局所 ε-予想の (φ,Γ)-加群への一般化について

中村　健太郎

概 要

p を素数とする．本稿では, 加藤和也氏により提唱された $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の p-進表現に対する局所 ε-予想の Robba 環上の (φ,Γ)-加群への一般化について, 最近筆者が得た結果を解説する．

目 次

1　局所 ε-予想 **1**

1.1　局所 ε-予想 2

1.2　一般化岩澤主予想, 大域 ε-予想 11

2　Robba 環上の (φ,Γ)-加群に対する局所 ε-予想 **14**

2.1　Robba 環上の (φ,Γ)-加群に対する基本直線 15

2.2　Robba 環上の (φ,Γ)-加群に対する Bloch-加藤の exponential 射 18

2.3　Robba 環上の (φ,Γ)-加群に対する局所 ε-予想 21

1　局所 ε-予想

本稿は, 2013 年度の代数学シンポジウムで筆者が行った講演「p 進体の p-進ガロア表現と Robba 環上の (φ,Γ)-加群」(副題: A generalization of Kato's local ε-conjecture for (φ,Γ)-modules over the Robba ring) の報告集である．本稿では, 副題と同じ題名のプレプリント [Na13b] の結果について解説する．このプレプリントでは, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の p-進表現に対して定式化される局所 ε-予想と呼ばれる予想を, p-進表現の一般化である Robba 環上の (φ,Γ)-加群の場合へ拡張した．そこでまずは, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の p-進表現に対する局所 ε-予想, さらにはより一般に, 任意の素数 l に対して, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_l}/\mathbb{Q}_l)$ の p-進表現に対する局所 ε-予想の定式化を復習する．

所属: 北海道大学大学院理学研究院数学部門

e-mail adress:kentaro@math.sci.hokudai.ac.jp

1.1 局所 ε-予想

加藤和也氏は [Ka93b] において, 一般化岩澤主予想（the generalized Iwasawa main conjecture [Ka93a]) と呼ばれる予想とモチーフの L-関数の関数等式との両立性に関する, 大域 ε-予想と呼ばれる予想を提唱した. 本稿のタイトルにある局所 ε-予想とは, 大域 ε-予想の局所因子に関する予想である. 局所 ε-予想の定式化の詳細に入る前に, まずはこれらの予想の大まかな内容について, 簡単に解説したい.

まず, これらの予想は, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ または $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_l/\mathbb{Q}_l)$ の $\mathbb{Z}_p$-形式スキーム上の p-進表現の族と, 対応する L-関数の特殊値または局所定数との関係に関する予想である. ここで, $\mathbb{Z}_p$-形式スキーム上の p-進表現の族とは, 表現の係数 Λ が, $\mathbb{Z}_p[[T_1,\cdots,T_d]]$ などの $\mathbb{Z}_p$-形式代数であるようなガロア表現のことを意味している. このような族 T があると, 任意の連続環準同型 $x:\Lambda\to\overline{\mathbb{Q}}_p$ に対して, T を射 x で底変換することにより, 通常の p-進表現 V_x が得られる. このような p-進表現の族がある場合, 整数論的に意味のある表現に対応する点からなる $\mathrm{Spec}(\Lambda)(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ 内の部分集合が, 空間全体の中でどのような形で広がっているかを調べること, さらには, その部分集合の点と対応する V_x に対して定義される不変量が, 空間全体にまで p-進連続的に補間されるかどうかを調べることなどは, 基本的な問題である.

一般化岩澤主予想では, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の $\mathrm{Spf}(\Lambda)$ 上の p-進表現の族 T に対して, $\mathrm{Spec}(\Lambda)(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ の部分集合

$$\mathrm{Spec}(\Lambda)(\overline{\mathbb{Q}}_p)^T_{\mathrm{geom}}:=\{x\in\mathrm{Spec}(\Lambda)(\overline{\mathbb{Q}}_p)|V_x\ \text{は}\ \mathbb{Q}\ \text{上のモチーフの}\ p\text{-進実現}\ \}$$

を考える. ここで, V_x が $\mathbb{Q}$ 上のモチーフの p-進実現であるとは, V_x が, $\mathbb{Q}$ 上の代数多様体の p-進エタールコホモロジーを幾何的な操作で切り取った部分と同型であることを表す. 一般化岩澤主予想は, 各点 $x\in\mathrm{Spec}(\Lambda)(\overline{\mathbb{Q}}_p)^T_{\mathrm{geom}}$ に対応する V_x の L-関数の特殊値 (正確には, 特殊値にモチーフの Hodge-実現から定まる周期をかけたもの) の $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ 全体への p-進補間性に関する予想である. モチーフの p-進 L 関数とその (円分) セルマー群との一致を主張する古典的な岩澤主予想の一般化として, 一般化岩澤主予想では, 全ての T に対して (!), ゼータ元と呼ばれる T のガロアコホモロジーの標準的な基底によって, L-関数の特殊値が p-進補間されるということを主張する. そうすると, L-関数の関数等式の類似として, ゼータ元の関数等式, つまり T のゼータ元と $T^*(1)$ のゼータ元との関係式を考えることは自然な問題になるが, この関係式を正確に記述する公式が大域 ε-予想である. モチーフ M の L-関数の関数等式は, M とその Tate 双対 $M^*(1)$ の L 関数, 及び M の局所因子 (ε-因子) などを用いて記述されるので, 大域 ε-予想では, 局所因子の特殊値 (ε-定数) を p-進補間することが問題となる. この局所定数の p-進補間性を正確に定式化するものが局所 ε-予想である.

局所 ε-予想では, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_l}/\mathbb{Q}_l)$ の $\mathrm{Spf}(\Lambda)$ 上の p-進表現の族 T に対して, $\mathrm{Spec}(\Lambda)(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ の部分集合

$$\mathrm{Spec}(\Lambda)(\overline{\mathbb{Q}}_p)^T_{\mathrm{geom}}:=\begin{cases}\mathrm{Spec}(\Lambda)(\overline{\mathbb{Q}}_p) & (l\neq p)\\ \{x\in\mathrm{Spec}(\Lambda)(\overline{\mathbb{Q}}_p)|V_x\ \text{は de Rham 表現}\ \} & (l=p)\end{cases}$$

を考える. 局所 ε-予想は, 各点 $x\in\mathrm{Spec}(\Lambda)(\overline{\mathbb{Q}}_p)^T_{\mathrm{geom}}$ に対応する V_x の L-因子の特殊値 (L-定数) 及び ε-定数 ($l=p$ の場合はさらに Bloch-加藤 exponential の行列式など) の適当な組み合わせが, ε-元と呼ばれる T のガロアコホモロジーの標準的な基底によって p-進補間されるということを主張する予想である.

本稿の主題であるプレプリント [Na13b] の内容は, これらの予想の, リジッド解析的多様体上の p-進表現の族への一般化に関するものである. これとは異なる方向への一般化として, 非可換な係数を持つ p-進表現に対する一般化もある ([FK06]) が, これについては本稿では触れない.

大域 ε-予想と局所 ε 予想について書かれている論文 [Ka93b] は, 現在もプレプリントの状態であり, 一般の人には手に入れにくい状況にあると思われる. そこで, この第一章では, これらの二つの予想の定式化について, なるべく細部を省略しないで解説したい. §1.1 では, 局所 ε-予想を解説する. §1.2 では, 一般化岩澤主予想の定式化を簡単に復習した後, 大域 ε-予想を解説する.

1.1.1 用語 · 記号

位相群 G , 可換な位相環 R とする. 有限生成射影的 R-加群 T で, G が連続 R-線形に作用するものを G の R-表現と呼ぶ. 文脈により G がどの群か明らかと思われるときは, 単に R-表現と呼ぶ. G の R-表現 T に対して, G の R に値を持つ余鎖複体, つまり, $C^i(G,T) := 0$ $(i \leqq -1)$, $C^0(G,T) := T$, $C^i(G,T) := \{c : G^{\times i} \to T | c$ は連続写像 $\}$ $(i \geqq 1)$ で定義される R-加群の複体 (境界射の定義は略)) を $C^\bullet(G,T)$ と表す. 下に有界な R-加群の複体のなす導来圏を $D^b(R)$ と記す. 完全複体 (つまり, 十分大きな $i > 0$ に対して $P^{-i} = P^i = 0$ を満たし, 全ての i に対して P^i は有限生成射影的 R-加群となる R-加群の複体 $P^\bullet$ と擬同型 (quasi-isomorphism) な複体) からなる $D^b(R)$ の充満忠実部分圏を $D_{\mathrm{perf}}(R)$ と記す. 複体 $C^\bullet(G,T)$ を $D^b(R)$ の対象とみたものを $R\Gamma(G,T)$ と記す. 完全体 k に対して, その代数閉包を一つ固定し $\overline{k}$ と記し, k の絶対ガロア群を $G_k := \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ と記す. 群 G_k は, Krull 位相により pro-有限群, 特にコンパクト位相群となる. 素数 l に対して, $\mathbb{Z}_l$ を有理整数環 $\mathbb{Z}$ の l-進完備化, $\mathbb{Q}_l$ をその商体, $\mathbb{F}_l$ をその剰余体とする. $\mathbb{Q}_l$ の最大不分岐ガロア拡大を $\mathbb{Q}_l^{ur} (\subseteq \overline{\mathbb{Q}}_l)$ と記す. 局所類体論の相互写像を $\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_l} : \mathbb{Q}_l^\times \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}_l}^{ab}$ と記す. 本稿では, $\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_l}(l)$ が $G_{\mathbb{F}_l}$ の Frobenius 写像 $(x \mapsto x^l)$ の逆写像の持ち上げとなるように正規化されているものを取る.

1.1.2 局所基本直線 (local fundamental line)

局所 ε-予想とは, $G_{\mathbb{Q}_l}$ の p-進表現の族に対して, 族の部分集合の各点で定義される局所定数を, T のガロアコホモロジーの標準的な基底によって p-進補間する予想であった. ここで, 「標準的な基底」とは, T に関する様々な関手的な操作と両立するような基底であるということを意味する. この項では, このことを正確に述べるために必要な局所基本直線とよばれる対象を, ガロアコホモロジーの "行列式" を用いて定義する.

まずは, 第一章で扱う表現の係数 Λ の型をここで正確に述べておこう. この章では, 係数 Λ は以下の (for), (pt) いずれかの型の位相環を考える ((for) は formal scheme の略で, (pt) は point の略).

