}(G)) \to \prod_{H\in \mathrm{Cl}(G,Cyc)} \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} \left(\prod_{s\in C_G(H)} \overline{R(\mathbb{C}^{\theta_s}H)}\right)^{N_G(H)},$$
$$[M] \mapsto \left(\left(\overline{\mathrm{res}_H^{G_s}(\phi_s M)}\right)_{s\in C_G(H)}\right)_{H\in\mathrm{Cl}(G,Cyc)},$$

ここで $\mathrm{Cl}(G,Cyc)$ は G の非共役な巡回部分群の集まりで最大なものを表す. さらに, 次の写像は $\mathbb{Q}$ 代数同型である:

$$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} R(D(G)) \to \prod_{H\in \mathrm{Cl}(G,Cyc)} \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} \left(\overline{a(H)}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}C_G(H)\right)^{N_G(H)},$$
$$[M] \mapsto \left(\sum_{s\in C_G(H)} \overline{\mathrm{res}_H^{G_s}(\phi_s M)}\otimes s\right)_{H\in\mathrm{Cl}(G,Cyc)}.$$

アルティン誘導定理の一般化を述べる ([28, Theorem 4.1] 参照).

系 7.8 ([34]) 任意の有限生成 $D^{\omega}(G)$ 加群 M に対して次が成り立つ:

$$[M] = \sum_{H\in\mathrm{Cl}(G,Cyc)} \frac{1}{|N_G(H)|}\sum_{K\le H} |K|\mu(K,H)[D^{\omega}(G)\otimes_{D^{\omega}_G(K)} (M|_{D^{\omega}_G(K)})].$$

注意 7.9 $\mathrm{conj}(G) = \overline{G\backslash G^c}$ とおく. (i) 次の写像は $\mathbb{C}$ 同型である:

$$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}} R^{\theta}_{G^c}(G) \to \prod_{s\in\mathrm{conj}(G)} Z(\mathbb{C}^{\theta_s}G_s), \quad ([M_s])_{s\in G^c} \mapsto \left(\sum_{g\in G_s} \mathrm{Tr}(\overline{s}, M_g)\overline{g}\right)_{s\in\mathrm{conj}(G)}.$$

(ii) 次の写像は $\mathbb{C}$ 代数同型である:

$$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}} R(D^{\omega}(G)) \to \prod_{s\in\mathrm{conj}(G)} Z(\mathbb{C}^{\theta_s}G_s), \quad [M] \mapsto \left(\sum_{g\in G_s} \mathrm{Tr}(\overline{s}, \phi_g M)\overline{g}\right)_{s\in\mathrm{conj}(G)}.$$

これは [38, Theorem 2.2] であり, [37, p. 316] を一般化した ([23, 2.2(g)] 参照).

8 単項バーンサイド環の単数群

まず, バーンサイド環 $\Omega(G)$ の単数群 $\Omega(G)^\times$ に関する基本的な事柄を述べる. $A=\{\epsilon\}$ の場合の 3 節の議論から, $\Omega(G)$ を $(\Omega(G) \xhookrightarrow{\varphi})\widetilde{\Omega}(G)=\prod_{H\in \mathrm{Cl}(G)}\mathbb{Z}$ の部分環とみなすとき, $\Omega(G)^\times$ は $\widetilde{\Omega}(G)^\times=\prod_{H\in \mathrm{Cl}(G)}\langle -1\rangle$ に埋め込まれ, 基本アーベル 2 群であることが分かる ([14, Proposition 3.1] 参照). よって $x\in\Omega(G)$ が単数であるための必要十分条件は $([G/G]\pm x)/2$ が $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\Omega(G)$ のべき等元となることである. 例えば $H\le G$ かつ $|G:H|=2$ ならば $([G/H])^2=2[G/H]$ であり, $[G/G]-[G/H]\in\Omega(G)^\times$ となる. G が奇数位数ならば, 式 (I) より $\Omega(G)^\times$ は $([G/G]\pm x)/2$ が $\Omega(G)$ のべき等元である元 x から成っており, $|\Omega(G)^\times|$ は $\Omega(G)$ のべき等元の個数に一致する. 一方, G が可解であるための必要十分条件は $\Omega(G)$ のべき等元が 0 と $[G/G]$ に限ることである ([13] 参照). よって, ファイト–トンプソンの定理 "奇数位数の群は可解である" と命題 "G が奇数位数ならば $\Omega(G)^\times=\{\pm[G/G]\}$ である" は同値である. $\Omega(G)^\times$ に関する結果は多数あるが, 最後に, そのうちの幾つかと単項バーンサイド環の単数群に関する結果を述べる.