(for) Λ は Noether 半局所環で $\mathfrak{m}_\Lambda$-進完備, さらに $\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda$ は位数 p ベキの有限環となるもの (ここで, $\mathfrak{m}_\Lambda$ は Λ の Jacobson 根基とする).

(pt) Λ は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体の有限個の積.

環 Λ には, (for) の場合は $\mathfrak{m}_\Lambda$-進位相, (pt) の場合は p 進位相により位相環の構造が入っているとする.

以下, 記号 Λ, Λ' などは, 上の (for), (pt) いずれかの位相環を表すとする.

$G_{\mathbb{Q}_l}$ の任意の Λ-表現 T の対して, T の基本直線 $\Delta_\Lambda(T)$ は, T のガロアコホモロジーなどを用いて定義される二つの可逆 Λ-加群 $\Delta_{\Lambda,1}(T)$, $\Delta_{\Lambda,2}(T)$ の積

$$\Delta_\Lambda(T) := \Delta_{\Lambda,1}(T) \otimes_\Lambda \Delta_{\Lambda,2}(T)$$

として定義される可逆 Λ-加群のことである. 可逆 Λ-加群 $\Delta_{\Lambda,1}(T), \Delta_{\Lambda,2}(T)$ は以下のように定義される.

まず, ガロアコホモロジーまたはエタールコホモロジーの古典的な定理により, 任意の $G_{\mathbb{Q}_l}$ の Λ-表現 T に対して, $R\Gamma(G_{\mathbb{Q}_l}, T) \in D_{\mathrm{perf}}(R)$ となることが知られている. そこで, Knudsen-Mumford の行列式関手 [KM76] を用いて, 可逆 Λ-加群

$$\Delta_{\Lambda,1}(T) := \mathrm{det}_\Lambda R\Gamma(G_{\mathbb{Q}_l}, T)$$

を定義する. $R\Gamma(G_{\mathbb{Q}_l}, T)$ の i-次 ($i \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$) のコホモロジーを $\mathrm{H}^i(\mathbb{Q}_l, T)$ と記す.

注意 1.1. (1) 有限射影的 Λ-加群 P に対して, 可逆 Λ-加群 $\mathrm{det}_\Lambda P := \wedge^{\mathrm{rank}_\Lambda P} P$ を定義する. 行列式関手は, 有限生成射影的 Λ-加群からなる有限複体 $P^\bullet$ に対して可逆 Λ-加群 $\mathrm{det}_\Lambda P^\bullet := \otimes_{i\in\mathbb{Z}}(\mathrm{det}_\Lambda P^i)^{(-1)^i}$ を対応させる対応を, 自然な仕方で $D_{\mathrm{perf}}(\Lambda)$ に拡張したものと定義される. Knudsen-Mumford の行列式関手は, 正確には $\mathrm{det}_\Lambda P^\bullet$ に複体 $P^\bullet$ のオイラー標数の情報も込めた次数付き可逆 Λ-加群として定義される. 我々の予想を (-1) 倍のずれも込めてきちんと定式化するためには次数付き加群で考える必要があるのだが, 本稿では簡単のため次数付きは考えないことにし, (-1) 倍の曖昧性はあまり気にしないことにする. [Na13b] では (-1) 倍のずれも込めて予想を定式化している.

(2) Λ が (pt) の型の場合は, 自然な同型

$$\mathrm{det}_\Lambda R\Gamma(G_{\mathbb{Q}_l}, T) \xrightarrow{\sim} \otimes_{i=0}^2 \mathrm{det}_\Lambda \mathrm{H}^i(\mathbb{Q}_l, T)^{(-1)^i}$$

が存在する ($\mathrm{H}^i(\mathbb{Q}_l, T) = 0$ ($i \geqq 3$) である).

ガロアコホモロジーの底変換, 及び行列式関手の一般的な性質などにより, 可逆 Λ-加群 $\Delta_{\Lambda,1}(T)$ は次の性質 (bc), (exact) を持つ ((bc) は base change の略).

(bc) (for) または (pt) の型の環の間の任意の連続環準同型 $\Lambda \to \Lambda'$, $G_{\mathbb{Q}_l}$ の任意の Λ-表現 T に対して, Λ'-加群の自然な同型

$$\Delta_{\Lambda,1}(T) \otimes_\Lambda \Lambda' \xrightarrow{\sim} \Delta_{\Lambda',1}(T \otimes_\Lambda \Lambda')$$

が存在する.

(exact) $G_{\mathbb{Q}_l}$ の Λ-表現の任意の短完全系列

$$0 \to T_1 \to T_2 \to T_3 \to 0$$

に対して, Λ-加群の自然な同型

$$\Delta_{\Lambda,1}(T_2) \xrightarrow{\sim} \Delta_{\Lambda,1}(T_1) \otimes_\Lambda \Delta_{\Lambda,1}(T_3)$$

が存在する.

可逆 Λ-加群 $\Delta_{\Lambda,1}(T)$ は上述のように関手的にうまく振る舞うが, T の自己同型に関しては ($l=p$ の場合は) うまく振る舞わない. 例えば, $a \in \Lambda^\times$ 倍写像 $a : T \xrightarrow{\sim} T$ は $a^{\chi(T)} : \Delta_{\Lambda,1}(T) \xrightarrow{\sim} \Delta_{\Lambda,1}(T)$ ($\chi(T)$ は $R\Gamma(\mathbb{Q}_l, T)$ のオイラー標数) を誘導するが, ガロアコホモロジーのオイラーポアンカレ標数公式により, $l=p$ の場合これは $a^{-\mathrm{rank}_\Lambda T}$ 倍写像となり ($l \neq p$ の場合は恒等写像となる), $\Delta_{\Lambda,1}(T)$ だけでは T のみに依存する標準的な基底を定義することができない. このずれを解消するために, 次に定義する可逆 Λ-加群 $\Delta_{\Lambda,2}(T)$ が必要となる.

$\Delta_{\Lambda,2}(T)$ を定義するため, まずは以下を定義する. $W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ を $\overline{\mathbb{F}}_p$ の Witt 環とする. 連続環同型 $\varphi : W(\overline{\mathbb{F}}_p) \xrightarrow{\sim} W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ を, $\overline{\mathbb{F}}_p \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{F}}_p : x \mapsto x^p$ の唯一の持ち上げとする. Λ の最大コンパクト部分環 ((for) の場合は Λ で, (pt) の場合は各成分の整数環の直積) を Λ_0 と記す. 各 $a \in \Lambda_0^\times$ に対して, 可逆 Λ-加群 Λ_a を

$$\Lambda_a := \{x \in W(\overline{\mathbb{F}}_p)\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\Lambda_0 | (\varphi \otimes \mathrm{id}_{\Lambda_0})(x) = (1 \otimes a)x\} \otimes_{\Lambda_0} \Lambda$$

と定義する. $\sigma_l := \mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_l}(p) \in G_{\mathbb{Q}_l}^{ab}$ と定義する. $G_{\mathbb{Q}_l}$ の Λ-表現 T に対し, 階数 1 の Λ-表現 $\det_\Lambda T$ に対応する指標も同じ記号で $\det_\Lambda T : G_{\mathbb{Q}_l}^{ab} \to \Lambda_0^\times$ と表す. 以上の定義の下で,

$$a(T) := \det{}_\Lambda T(\sigma_l) \in \Lambda_0^\times$$

と定め,

$$\Delta_{\Lambda,2}(T) := \begin{cases} \Lambda_{a(T)} & (l \neq p) \\ \det_\Lambda T \otimes_\Lambda \Lambda_{a(T)} & (l = p) \end{cases}$$

と定義する.

$\Delta_{\Lambda,1}(T)$ と同様 $\Delta_{\Lambda,2}(T)$ も, 従って $\Delta_\Lambda(T) := \Delta_{\Lambda,1}(T) \otimes_\Lambda \Delta_{\Lambda,2}(T)$ も性質 (bc), (exact) を満たす. さらに, $a \in \Lambda^\times$ 倍写像は $\Delta_{\Lambda,2}(T)$ に $l=p$ の場合は $a^{\mathrm{rank}_\Lambda T}$ 倍写像 ($l \neq p$ の場合は恒等写像) を誘導するので, 上の注意により $\Delta_\Lambda(T)$ には恒等写像を誘導するようになる.

1.1.3 局所 ε-予想の定式化

基本直線 $\Delta_\Lambda(T)$ の (bc) の性質により, 各点 $x \in \mathrm{Spec}(\Lambda)(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ に対して自然な同型

$$\Delta_\Lambda(T) \otimes_{\Lambda,x} \overline{\mathbb{Q}}_p \xrightarrow{\sim} \Delta_{\overline{\mathbb{Q}}_p}(V_x)$$

が存在する. この同型によって, $\Delta_\Lambda(T)$ の各元 ε に対して $\Delta_{\overline{\mathbb{Q}}_p}(V_x)$ の元 $\varepsilon(x)$ が定まる. 局所 ε 予想は, この逆の対応, つまり各点 $x \in \mathrm{Spec}(\Lambda)(\overline{\mathbb{Q}}_p)^T_{\mathrm{geom}}$ に対して V_x の局所定数を用いて定義される基底

$$\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{\overline{\mathbb{Q}}_p,\xi}(V_x) \in \Delta_{\overline{\mathbb{Q}}_p}(V_x)$$

を実現するような $\Delta_\Lambda(T)$ の基底の存在に関する予想であり, さらにより強く, 全ての T に関して統一的にそのような基底が存在することまでも主張している. 基底 $\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{\overline{\mathbb{Q}}_p,\xi}(V_x) \in \Delta_{\overline{\mathbb{Q}}_p}(V_x)$ を定義するためには, 局所定数に関する基本事項, Bloch-加藤基本完全系列など復習しなければならないことが多いので, この基底の正確な定義は次項に回し, 本項ではこの基底の存在を仮定した上で局所 ε-予想を定式化する.

Λ を (pt) の型の環とする, $G_{\mathbb{Q}_l}$ の Λ-表現 T が幾何的であるということを, $l = p$ のときは de Rham 表現であること, $l \neq p$ のときは任意の Λ-表現であることと定義する. 正の整数 n に対して $\mu_n(\overline{\mathbb{Q}_p}) := \{x \in \overline{\mathbb{Q}}_p^\times | x^n = 1\}$ とし, 素数 l に対して $\Gamma(\overline{\mathbb{Q}}_p, \mathbb{Z}_l(1)) := \varprojlim_{n \geqq 0} \mu_{l^n}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ と定義する.

予想 1.2. (局所 ε-予想 *[Ka93b]* Conjecture 1.8) 素数 l を固定する. このとき, $\mathbb{Z}_l$ 上の基底 $\xi \in \Gamma(\overline{\mathbb{Q}}_p, \mathbb{Z}_l(1))$, (for) または (pt) の型の位相環 Λ, $G_{\mathbb{Q}_l}$ の Λ-表現 T からなる各三つ組み (ξ, Λ, T) に対して, 以下の 4 条件 (i), (ii), (iii), (iv) を満たす Λ 上の基底 (ε-元と呼ぶ)

$$\varepsilon_{\Lambda,\xi}(T) \in \Delta_\Lambda(T)$$

が存在する.

(i) 任意の連続環準同型 $\Lambda \to \Lambda'$, 及び $G_{\mathbb{Q}_l}$ の任意の Λ-表現 T に対して, (bc) による同型 $\Delta_\Lambda(T) \otimes_\Lambda \Lambda' \xrightarrow{\sim} \Delta_{\Lambda'}(T \otimes_\Lambda \Lambda')$ の下で, 等式

$$\varepsilon_{\Lambda,\xi}(T) \otimes 1 = \varepsilon_{\Lambda',\xi}(T \otimes_\Lambda \Lambda')$$

が成立する.

(ii) $G_{\mathbb{Q}_l}$ の Λ-表現の任意の短完全系列

$$0 \to T_1 \to T_2 \to T_3 \to 0$$

に対して, (exact) による同型 $\Delta_\Lambda(T_2) \xrightarrow{\sim} \Delta_\Lambda(T_1) \otimes_\Lambda \Delta_\Lambda(T_3)$ の下で, 等式

$$\varepsilon_{\Lambda,\xi}(T_2) = \varepsilon_{\Lambda,\xi}(T_1) \otimes \varepsilon_{\Lambda,\xi}(T_3)$$

が成立する.

(iii) 各三つ組み (ξ, Λ, T) と各 $c \in \mathbb{Z}_l^\times$ に対して, 等式

$$\varepsilon_{\Lambda,c\cdot\xi}(T) = \det{}_\Lambda T(\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_l}(c)) \cdot \varepsilon_{\Lambda,\xi}(T)$$

が成立する.

(iv) Λ は (pt) の型とし, T は幾何的とする. このとき等式

$$\varepsilon_{\Lambda,\xi}(T) = \varepsilon^{\mathrm{geom}}_{\Lambda,\xi}(T)$$

が成り立つ.

注意 **1.3.** 幾何的表現の定義からも想像されるように, この予想は, $l \neq p$ の場合よりも $l = p$ の場合のほうがはるかに難しく, さらに整数論的に重要な情報もより多く含んでいる. 実際に, $l \neq p$ の場合のこの予想は, 次項で復習する Deligne の ε-定数の理論を (for) の型の係数の表現に対してまで拡張することで, 安田正大氏によって既に証明されている ([Ya09]). これに対して, $l = p$ の場合は (筆者の知る限りでは) 次の特別な場合にしかまだ証明されていない. まず, 階数 1 の表現に対しては, 加藤和也氏本人により証明されている ([Ka93b] Theorem 4.1, [Ve13] も参照). また, クリスタリン表現の普遍円分捻りの場合には, Benois-Berger, Loeffler-Venjakob-Zerbes により証明されている ([BB08], [LVZ13]). いずれの証明でも, Coleman 準同型, 及びそれの一般化である Perrin-Riou exponential 射の理論, 特にこれらの射の明示的公式 (explicit reciprocity law) が本質的に用いられる. これらの射は, p-進 L-関数と密接に関係していることから, $l = p$ の場合の局所 ε-予想は, 局所 (岩澤) 主予想 (local main conjecture) と呼ばれることもある.

1.1.4 $\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{\Lambda,\xi}(T)$ の定義

この項では, (pt) の型の環 Λ, $G_{\mathbb{Q}_l}$ の幾何的な Λ-表現 T に対して, 局所 ε-予想を特徴付ける基底 $\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{\Lambda,\xi}(T) \in \Delta_\Lambda(T)$ の定義を解説する.

まずは, ($\mathbb{Q}_l$ の)Weil 群の表現に対する ε-定数について簡単に復習する. $\mathbb{Q}_l$ の Weil 群 $W_{\mathbb{Q}_l}$ とは, l-乗 Frobenius 写像 $\sigma_l : x \mapsto x^l$ で生成される $G_{\mathbb{F}_l}$ の部分群 $< \sigma_l >$ の, 自然な全射 $G_{\mathbb{Q}_l} \to G_{\mathbb{F}_l}$ による逆像として定義される部分群 $W_{\mathbb{Q}_l} \subseteq G_{\mathbb{Q}_l}$ のことであった. $G_{\mathbb{Q}_l}$ の惰性群を I_l とし, 同型 $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} < \sigma_l >: 1 \mapsto \sigma_l^{-1}$ を固定すると, 自然な完全系列

$$1 \to I_l \to W_{\mathbb{Q}_l} \xrightarrow{v_l} \mathbb{Z} \to 1$$

が得られる. $W_{\mathbb{Q}_l}$ には, I_l がその開部分群となるような唯一の位相群の構造が入る. 局所類体論により, 相互写像は, 位相群の同型 $\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_l} : \mathbb{Q}_l^\times \xrightarrow{\sim} W^{ab}_{\mathbb{Q}_l}$ を導く. 以下, この同型により, $\mathbb{Q}_l^\times$ の指標と $W^{ab}_{\mathbb{Q}_l}$ の指標を同一視する.

E を標数 0 の体で, さらに $\cup_{n \geqq 1} \mu_{l^n}(\overline{E})) \subseteq E$ と仮定する. E には離散位相によって位相体の構造を入れる. このとき, [De73] により, $W_{\mathbb{Q}_l}$ の各 E-表現 V に対して, ε-定数と呼ばれる定数 $\varepsilon(V, \psi, dx) \in E^\times$ を定義することが出来る. ここで, $\psi : \mathbb{Q}_l \to E^\times$ は非自明な連続加法指標, dx は $\mathbb{Q}_l$ の Haar 測度とする. 本稿では, (ψ, dx) として次のものだけを考える. まず, $\mathbb{Q}_l$ の Haar 測度は, $dx(\mathbb{Z}_l) = 1$ を満たすもののみを考える. 加法指標は, $\mathbb{Z}_l$-上の各基底 $\xi = (\xi_{l^n})_{n \geqq 0} \in \Gamma(\overline{E}, \mathbb{Z}_l(1))$ ($\xi_{l^n} \in \mu_{l^n}(\overline{E})$) から定まる加法指標 $\psi_\xi : \mathbb{Q}_l \to E^\times : 1/l^n \mapsto \xi_{l^n}$ を考える. このとき, 簡単のため $\varepsilon(V, dx, \psi_\xi) := \varepsilon(V, \xi)$ と記す. 定数 $\varepsilon(V, \xi)$ は, 次の性質を満たすことが知られている.

(1) E-表現の任意の短完全系列 $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ に対して, 等式

$$\varepsilon(V_2, \xi) = \varepsilon(V_1, \xi) \cdot \varepsilon(V_3, \xi)$$

が成り立つ.

(2) 任意の E-表現 V, 基底 $\xi \in \Gamma(\overline{E}, \mathbb{Z}_l(1))$, $c \in \mathbb{Z}_l^\times$ に対して, 等式

$$\varepsilon(V, c \cdot \xi) = \det_E V(\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_l}(c)) \cdot \varepsilon(V, \xi)$$

が成立する.

(3) 任意の E-表現 V に対して, 等式

$$\varepsilon(V,\xi)=\varepsilon(V^*(|x|),-\xi)$$

が成立する. ただし, V^* は V の E-双対とし, $V^*(|x|)$ は, V^* を指標 $|x|:W_{\mathbb{Q}_l}^{ab}\to E^\times:\sigma\mapsto l^{-v_l(\sigma)}$ で捻ったものとする.

(4) 任意の連続準同型 $\delta:W_{\mathbb{Q}_p}^{ab}\to E^\times$ に対して ($\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_l}:\mathbb{Q}_l^\times\xrightarrow{\sim}W_{\mathbb{Q}_l}^{ab}$ により $\delta:\mathbb{Q}_l^\times\to E^\times$ と同一視すると), 等式

$$\varepsilon(E(\delta),\xi)=\delta(l)^{n(\delta)}\sum_{i\in(\mathbb{Z}/l^{n(\delta)}\mathbb{Z})^\times}\delta(i)^{-1}\xi_{n(\delta)}^i$$

が成立する. ここで, $n(\delta)\in\mathbb{Z}_{\geqq 0}$ は, $\delta|_{\mathbb{Z}_l^\times\cap(1+l^n\mathbb{Z}_l)}$ が自明となる最小の $n\in\mathbb{Z}_{\geqq 0}$ とする.

以上で ε-定数の復習は終わりにし, 基底 $\varepsilon_{\Lambda,\xi}^{\mathrm{geom}}(T)$ の定義を解説する. 以下, 基底 $\xi\in\Gamma(\overline{\mathbb{Q}}_p,\mathbb{Z}_l(1))$ を固定する. 以下, 簡単のため, この項では Λ は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とする (一般の場合はその積として定義すればよい).

まずは, $l\neq p$ の場合の定義を解説する. T を $G_{\mathbb{Q}_l}$ の Λ-表現とする. 基底 $\varepsilon_{\Lambda,\xi}^{\mathrm{geom}}(T)\in\Delta_\Lambda(T)$ は, 以下に定義される二つの基底 $\theta_\Lambda(T)\in\Delta_{\Lambda,1}(T)$ と $\varepsilon_\Lambda(T,\xi)\in\Delta_{\Lambda,2}(T)$ の積

$$\varepsilon_{\Lambda,\xi}^{\mathrm{geom}}(T):=\theta_\Lambda(T)\otimes\varepsilon_\Lambda(T,\xi)$$

として定義される.