例 8.1 有限 G ポセット P の被約レフシェッツ不変量 $\widetilde{\Lambda}_P$ とは次で定義される $\Omega(G)$ の元のことをいう: $\widetilde{\Lambda}_P=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i[Sd_i(P)]-[G/G]$, ここで $Sd_i(P)$ は $i+1$ 個の P の元から成る鎖 $x_0\le x_1\le\cdots\le x_i$ 全体の集合である. X を G 集合とし, $\overline{P}(X)$ を X の部分集合から成る G ポセットとする. $P(X)=\overline{P}(X)-\{\emptyset, X\}$ とおくとき, 任意の $K\in \mathrm{Cl}(G)$ に対して $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i|Sd_i(P(X)^K)|-1=(-1)^{|K\backslash X|}$, ここで $P(X)^K$ は K 固定点の集合及び $K\backslash X$ は X における K 軌道の集合, が成り立つ. (これは $P(X)^K$ の被約オイラー–ポアンカレ標数と呼ばれる.) これより $\varphi(\widetilde{\Lambda}_{P(X)})=((-1)^{|K\backslash X|})_{K\in\mathrm{Cl}(G)}$ が得られ, $\widetilde{\Lambda}_{P(X)}\in\Omega(G)^\times$ となる ([35] 参照).

定理 8.2 ([26]) G がアーベル群ならば次が成り立つ:

$$\Omega(G)^\times=\langle -[G/G],\, [G/G]-[G/H]\mid H\le G,\quad |G:H|=2\rangle.$$

定理 8.3 ([42]) $\widetilde{\Omega}(G)^\times\cap \mathrm{Im}\varphi$ は, 任意の $U\le G$ に対して写像 $gU\mapsto x_U x_{\langle g\rangle U}$, ${}^{\forall}g\in N_G(U)$ が $W_G(U):=N_G(U)/U$ の指標である元 $(x_H)_{H\in\mathrm{Cl}(G)}$ から成る.

定理 8.4 G が有限アーベル群 A の作用群であるとする. 単項バーンサイド環 $\Omega(G,A)$ の単数群は, 捻れ部分群 $\Omega(G,A)^\omega$ と有限生成自由アーベル群の直積である. さらに $\Omega(G,A)^\omega=\Omega(G)^\times\times H^1(G,A)\times\mathcal{F}$, ここで

$$\mathcal{F}=\left\{\frac{1}{|G|}\sum_{U\le G}|U|\cdot\left(\sum_{U\le H}\mu(U,H)[(G/U)_{\sigma_H|_U}]\right)\,\middle|\,(\sigma_H)_{H\le G}\in\mathcal{H},\quad \sigma_G=1_G\right\},$$

$$\mathcal{H}=\left\{(\sigma_H)_{H\le G}\in\mathcal{G}(G,A)\,\middle|\,\begin{array}{l}\sigma_H\in H^1(H,A),\quad {}^{\forall}H\le G,\\ \sigma_U=\mathrm{res}_U^{\langle g\rangle U}(\sigma_{\langle g\rangle U}),\quad {}^{\forall}U\le G,\ {}^{\forall}gU\in W_G(U)\end{array}\right\}.$$

特に G が可解群ならば $\Omega(G,A)^\omega=\Omega(G)^\times\times H^1(G,A)$ が成り立つ.

定理 8.3, 8.4 の証明には定理 3.4 (基本定理) が応用される.

参考文献

[1] M. Aigner, Combinatorial theory, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 234, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[2] L. Barker, Fibred permutation sets and the idempotents and units of monomial Burnside rings, J. Algebra **281** (2004), 535–566.

[3] P. R. Boisen, The representation theory of fully group-graded algebras, J. Algebra **151** (1992), 160–179.

[4] R. Boltje, A canonical Brauer induction formula, Astérisque, **181–182** (1990), 31–59.

[5] R. Boltje, A general theory of canonical induction formulae, J. Algebra **206** (1998), 293–343.

[6] S. Bouc, Hochschild constructions for Green functors, Comm. Algebra **31** (2003), 403–436.

[7] S. Bouc, The p-blocks of the Mackey algebra, Algebr. Represent. Theory **6** (2003), 515–543.

[8] R. Brauer, On Artin's L-series with general group characters, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 502–514.

[9] O. Coşkun, Mackey functors, induction from restriction functors and coinduction from transfer functors, J. Algebra **315** (2007), 224–248.