まず, 基底 $\varepsilon_\Lambda(T,\xi)\in\Delta_{\Lambda,2}(T)$ は以下のように定義する. T_{ss} を T の半単純化とする. Grothendieck の monodromy 定理により, T_{ss} への $G_{\mathbb{Q}_l}$-作用を $W_{\mathbb{Q}_l}$ に制限し (Λ に離散位相を入れ) たものは, $W_{\mathbb{Q}_l}$ の Λ-表現となる. そこで, $\Lambda\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ を体の積 $\Lambda\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})=\prod_{i=1}^d E_i$ に分解し, この分解に合わせて E_i-成分 $T_{ss}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})=\prod_{i=1}^d V_i$ に分解すると, 各 V_i は $W_{\mathbb{Q}_l}$ の E_i-表現となる. このとき, 各 ε-定数 $\varepsilon(V_i,\xi)\in E_i^\times$ の積として, T の ε-定数

$$\varepsilon_\Lambda(T,\xi):=(\varepsilon(V_i,\xi))_i\in\prod_{i=1}^d E_i^\times=(\Lambda\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p(\mu_{l^\infty}))^\times$$

を定義する. さらに, $\mathbb{Q}_p(\mu_{l^\infty})\hookrightarrow W(\overline{\mathbb{F}}_p)[1/p]$ であることと, $\varphi(\xi)=p\xi$ であることを用いれば, ε-定数の性質 (2) から, $\varepsilon_\Lambda(T,\xi)$ は Λ-加群 $\Lambda_{a(T)}=:\Delta_{\Lambda,2}(T)$ の基底となることが導かれる.

次に, 基底 $\theta_\Lambda(T)\in\Delta_{\Lambda,1}(T)$ を以下のようにして定義する. T の有限コホモロジーを

$$\mathrm{H}_f^1(\mathbb{Q}_l,T):=\mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_l,T)\to\mathrm{H}^1(I_l,T))$$

と定義し, $\mathrm{H}_{/f}^1(\mathbb{Q}_l,T):=\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_l,T)/\mathrm{H}_f^1(\mathbb{Q}_l,T)$ と記す. inflation-restriction sequence より, $\mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_l,T)\to\mathrm{H}^1(I_l,T))=\mathrm{H}^1(\mathbb{F}_l,\mathrm{H}^0(I_l,T))$ なので, 完全系列

$$0\to\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_l,T)\to\mathrm{H}^0(I_l,T)\xrightarrow{1-\sigma_l}\mathrm{H}^0(I_l,T)\to\mathrm{H}_f^1(\mathbb{Q}_l,T)\to 0$$

を得る. これにより, 自然な同型

$$\det_\Lambda \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_l,T) \ \otimes_\Lambda\ \det_\Lambda \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_l,T)^{-1} \ \ \overset{\sim}{\to}\ \ \det_\Lambda \mathrm{H}^0(I_l,T) \ \otimes_\Lambda\ \det_\Lambda \mathrm{H}^0(I_l,T)^{-1} \ \ \overset{\sim}{\to}\ \ \Lambda$$

を得る. ここで, 最後の同型は自然なペアリングによる同型とする. 次に, T の Tate 双対 $T^*(1) := T^*\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p(1)$ に対する同様な完全系列の双対を考えると, Tate 双対 $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_l,T^*(1))^* \overset{\sim}{\to} \mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_l,T)$ と Bloch-加藤双対 $\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_l,T^*(1))^* \overset{\sim}{\to} \mathrm{H}^1_{/f}(\mathbb{Q}_l,T)$([BK90]Proposition 3.8) より, 完全系列

$$0\to \mathrm{H}^1_{/f}(\mathbb{Q}_l,T)\to \mathrm{H}^0(I_l,T^*(1))^* \xrightarrow{1-\sigma_l^{-1}} \mathrm{H}^0(I_l,T^*(1))^*\to \mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_l,T)\to 0$$

を得る. これにより, 同様にして自然な同型

$$\begin{aligned}&\det_\Lambda \mathrm{H}^1_{/f}(\mathbb{Q}_l,T)^{-1}\otimes_\Lambda \det_\Lambda \mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_l,T)\\ &\qquad\qquad\qquad \overset{\sim}{\to} \det_\Lambda \mathrm{H}^0(I_l,T^*(1))\otimes_\Lambda \det_\Lambda \mathrm{H}^0(I_l,T^*(1))^{-1}\overset{\sim}{\to}\Lambda\end{aligned}$$

を得る. 以上の下で, 基底 $\theta_\Lambda(T)\in\Delta_{\Lambda,1}(T)$ を, 上の二つの同型の積として定まる同型

$$\Delta_{\Lambda,1}(T)\overset{\sim}{\to}\otimes_{i=0}^2 \det_\Lambda \mathrm{H}^i(\mathbb{Q}_l,T)^{(-1)^i}\overset{\sim}{\to}\Lambda$$

の $1\in\Lambda$ の逆像として定義する. $\theta_\Lambda(T)$ の定義には, T 及び $T^*(1)$ の L-定数 (局所 L-関数の $s=0$ での特殊値) が現れているので, 基底 $\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{\Lambda,\xi}(T)\in\Delta_\Lambda(T)$ は L 定数と ε-定数を組み合わせたものになっている.

次に, $l=p$ の場合の $\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{\Lambda,\xi}(T)\in\Delta_\Lambda(T)$ の定義を解説する. T は $G_{\mathbb{Q}_p}$ の de Rham 表現とする. $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}},\mathbf{B}_{\mathrm{st}},\mathbf{B}_{\mathrm{dR}},\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ を Fontaine の p-進周期環とする. 固定した基底 $\xi\in\Gamma(\overline{\mathbb{Q}}_p,\mathbb{Z}_p(1))$ を, p-乗写像による逆極限 $\xi\in\varprojlim_{n\geqq 0}\overline{\mathbb{Z}}_p\overset{\sim}{\to}\varprojlim_{n\geqq 0}\overline{\mathbb{Z}}_p/p$ の元とみなし, 元 $t_\xi:=\log([\xi])\in\mathbf{B}^{\varphi=p}_{\mathrm{cris}}\cap\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ を定義する. 各 $*\in\{\mathrm{cris},\mathrm{st},\mathrm{dR}\}$ に対して, $D_*(T):=(\mathbf{B}_*\otimes_{\mathbb{Q}_p}T)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$ と定義し, 各 $i\in\mathbb{Z}$ に対して, $D^i_{\mathrm{dR}}(T)=(t^i_\xi\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}T)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$ と定義する. T の接空間を $t(T):=D_{\mathrm{dR}}(T)/D^0_{\mathrm{dR}}(T)$ と定義する. 基底 $\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{\Lambda,\xi}(T)\in\Delta_\Lambda(T)$ は, 以下に定義される二つの基底 $\theta_\Lambda(T)\in\Delta_{\Lambda,1}(T)\otimes_\Lambda\det_\Lambda D_{\mathrm{dR}}(T)$ と $\varepsilon_{\mathrm{dR},\Lambda}(T,\xi)\in\det_\Lambda D_{\mathrm{dR}}(T)^{-1}\otimes_\Lambda\Delta_{\Lambda,2}(T)$ の積

$$\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{\Lambda,\xi}(T):=\theta_\Lambda(T)\otimes\varepsilon_{\mathrm{dR},\Lambda}(T,\xi)$$

として定義される.

まず, 基底 $\varepsilon_{\mathrm{dR},\Lambda}(T,\xi)\in\det_\Lambda D_{\mathrm{dR}}(T)^{-1}\otimes_\Lambda\Delta_{\Lambda,2}(T)$ は, 以下のように定義される. p-進局所 monodromy 定理 (Berger) により, $D_{\mathrm{pst}}(T):=\cup_K(\mathbf{B}_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}T)^{G_K}$(ここで, K は $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 内の $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大全体を動く) は階数 $r_T:=\dim_\Lambda T$ の自由 $\Lambda\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p^{ur}$-加群である. $D_{\mathrm{pst}}(T)$ は, $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ の Frobenius-作用 φ から誘導される φ-半線形な作用素 $\varphi: D_{\mathrm{pst}}(T)\overset{\sim}{\to}D_{\mathrm{pst}}(T)$, 及び $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ と T の $G_{\mathbb{Q}_p}$-作用から誘導される半線形連続な $G_{\mathbb{Q}_p}$-作用を持つ (係数 $\Lambda\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p^{ur}$ には離散位相を入れる). これらの作用を用いて, $D_{\mathrm{pst}}(T)$ に $W_{\mathbb{Q}_p}$ の $\Lambda\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p^{ur}$-表現の構造を, $w: W_{\mathbb{Q}_p}\to\mathrm{Aut}_{\Lambda\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p^{ur}}(D_{\mathrm{pst}}(T))$, $w(\sigma)(x):=\varphi^{v_p(\sigma)}(\sigma(x))$ $(\sigma\in W_{\mathbb{Q}_p}, x\in D_{\mathrm{pst}}(T))$ によって定める. そこで, $l\neq p$ のときと同様に, $\Lambda\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p^{ur}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})=\prod_{i=1}^d E_i$ と体の直積に分解し, $D_{\mathrm{pst}}(T)\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})=\prod_{i=1}^d V_i$ と E_i-成分に分解することにより, T の ε-定数

$$\varepsilon_\Lambda(T,\xi):=(\varepsilon(V_i,\xi))_i\in\prod_{i=1}^d E_i^\times=(\Lambda\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p^{ur}\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}))^\times$$

を定義する． ε-定数の性質 (2) より，この元は，$\mathrm{id}_\Lambda \otimes \varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})}$ の作用で不変となるから，$\varepsilon_\Lambda(T,\xi) \in (\Lambda \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}))^\times$ となる．T の Hodge-Tate 重みを $\{h_1, h_2, \cdots, h_{r_T}\}$(本稿では，$\mathbb{Q}_p(1)$ の Hodge-Tate 重みは 1 と定義する) とし，その和を $h := \sum_{i=1}^{r_T} h_i$ とおく．これらを用いて，射

$$\Delta_{\Lambda,2}(T) = \mathrm{det}_\Lambda T \otimes_\Lambda \Lambda_{a(T)} \to \mathrm{det}_\Lambda T \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} : x \mapsto \frac{1}{\varepsilon_\Lambda(T,\xi)\cdot(-t_\xi)^h} \cdot x$$

を定義すると，これは同型

$$\Delta_{\Lambda,2}(T) \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{dR}}(\mathrm{det}_\Lambda T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{det}_\Lambda D_{\mathrm{dR}}(T)$$

を誘導する ([Ka93b] Lemma 3.7)．基底

$$\varepsilon_{\mathrm{dR},\Lambda}(T,\xi) \in \mathrm{det}_\Lambda D_{\mathrm{dR}}(T)^{-1} \otimes_\Lambda \Delta_{\Lambda,2}(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Lambda(\Delta_{\Lambda,2}(T), \mathrm{det}_\Lambda D_{\mathrm{dR}}(T))$$