[10] C. W. Curtis and I. Reiner, Methods of Representation Theory, Vol. I, II, Wiley-Interscience, New York, 1981, 1987.

[11] T. tom Dieck, Transformation Groups and Representation Theory, Lecture Notes in Mathematics, 766, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[12] R. Dijkgraaf, V. Pasquier, and P. Roche, Quasi Hopf algebras, group cohomology and orbifold models, Nuclear Phys. B (Proc. Suppl.) 18B (1990), 60–72.

[13] A. W. M. Dress, A characterisation of solvable groups, Math. Z. **110** (1969), 213–217.

[14] A. Dress, Operations in representation rings, *in* "Representation theory of finite groups and related topics," (Madison, Wis., 1970), 39–45, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.

[15] A. W. M. Dress, The ring of monomial representations I. Structure theory, J. Algebra, **18** (1971), 137–157.

[16] A. W. M. Dress, Contributions to the theory of induced representations, *in* "Algebraic K-theory, II", Lecture Notes in Math., 342, 183–240, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[17] P. J. Freyd and D. N. Yetter, Braided compact closed categories with applications to low-dimensional topology, Adv. Math. **77** (1989), 156–182.

[18] D. Gluck, Idempotent formula for the Burnside algebra with applications to the p-subgroup simplicial complex, Illinois J. Math. **25** (1981), 63–67.

[19] J. A. Green, Axiomatic representation theory for finite groups, J. Pure Appl. Algebra **1** (1971), 41–77.

[20] E. T. Jacobson, The Brauer ring of a field, Illinois J. Math. **30** (1986), 479–510.

[21] G. Karpilovsky, Projective representations of finite groups, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 94, Marcel Dekker, Inc., New York, 1985.

[22] C. Kassel, Quantum groups, Springer-Verlag, New York, 1995.

[23] G. Lusztig, Leading coefficients of character values of Hecke algebras, The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986), 235–262, Proc. Sympos. Pure Math., 47, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[24] G. Mason, The quantum double of a finite group and its role in conformal field theory, *in* "Groups '93 Galway/St. Andrews, Vol. 2," London Math. Soc. Lecture Note Ser., 212, 405–417, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[25] G. Mason and Siu-Hung Ng, Group cohomology and gauge equivalence of some twisted quantum doubles. Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 3465–3509.

[26] T. Matsuda, On the unit groups of Burnside rings, Japan. J. Math. (N.S.) **8** (1982), 71–93.

[27] H. Nakaoka, Structure of the Brauer ring of a field extension, Illinois J. Math. **52** (2008), 261–277.

[28] F. Oda, Crossed Burnside rings and Bouc's construction of Green functors, J. Algebra **315** (2007), 18–30.

[29] F. Oda and T. Yoshida, Crossed Burnside rings I. The fundamental theorem, J. Algebra **236** (2001), 29–79.

[30] F. Oda and T. Yoshida, Crossed Burnside rings II: The Dress construction of a Green functor, J. Algebra **282** (2004), 58–82.

[31] F. Oda and T. Yoshida, The crossed Burnside rings III: The dress construction for a Tambara functor, J. Algebra **327** (2011), 31–49.

[32] L. Solomon, The Burnside algebra of a finite group, J. Combinatorial Theory **2** (1967), 603–615.

[33] Y. Takegahara, Multiple Burnside rings and Brauer induction formulae, J. Algebra **324** (2010), 1656–1686.

[34] Y. Takegahara, Induction formulae for Mackey functors with applications to representations of the twisted quantum double of a finite group, submitted.

[35] J. Thévenaz, Permutation representations arising from simplicial complexes, J. Combin. Theory Ser. A **46** (1987), 121–155.

[36] J. Thévenaz, Some remarks on G-functors and the Brauer morphism, J. Reine Angew. Math. **384** (1988), 24–56.

[37] S. J. Witherspoon, The representation ring of the quantum double of a finite group, J. Algebra **179** (1996), 305–329.

[38] S. J. Witherspoon, The representation ring of the twisted quantum double of a finite group, Canad. J. Math. **48** (1996), 1324–1338.

[39] D. N. Yetter, Topological quantum field theories associated to finite groups and crossed G-sets, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), 1–20.

[40] T. Yoshida, On G-functors (I): transfer theorems for cohomological G-functors, Hokkaido Math. J. **9** (1980), 222–257.

[41] T. Yoshida, Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem, J. Algebra **80** (1983), 90–105.

[42] T. Yoshida, On the unit groups of Burnside rings, J. Math. Soc. Japan **42** (1990), 31–64.

[43] T. Yoshida, The generalized Burnside ring of a finite group, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.