を，この同型に対応する元として定義する．

最後に，基底 $\theta_\Lambda(T) \in \Delta_\Lambda(T) \otimes_\Lambda \mathrm{det}_\Lambda D_{\mathrm{dR}}(T)$ の定義を解説する．Bloch-加藤の有限コホモロジーを $\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T) := \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} T))$ と定義し，$\mathrm{H}^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T) := \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, T)/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T)$ と記す．Bloch-加藤の基本完全系列 ([BK90] Proposition 1.17)

$$0 \to \mathbb{Q}_p \xrightarrow{x \mapsto x} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{x \mapsto ((1-\varphi)(x), \bar{x})} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \oplus \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \to 0$$

に T をテンソルして，それのコホモロジー長完全系列を取ることで，完全系列

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, T) \to D_{\mathrm{cris}}(T) \xrightarrow{x \mapsto ((1-\varphi)(x), \bar{x})} D_{\mathrm{cris}}(T) \oplus t(T) \to \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T) \to 0$$

を得る．ここで，境界射に現れる射 $t(T) \to \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T)$ は，Bloch-加藤 exponential 射と呼ばれ，$l = p$ の場合の局所 ε-予想において，きわめて重要な射である．この完全系列により，同型

$$\begin{aligned}&\mathrm{det}_\Lambda \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, T) \otimes_\Lambda \mathrm{det}_\Lambda \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T)^{-1} \otimes_\Lambda \mathrm{det}_\Lambda t(T)\\ &\qquad\qquad \xrightarrow{\sim} \mathrm{det}_\Lambda D_{\mathrm{cris}}(T) \otimes_\Lambda \mathrm{det}_\Lambda D_{\mathrm{cris}}(T)^{-1} \xrightarrow{\sim} \Lambda\end{aligned}$$

を得る． $l \neq p$ の場合と同様に，T の Tate 双対 $T^*(1)$ に対する同様の完全系列と，Tate 双対 $\mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, T^*(1))^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T)$, Bloch-加藤双対 $\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T^*(1))^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T)$ ([BK90] Proposition 3.8), 及び自然な同型 $t(T^*(1))^* \xrightarrow{\sim} D^0_{\mathrm{dR}}(T)$ により，完全系列

$$0 \to \mathrm{H}^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T) \to D_{\mathrm{cris}}(T^*(1))^* \oplus D^0_{\mathrm{dR}}(T) \to D_{\mathrm{cris}}(T^*(1))^* \to \mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T) \to 0$$

を得る．これにより，同型

$$\begin{aligned}&\mathrm{det}_\Lambda \mathrm{H}^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T)^{-1} \otimes_\Lambda \mathrm{det}_\Lambda \mathrm{H}^2(\mathbb{Q}_p, T)^{-1} \otimes_\Lambda \mathrm{det}_\Lambda D^0_{\mathrm{dR}}(T)\\ &\qquad\qquad \xrightarrow{\sim} \mathrm{det}_\Lambda D_{\mathrm{cris}}(T^*(1)) \otimes_\Lambda \mathrm{det}_\Lambda D_{\mathrm{cris}}(T^*(1))^{-1} \xrightarrow{\sim} \Lambda\end{aligned}$$

を得る．これら二つの同型の積によって，同型

$$\Delta_{\Lambda,1}(T) \otimes_\Lambda \mathrm{det}_\Lambda D_{\mathrm{dR}}(T) \xrightarrow{\sim} \Lambda$$

を得る. 基底

$$\theta_\Lambda(T) \in \Delta_{\Lambda,1}(T) \otimes_\Lambda \det{}_\Lambda D_{\mathrm{dR}}(T)$$

は, この同型によって, T の Hodge-Tate 重みを用いて定義される Γ-関数の特殊値の積

$$\gamma_T := \prod_{i=1, h_i \leqq 0}^{r_T} \frac{1}{(-h_i)!} \times \prod_{i=1, h_i \geqq 1}^{r_T} (h_i - 1)! \in \Lambda^\times$$

と対応する元として定義される. 以上の定義によって, 基底 $\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{\Lambda,\xi}(T) \in \Delta_\Lambda(T)$ が, T 及び $T^*(1)$ の L-定数, ε-定数, Γ-関数の特殊値, さらには Bloch-加藤 exponential 射 (及び双対 exponential 射) の行列式との組み合わせによって定義された. (双対)Bloch-加藤 exponential 射の行列式は, 対応する L-関数の特殊値と深い関係があることが知られているので, このことからも, $p = l$ の場合の局所 ε-予想のほうが, $l \neq p$ の場合よりもはるかに深い情報を含んでいることがわかる.

1.2 一般化岩澤主予想, 大域 ε-予想

この節では, 一般化岩澤予想 [Ka93a], 及びこの予想と関数等式の両立性に関する大域 ε-予想 [Ka93b] の定式化について解説する. 特に, 前節の局所 ε-予想が, 大域 ε-予想の局所因子であるということを正確に定式化する.

この節では, 簡単のため $p \neq 2$ と仮定する. 位相環 Λ は, 前節と同様 (for) または (pt) の型の環とする.

1.2.1 一般化岩澤主予想

まずは, 一般化岩澤主予想を簡単に復習することから始めたい (正確な定式化は [Ka93a]) I.§3 を参照). S を素数 p を含む有限個の素数の集合とする. 本稿では簡単のため, $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/S])$ 上の滑らかな $\mathbb{Z}_p$ 層に対する一般化岩澤主予想を解説する. $\mathbb{Q}_S (\subseteq \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C})$ を $\mathbb{Q}$ の S の外不分岐な最大ガロア拡大とし, $G_{\mathbb{Q},S} := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q})$ と記す. $G_{\mathbb{Q},S}$ の Λ-表現 T に対して, 複体 $C^\bullet(G_{\mathbb{Q},S}, T)$ を $D_{\mathrm{perf}}(\Lambda) \subseteq D^b(\Lambda)$ の対象とみたものを $R\Gamma(\mathbb{Z}[1/S], T)$ と表し, そのコホモロジーを $\mathrm{H}^i(\mathbb{Z}[1/S], T)$ と表す. この複体を用いて, T の大域基本直線 $\Delta_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T)$ を

$$\Delta(\mathbb{Z}[1/S], T) := \det{}_\Lambda R\Gamma(\mathbb{Z}[1/S], T)^{-1} \otimes_\Lambda \det{}_\Lambda \mathrm{H}^0(\mathbb{R}, T(-1))^{-1}$$

と定義する. ここで, $p \neq 2$ より, $\mathrm{H}^0(\mathbb{R}, T(-1))$ は射影的 Λ-加群となっていることに注意. 局所基本直線の場合と同様に, 大域基本直線 $\Delta_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T)$ も (bc) 及び (exact) の性質を満たす.

局所 ε-予想は, 幾何的な表現で特徴付けられる基本直線の基底の存在に関する予想であったが, 一般化岩澤予想では, モチーフの p-進実現の表現で特徴付けられる大域基本直線の基底に関する予想である. ここで, E を代数体とし, M を $\mathbb{Q}$ 上の (S の外で良還元を持つ) E-モチーフとする. $\Lambda := E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p$ とし, $T := M_p$ を M の p-進実現とする. このとき, T は幾何的と呼ぶことにする. 幾何的な T に対して, 対応するモチーフ M の L-関数の解析接続, 特殊値に関する Beilinson 予想などのいくつかの重要な予想の成立の仮定の下で, M の L-関数の特殊値を用いて, 基底

$$z^{\mathrm{geom}}_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T) \in \Delta_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T)$$

を定義することが出来る. この基底を用いて, 予想は次のように定式化される.

予想 1.4. (一般化岩澤主予想 *[Ka93a]* I.§3. Conjecture 3.2.2) 上のような各組 (Λ, T) に対して, 以下の条件 (i), (ii), (iii) を満たす基底 (ゼータ元と呼ぶ)

$$z_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T) \in \Delta_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T)$$

が存在する.

(i) 任意の連続環準同型 $\Lambda \to \Lambda'$, 及び $G_{\mathbb{Q},S}$ の任意の Λ-表現 T に対して, 自然な同型 $\Delta_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T) \otimes_\Lambda \Lambda' \xrightarrow{\sim} \Delta_{\Lambda'}(\mathbb{Z}[1/S], T \otimes_\Lambda \Lambda')$ の下で, 等式

$$z_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T) \otimes 1 = z_{\Lambda'}(\mathbb{Z}[1/S], T \otimes_\Lambda \Lambda')$$

が成立する.

(ii) $G_{\mathbb{Q},S}$ の Λ-表現の任意の完全系列 $0 \to T_1 \to T_2 \to T_3 \to 0$ に対して, 自然な同型 $\Delta_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T_2) \xrightarrow{\sim} \Delta_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T_1) \otimes_\Lambda \Delta_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T_3)$ の下で, 等式

$$z_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T_2) = z_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T_1) \otimes z_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T_3)$$

が成立する.

(iii) Λ は (pt) の型とする. 任意の幾何的な Λ-表現 T に対して, 等式

$$z_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T) = z_\Lambda^{\mathrm{geom}}(\mathbb{Z}[1/S], T)$$

が成立する.

注意 1.5. 加藤和也氏は, $S = \{p\}$ のときに, 階数 1 の表現に対してこの予想を証明している ([Ka93a]). この場合の一般化主岩澤予想は, Mazur-Wiles, Rubin により証明された円分拡大のイデアル類群の岩澤主予想と, Dirichlet L-関数に対応する Dirichlet モチーフに対する Bloch-加藤玉河数予想の p-成分とを組み合わせたものと本質的に同値である. 実際に, [Ka93a] では, 円単数を用いて大域基本直線の元を構成したが, この元が大域基本直線の基底になることと岩澤主予想は ($S = \{p\}$ の場合は) 同値である. さらに, この元が条件 (iii) を満たすことは, 対応するモチーフの Bloch-加藤予想の p-成分と同値である. [Ka93a] では, 代数体の代数的 K-群に関する Borel, Beilinson らの結果, 及び代数体の整数環のエタールコホモロジーに関する Soulé の結果, さらには [BK90] の結果をより精密にした明示的相互法則 (explicit reciprocity law, [Ka93a] II.§2 Theorem 2.1.2) を用いて, 条件 (iii) を証明している.

1.2.2 大域 ε-予想

大域 ε-予想とは, ゼータ元 $z_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T)$ と $z_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T^*(1))$ の間の "関数等式" を局所 ε-予想の ε-元を局所因子として記述する予想である. この項では, 一般化主岩澤主予想と局所 ε-予想の成立を仮定し, この仮定の下で大域 ε-予想を定式化する.

この項では, 任意の $n \geqq 1$ に対して $\xi_n = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ となる基底を $\xi = (\xi_n)_{n\geqq 1} \in \Gamma(\overline{\mathbb{Q}}, \hat{\mathbb{Z}}(1)) := \varprojlim_{n\geqq 1} \mu_n(\overline{\mathbb{Q}})$ と表す．各素数 l に対して, 体の埋め込み $\iota_l : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ を一つ固定する．埋め込み $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ による ξ の像を $\iota_p(\xi) \in \Gamma(\overline{\mathbb{Q}}_p, \hat{\mathbb{Z}}(1))$ と表す．これらの埋め込みから自然に定まる射も同様に $\iota_l : G_{\mathbb{Q}_l} \to G_{\mathbb{Q},S}$ と記す. $G_{\mathbb{Q},S}$ の Λ-表現 T に対して, 射 ι_l によって自然に定まる $G_{\mathbb{Q}_l}$ の Λ-表現を $T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota_l}$ と記す．これは Λ-加群としては当然 T と等しいので, 特に $\det_\Lambda T|_{G_{\mathbb{Q}_p},\iota_p} = \det_\Lambda T$ である．さらに, §1.1.2 の $a(T)$ の定義と類体論により, $\prod_{l\in S} a(T|_{\mathbb{Q}_l,\iota_l}) = 1$ となり ([Ka93b] 1.10), 自然な同型 $\otimes_{l\in S}\Lambda_{a(T|_{\mathbb{Q}_l,\iota_l})} \xrightarrow{\sim} \Lambda_1 = \Lambda$ があるので, 同型

$$\begin{aligned}\otimes_{l\in S}\, \Delta_A(T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota_l}) &\xrightarrow{\sim} (\otimes_{l\in S}\det_\Lambda R\Gamma(G_{\mathbb{Q}_l}, T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota_l})) \otimes_\Lambda (\otimes_{l\in S}\Lambda_{a(T|_{\mathbb{Q}_l,\iota_l})}) \otimes_\Lambda \det_\Lambda T \\ &\xrightarrow{\sim} (\otimes_{l\in S}\det_\Lambda R\Gamma(G_{\mathbb{Q}_l}, T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota_l})) \otimes_\Lambda \det_\Lambda T\end{aligned}$$

を得る．この同型を用いて, 基底

$$\varepsilon_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T) := \otimes_{l\in S}\varepsilon_{\Lambda,\iota_p(\xi_l)}(\mathbb{Q}_l, T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota_l}) \in (\otimes_{l\in S}\det_\Lambda R\Gamma(G_{\mathbb{Q}_l}, T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota_l})) \otimes \det_\Lambda T$$

を, 各 $l \in S$ での ε-元 $\varepsilon_{\Lambda,\iota_p(\xi_l)}(\mathbb{Q}_l, T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota_l}) \in \Delta_\Lambda(T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota_l})$ の積に対応する元として定義する (ここで, $\iota_p(\xi_l) \in \Gamma(\overline{\mathbb{Q}}_p, \mathbb{Z}_l(1))$ は $\iota_p(\xi)$ の l-成分とする)．ここで, 別の埋め込み $\iota'_l : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ を考える．このとき各 l に対して, $\iota_l^{-1} \circ \iota'_l \in G_{\mathbb{Q}}$ の像 $\tau_l \in G_{\mathbb{Q},S}$ により, 同型 $\tau_l : T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota_l} \xrightarrow{\sim} T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota'_l}$ が定まり, さらにこの同型により, 同型 $\tau_l : \det_\Lambda R\Gamma(T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota_l}) \xrightarrow{\sim} \det_\Lambda R\Gamma(T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota'_l})$ が定まる．このとき, [Ka93a]Lemma 1.11 と同様の議論により, 同型

$$\begin{aligned}(\otimes_{l\in S}\tau_l) \otimes \mathrm{id}_{\det_\Lambda(T)} : (\otimes_{l\in S}\det_\Lambda R\Gamma(G_{\mathbb{Q}_l}, T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota_l})) \otimes \det_\Lambda T& \\ \xrightarrow{\sim} (\otimes_{l\in S}\det_\Lambda R\Gamma(G_{\mathbb{Q}_l}, T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota'_l})) \otimes \det_\Lambda T&\end{aligned}$$

の下で, 等号

$$\otimes_{l\in S}\varepsilon_{\Lambda,\iota_p(\xi_l)}(\mathbb{Q}_l, T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota_l}) = \otimes_{l\in S}\varepsilon_{\Lambda,\iota'_p(\xi_l)}(\mathbb{Q}_l, T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota'_l})$$

が成り立つことが証明できる．つまり, 基底 $\varepsilon_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T)$ は, 標準的な同型を除き, 埋め込み $\iota_l : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ の取り方によらない.

次に, 同型

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{R}, T) \oplus \mathrm{H}^0(\mathbb{R}, T(-1)) \xrightarrow{\sim} T : (x, y) \mapsto 2x + \frac{1}{2}y \otimes \xi$$

(ここで, $(\frac{1}{2}y \otimes \xi \in) T(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)$ は, 自然な同型 $\mathbb{Z}_p(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p$ により T と同一視する) と標準的なペアリング $\mathrm{H}^0(\mathbb{R}, T^*) \times \mathrm{H}^0(\mathbb{R}, T) \to \Lambda$, さらに自然な同一視 $(T^*(1))(-1) = T^*$ を用いて, 同型

$$\begin{aligned}\det_\Lambda \mathrm{H}^0(\mathbb{R}, (T^*(1))(-1))^{-1} \xrightarrow{\sim} \det_\Lambda \mathrm{H}^0(\mathbb{R}, T^*)^{-1} \xrightarrow{\sim} \det_\Lambda \mathrm{H}^0(\mathbb{R}, T)& \\ \xrightarrow{\sim} \det_\Lambda \mathrm{H}^0(\mathbb{R}, T(-1))^{-1} \otimes_\Lambda \det_\Lambda T&\end{aligned}$$

を定義する．この同型に, 代数体の整数環のエタールコホモロジーの双対定理 ([Ma73])

$$R\mathrm{Hom}_\Lambda(R\Gamma(\mathbb{Z}[1/S], T^*(1)))[-2] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cone}(R\Gamma(\mathbb{Z}[1/S], T) \to \oplus_{l\in S} R\Gamma(\mathbb{Q}_l, T|_{G_{\mathbb{Q}_l},\iota_l}))[-1]$$

から自然に誘導される同型

$$\det_\Lambda R\Gamma(\mathbb{Z}[1/S], T^*(1))^{-1} \xrightarrow{\sim} \det_\Lambda R\Gamma(\mathbb{Z}[1/S], T)^{-1} \otimes_\Lambda (\otimes_{l\in S}\det_\Lambda R\Gamma(\mathbb{Q}_l, T|_{G_{\mathbb{Q}_l}, \iota_l}))$$

をテンソルすることで, T と $T^*(1)$ の大域基本直線に関する次の同型

$$\Delta_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T^*(1)) \xrightarrow{\sim} \Delta_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T) \otimes_\Lambda (\otimes_{l\in S}\det_\Lambda R\Gamma(\mathbb{Q}_l, T|_{\mathbb{Q}_l, \iota_l})) \otimes_\Lambda \det_\Lambda(T)$$

を得る. 以上の準備の下, 大域 ε-予想は次のように定式化される.

予想 1.6. (大域 ε-予想 *[Ka93b]* Conjecture 1.13) 上の同型による同一視の下で, 等式

$$z_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T^*(1)) = z_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T) \otimes \varepsilon_\Lambda(\mathbb{Z}[1/S], T)$$

が成立する.

注意 1.7. この予想も, $S = \{p\}$ で階数 1 の表現に対しては, ゼータ元と ε-元の, 円単数及び Coleman 準同型を使った構成の帰結として, 加藤和也氏によって証明されている ([Ka93b] Theorem 4.1).

2 Robba 環上の (φ, Γ)-加群に対する局所 ε-予想

この章では, 本稿の主題である Robba 環上の (φ, Γ)-加群に対する局所 ε-予想について解説する. この予想は, $l = p$ の場合の局所 ε-予想の, リジッド解析的多様体上の p-進ガロア表現の族への一般化に関する予想である.

予想の詳細に入る前に, まずは, 局所 ε-予想のリジッド解析的多様体上の p-進ガロア表現の族への一般化と Robba 環上の (φ, Γ)-加群との関係について簡単に解説したい. 以下, 特に断らない限りは, Robba 環上の (φ, Γ)-加群を単に (φ, Γ)-加群と呼ぶことにする.

前章で解説した一般化岩澤主予想, 大域及び局所 ε-予想は, $\mathbb{Z}_p$-形式スキーム上の p-進ガロア表現の族に対する予想であった. $\mathbb{Z}_p$-形式スキーム上の p-進ガロア表現の族があれば, Raynaud-Berthelot の生成ファイバーによって, 付随するリジッド解析的多様体上の p-進ガロア表現が自然に得られる. この自明な例以外に, 形式スキーム上の族からは来ない (正確には, 来るかどうか知られていない) リジッド解析的多様体上の p-進ガロア表現の族が近年重要になってきている. 例えば, 通常 (ordinary)p-進保型形式の族 (肥大族) の一般化として, eigenvariety と呼ばれるリジッド解析的多様体が近年活発に研究されている. eigenvariety は, 通常という条件を緩めた, 有限スロープ (finite slope) という条件をもつ p-進保型形式をパラメトライズする空間であり, この多様体上には p-進保型形式に対応する p-進ガロア表現の族が存在している. このような族の岩澤理論的な性質を研究することは, 自然で重要な問題であり, 前章の予想を, リジッド解析多様体上の族に対して一般化することも, 今後重要になってくると思われる.

次に, Robba 環上の (φ, Γ)-加群とは, p-進体の p-進ガロア表現の一般化である p-進解析的な対象である. 特に, p-進体の p-進ガロア表現の圏から (φ, Γ)-加群の圏への充満忠実な関手が存在する. (φ, Γ)-加群は, リジッド解析的多様体上の p-進ガロア表現の族の研究において極めて重要な役割を果たす. 例えば, eigenvariety 上の $G_{\mathbb{Q}}$ の p-進表現の族の $G_{\mathbb{Q}_p}$ への制限は, より広い (φ, Γ)-加群の族の枠組みで考えると, 三角表現 (trianguline repreesntation) と呼ばれる極めて扱い易い性質を持

つ表現となることが知られている ([Ki03] Theorem 6.3, [Co08] Proposition 4.3, [KPX13]§6). さらに, (φ,Γ)-加群は p-進解析的な対象なので, ガロア表現から p-進 L-関数などの p-進解析的な情報を引き出しやすい. 実際に, [Na13a] では, L-関数の特殊値の研究及び p-進 L-関数の研究で極めて重要な Bloch-加藤 exponential 射及び Perrin-Riou exponential 射の理論を, (φ,Γ)-加群の枠組みで再構築し, 特に Perrin-Riou exponential 射の理論を, 全ての幾何的な (φ,Γ)-加群に対して一般化している.

以上のことから, 前章の予想を, リジッド解析的多様体上の p-進ガロア表現の族, 及び (φ,Γ)-加群の族の場合に一般化することは, 興味深い問題であると思われる. [Na13b] では, その試みの第一歩として, $l=p$ の場合の局所 ε-予想を, リジッド解析的多様体上の (φ,Γ)-加群の族の場合へ一般化した. 今後, 一般化岩澤主予想, 大域 ε-予想などもこの枠組みで研究していきたいが, 本稿では以下, $l=p$ の場合の局所 ε-予想の一般化についてのみ解説する.

2.1 Robba 環上の (φ,Γ)-加群に対する基本直線

以下, この章では, ガロア表現及び (φ,Γ)-加群の係数を A と表し, A として次の二つの型の位相環を考える.

(rig) A は $\mathbb{Q}_p$ 上のアフィノイド代数, つまり, ある $d\in\mathbb{Z}_{\geqq 0}$ が存在し, A は $\mathbb{Z}_p[T_1,\cdots,T_d]^\wedge[1/p]$ の商環である. ここで, $(-)^\wedge$ は $(-)$ の p-進完備化を表し, A の位相は $\mathbb{Z}_p[T_1,\cdots,T_d]^\wedge[1/p]$ の p-進位相からの商位相として定める (表示の取り方によらず一意に定まる).

(pt) A は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の有限個の直積.

ここで, (pt) は (rig) の特別な場合であるが, 前章の予想と同様に, 特徴付けで (pt) を用いるので, このように場合分けをした.

まずは, Robba 環 $\mathcal{R}_A$ 上の (φ,Γ)-加群の定義, 及びそれと $G_{\mathbb{Q}_p}$ の A-表現との関係について, [KPX13] に従い復習する. 一般に, $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 K に対して, K に付随する Robba 環 $\mathcal{R}(\pi_K)_A$ 上の (φ,Γ)-加群が, G_K の A-表現の一般化として定義されるが, 簡単のため本稿では, $\mathbb{Q}_p$ の場合のみの定義を復習する. $\Gamma:=\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$ と記す. p-進円分指標 $\chi_p: G^{ab}_{\mathbb{Q}_p}\to\mathbb{Z}_p^\times$ を, 任意の 1 の p-ベキ根 ζ に対して $g(\zeta)=\zeta^{\chi_p(g)}$ となる指標と定義する. χ_p は同型 $\chi_p:\Gamma\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}_p^\times$ を誘導する. p-進ノルム $|-|_p:\overline{\mathbb{Q}}_p\to\mathbb{R}_{\geqq 0}$ を $|p|_p=1/p$ となるものとする. 基底 $\xi\in\Gamma(\overline{\mathbb{Q}}_p,\mathbb{Z}_p(1))$ を固定する. 実数 $r\leqq s\in p^{\mathbb{Q}}\cap[0,1)$ に対して, 環 $\mathcal{R}^{[r,s]}$ を

$$\mathcal{R}^{[r,s]}:=\mathcal{R}^{[r,s]}_\xi:=\{f(X_\xi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nX_\xi^n|a_n\in\mathbb{Q}_p, f(x)\ \text{は}\ r\leqq|x|_p\leqq s\ \text{の範囲で収束する}\ \}$$

と定義する. $f(X_\xi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nX^n_\xi\in\mathcal{R}^{[r,s]}$ に対して, ノルムを

$$|f(X_\xi)|_{[r,s]}:=\sup_{n\in\mathbb{Z}}(\max(|a_n|_pr^n,|a_n|_ps^n))$$

と定義することで, 環 $\mathcal{R}^{[r,s]}$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の Banach 代数となる. ここで, 別の基底 $c\xi\in\Gamma(\overline{\mathbb{Q}}_p,\mathbb{Z}_p(1))$ $(c\in\mathbb{Z}_p^\times)$ に対して, 環同型 $\mathcal{R}^{[r,s]}_{c\xi}\xrightarrow{\sim}\mathcal{R}^{[r,s]}_\xi: X_{c\xi}\mapsto(1+X_\xi)^c-1$ により両者を同一視することで, 環 $\mathcal{R}^{[r,s]}:=\mathcal{R}^{[r,s]}_\xi$ は ξ の選び方によらずに定義される. $\mathcal{R}^{[r,s]}_A:=\mathcal{R}^{[r,s]}\hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}A$ (完備テンソル積) と

し, $\mathcal{R}_A^r := \cap_{r \leqq s < 1} \mathcal{R}_A^{[r,s]}$, $\mathcal{R}_A := \cup_{r<1} \mathcal{R}_A^r$ と定義する．これらの環はそれぞれ, A 上の Banach 代数, A 上の Banach 代数の射影極限, それの局所凸順極限の位相環の構造が自然に入る（詳細は省略). 環 $\mathcal{R}_A$ を $\mathbb{Q}_p$ の A 上相対的な Robba 環と呼ぶが, 本稿では簡単のため, A 上の Robba 環と呼ぶことにする．$\mathcal{R}_A$ への Frobenius 作用 φ と Γ-作用を

$$\varphi(X_\xi) := (1+X_\xi)^p - 1,\ \gamma(X_\xi) := (1+X_\xi)^{\chi_p(\gamma)} - 1\ (\gamma \in \Gamma)$$

で定まる連続 A-代数準同型として定める．より正確に, 各 $p^{1/(p-1)} \leqq r < 1$ に対して, $\varphi : \mathcal{R}_A^r \to \mathcal{R}_A^{r^{1/p}}$, $\gamma : \mathcal{R}_A^r \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_A^r$ $(\gamma \in \Gamma)$ を定める．

以上の定義の下で, $\mathcal{R}_A$ 上の (φ, Γ)-加群は次のように定義される．

定義 2.1. (1) $p^{1/(p-1)} \leqq r < 1$ に対して, M^r が $\mathcal{R}_A^r$ 上の (φ, Γ)-加群であるとは, M^r は有限射影的 $\mathcal{R}_A^r$-加群で, $\mathcal{R}_A^{r^{1/p}}$-線形な同型 $\varphi_M : \varphi^*(M^r) := M^r \otimes_{\mathcal{R}_A^r, \varphi} \mathcal{R}_A^{r^{1/p}} \xrightarrow{\sim} M^{r^{1/p}}$ を持つものと定義する (ここで, 任意の $r \leqq s < 1$ に対して, $M^s := M^r \otimes_{\mathcal{R}_A^r} \mathcal{R}_A^s$ と定義する).

(2) M が $\mathcal{R}_A$ 上の (φ, Γ)-加群であるとは, ある $p^{1/(p-1)} \leqq r < 1$ と $\mathcal{R}_A^r$ 上の (φ, Γ)-加群 M^r が存在し, $M = M^r \otimes_{\mathcal{R}_A^r} \mathcal{R}_A$ となるものと定義する．

例 2.2. ここで, $\mathcal{R}_A$ 上の (φ, Γ)-加群の例として, 階数 1 の (φ, Γ)-加群の分類結果を紹介したい．連続準同型 $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to A^\times$ に対して, $\mathcal{R}_A$ 上の (φ, Γ)-加群 $\mathcal{R}_A(\delta) := \mathcal{R}_A \mathbf{e}_\delta$ を, $\varphi(\mathbf{e}_\delta) := \delta(p)\mathbf{e}_\delta$, $\gamma(\mathbf{e}_\delta) := \delta(\chi_p(\gamma))\mathbf{e}_\delta$ で定義する．逆に, 任意の階数 1 の $\mathcal{R}_A$ 上の (φ, Γ)-加群 M に対して, $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to A^\times$ と可逆 A-加群 $\mathcal{L}$ の組 $(\delta, \mathcal{L})$ が同型を除いて一意に存在し, 同型 $M \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_A(\delta) \otimes_A \mathcal{L}$ となることが証明されている ([KPX13] Theorem 6.1.10).

$G_{\mathbb{Q}_p}$ の A-表現と $\mathcal{R}_A$ 上の (φ, Γ)-加群との関係については, 次の定理が最も重要である．この定理は, A が (pt) の場合には Fontaine [Fo90]-Cherbonnier-Colmez [CC98]-Kedlaya [Ke04] により, A が (rig) の場合には Berger-Colmez [Be-Co08], Kedlaya-Liu [KL10] により証明された．

定理 2.3. (*[KL10]* Theorem 3.11) 充満忠実な完全関手

$$D_{\mathrm{rig}} : \{G_{\mathbb{Q}_p} \text{ の } A\text{-表現の圏}\} \hookrightarrow \{\mathcal{R}_A \text{ 上 の } (\varphi, \Gamma)\text{-加群の圏}\} : V \mapsto D_{\mathrm{rig}}(V)$$

が存在する．

例 2.4. 連続準同型 $\tilde{\delta} : G_{\mathbb{Q}_p}^{ab} \to A^\times$ により定まる階数 1 の $G_{\mathbb{Q}_p}$ の A-表現を $A(\tilde{\delta})$ と表す．$\delta := \tilde{\delta} \circ \mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p} : \mathbb{Q}_p^\times \to A^\times$ と定義すると, 自然な同型 $D_{\mathrm{rig}}(A(\tilde{\delta})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_A(\delta)$ が存在する．

次に, (φ, Γ)-加群のガロアコホモロジーの定義を復習する．以下, 簡単のため $p \neq 2$ と仮定する ($p = 2$ の場合も僅かの修正で同様に出来る). このとき, 位相的生成元 $\gamma \in \Gamma$ が存在するが, 以下これを一つ固定する．この γ と φ-作用を用いて, $\mathcal{R}_A$ 上の任意の (φ, Γ)-加群 M に対して, 次数 $[0, 2]$ 以外ではゼロとなる A-加群の複体 $C^\bullet_{\varphi,\gamma}(M)$ を

$$C^\bullet_{\varphi,\gamma}(M) : [M \xrightarrow{(\gamma-1)\oplus(\varphi-1)} M \oplus M \xrightarrow{(x,y)\mapsto(\varphi-1)(x)-(\gamma-1)(y)} M]$$

と定義し, この複体を $D^b(A)$ の対象と見たものを $R\Gamma(\mathbb{Q}_p, M)$ と記す．$i = 0, 1, 2$ に対して, この複体の i 次コホモロジーを $\mathrm{H}^i(\mathbb{Q}_p, M)$ と記す．

この複体を用いて, 基本直線の定義を Robba 環上の (φ,Γ)-加群の場合へ拡張したい. M を $\mathcal{R}_A$ 上の (φ,Γ)-加群とする. この場合もガロア表現の場合と同様に, 二つの可逆 A-加群の積

$$\Delta_A(M) := \Delta_{A,1}(M) \otimes_A \Delta_{A,2}(M)$$

として M の基本直線を定義する.

まず, $\Delta_{A,1}(M)$ の定義をする. Kedlaya-Pottharst-Xiao の定理 ([KPX13], Theorem 4.4.3, Theorem 4.4.4) より, $R\Gamma(\mathbb{Q}_p, M) \in D_{\mathrm{perf}}(M)$ となるので, ガロア表現の場合と同様に

$$\Delta_{A,1}(M) := \det{}_A R\Gamma(\mathbb{Q}_p, M)$$

と定義する.

次に, $\Delta_{A,2}(M)$ の定義をする. $\mathcal{R}_A$ 上階数 1 の (φ,Γ)-加群 $\det_{\mathcal{R}_A} M$ を考える. このとき, 例 2.2 の階数 1 の (φ,Γ)-加群の分類結果より, 連続準同型 $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to A^\times$ と可逆 A-加群 $\mathcal{L}$ の組 $(\delta, \mathcal{L})$ で, 同型 $\det_{\mathcal{R}_A} M \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_A(\delta) \otimes_A \mathcal{L}$ となるものが同型を除き一意に存在する. この δ を用いて,

$$\Delta_{A,2}(M) := \{x \in \det{}_{\mathcal{R}_A} M | \varphi(x) = \delta(p)x, \gamma(x) = \delta(\gamma)x\}$$

と定義する. これは $\mathcal{L}$ と同型になるので, 特に可逆 A-加群となる.

以上で (φ,Γ)-加群の場合の基本直線の定義が出来たが, ガロア表現の場合と同様に, この基本直線 $\Delta_A(M)$ も以下の性質を満たす.

(bc) 任意の連続環準同型 $A \to A'$, 及び $\mathcal{R}_A$ 上の任意の (φ,Γ)-加群 M に対して, A'-加群の自然な同型

$$\Delta_A(M) \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} \Delta_{A'}(M \otimes_{\mathcal{R}_A} \mathcal{R}_{A'})$$

が存在する.

(exact) $\mathcal{R}_A$ 上の (φ,Γ)-加群の任意の短完全系列

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

に対して, A-加群の自然な同型

$$\Delta_A(M_2) \xrightarrow{\sim} \Delta_A(M_1) \otimes_A \Delta_A(M_3)$$

が存在する.

この基本直線と前章で定義したガロア表現の基本直線との比較に関して, 以下の性質 (comp) (comparison の略) が成立する ([Po13] Theorem 2.8, [Na13b] Corollary 3.2).

(comp) Λ を (for) の型の位相環とし, T を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の Λ-表現とする. $\Lambda \to A$ を連続準同型として, $M := D_{\mathrm{rig}}(T \otimes_\Lambda A)$ と定義する. このとき, A-加群の自然な同型

$$\Delta_{\Lambda,i}(T) \otimes_\Lambda A \xrightarrow{\sim} \Delta_{A,i}(M)\ (i = 1, 2),\ \ \Delta_\Lambda(T) \otimes_\Lambda A \xrightarrow{\sim} \Delta_A(M)$$

が存在する.

2.2 Robba 環上の (φ,Γ)-加群に対する Bloch-加藤の exponential 射

この節では, $l=p$ の場合に de Rham 表現に対して定義した基底 $\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{\Lambda,\xi}(T)\in\Delta_\Lambda(T)$ を, de Rham (φ,Γ)-加群の場合に一般化する．この定義のためには, Fontaine の p-進周期環を用いた様々な関手, Bloch-加藤の exponential 射などが重要であった．そこでこの節では, これらの概念の (φ,Γ)-加群への一般化について復習しながら, de Rham (φ,Γ)-加群 M に対する基底 $\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{A,\xi}(M)\in\Delta_A(M)$ の定義を解説したい．

この節では, A は (pt) の型であるとする．さらに, 一般の (pt) の場合は体の場合の積を考えればよいので, 以下, A は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大と仮定する．

まずは, (φ,Γ)-加群に対する Fontaine 関手の定義を復習しよう．基底 $\xi=(\xi_{p^n})_{n\geqq 0}\in\Gamma(\overline{\mathbb{Q}}_p,\mathbb{Z}_p(1))$ を固定する．各 $n\geqq 1$ に対して, $r_n:=|1-\xi_{p^n}|_p$, $A_n:=A\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{Q}_p(\xi_{p^n})$ と定義する．$\mathcal{R}_A$ の元 $t_\xi:=\log(1+X_\xi)=\sum_{n\geqq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}X_\xi^n$ を定義する．この元は, $\varphi(t_\xi)=pt_\xi$, $\gamma(t_\xi)=\chi_p(\gamma)t_\xi$ を満たす．各 $n\geqq 1$ に対して, 連続 A-代数準同型

$$\iota_n:\mathcal{R}_A^{r_n}\hookrightarrow A_n[[t_\xi]]:X_\xi\mapsto\xi_{p^n}\exp(t_\xi/p^n)-1$$

を定義する．環 $A_n[[t_\xi]]$ への Γ-作用を, $\mathbb{Q}_p(\xi_{p^n})$ 及び t_ξ への Γ-作用から自然に誘導される作用として定義すれば, この射 ι_n は両辺の Γ-作用と両立する．別の基底 $c\xi\in\Gamma(\overline{\mathbb{Q}}_p,\mathbb{Z}_p(1))$ $(c\in\mathbb{Z}_p^\times)$ に対して, $X_{c\xi}=(1+X_\xi)^c-1$, $t_{c\xi}=ct_\xi$ と同一視することにより, この準同型は ξ の選び方によらずに定義される．

M を $\mathcal{R}_A$ 上の (φ,Γ)-加群とする．まずは,

$$D_{\mathrm{cris}}(M):=(M\otimes_{\mathcal{R}_A}\mathcal{R}_A[1/t_\xi])^\Gamma$$

と定義する．$D_{\mathrm{cris}}(M)$ への Frobenius 作用 φ を, $\varphi_M\otimes\varphi$ から誘導される作用と定義する．この定義は, p-進ガロア表現の場合の $D_{\mathrm{cris}}(T)$ の自然な一般化になってる, つまり, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の任意の A-表現 T に対して, 自然な同型 $D_{\mathrm{cris}}(T)\xrightarrow{\sim}D_{\mathrm{cris}}(D_{\mathrm{rig}}(T))$ が存在する．

次に $D_{\mathrm{dR}}(M)$ を定義しよう．十分大きな $n\geqq 1$ に対して, M が $\mathcal{R}_A^{r_n}$ 上の (φ,Γ)-加群 M^{r_n} の底変換で得られているとする．そのような n に対して, まずは

$$D^+_{\mathrm{dif},n}(M):=A_n[[t_\xi]]\otimes_{\iota_n,\mathcal{R}_A^{r_n}}M^{r_n}$$

と定義し,

$$D^+_{\mathrm{dif}}(M):=A_\infty[[t_\xi]]\otimes_{A_n[[t_\xi]]}D^+_{\mathrm{dif},n}(M),\quad D_{\mathrm{dif}}(M):=D^+_{\mathrm{dif}}(M)[1/t_\xi]$$

と定義する (n によらない)．ここで, $A_\infty[[t_\xi]]:=\cup_{n\geqq 1}A_n[[t_\xi]]$ とする．これらは, M^{r_n} の Γ 作用から自然に誘導される Γ-作用を持つ．これらの Γ-固定部分として, A-加群

$$D^i_{\mathrm{dR}}(M):=(t_\xi^iD^+_{\mathrm{dif}}(M))^\Gamma\ \ (i\in\mathbb{Z}),\ \ D_{\mathrm{dR}}(M):=D_{\mathrm{dif}}(M)^\Gamma$$

を定義する．$D_{\mathrm{cris}}(-)$ の場合と同様に, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の任意の A-表現 T に対して, 自然な同型 $D^i_{\mathrm{dR}}(T)\xrightarrow{\sim}D^i_{\mathrm{dR}}(D_{\mathrm{rig}}(T))$, $D_{\mathrm{dR}}(T)\xrightarrow{\sim}D_{\mathrm{dR}}(D_{\mathrm{rig}}(T))$ が存在する．これらを用いれば, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の p-進ガロア表現に関する様々な概念を, (φ,Γ)-加群の場合に自然に一般化することが出来る．ここでは, 次の二つの概

念のみを復習する．まず, M が de Rham であることを, 等号 $\dim_A D_{\mathrm{dR}}(M) = \mathrm{rank}_{\mathcal{R}_A}(M)$ が成立することと定義する．次に, M が de Rahm のとき, M の Hodge-Tate 重みを $D^{-i}_{\mathrm{dR}}(M)/D^{-i+1}_{\mathrm{dR}}(M) \neq 0$ となる整数と定義する．

以下, M を $\mathcal{R}_A$ 上の de Rham (φ, Γ)-加群とする． 基底 $\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{\Lambda,\xi}(T) \in \Delta_\Lambda(T)$ の場合と同様に, 基底 $\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{A,\xi}(M) \in \Delta_A(M)$ は, 二つの基底 $\theta_A(T) \in \Delta_{A,1}(M) \otimes_A \det_A D_{\mathrm{dR}}(M)$ と $\varepsilon_{\mathrm{dR},A}(M,\xi) \in \det_A D_{\mathrm{dR}}(M)^{-1} \otimes_A \Delta_{A,2}(M)$ の積

$$\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{A,\xi}(M) := \theta_A(M) \otimes \varepsilon_{\mathrm{dR},A}(M,\xi)$$

として定義される．

まずは、基底 $\varepsilon_{\mathrm{dR},A}(M,\xi) \in \det_A D_{\mathrm{dR}}(M)^{-1} \otimes_A \Delta_{A,2}(M)$ を定義しよう． $\mathcal{R}_A$ 上の一変数関数環 $\mathcal{R}_A[Y_\xi]$ を考える． Y_ξ への φ と Γ の作用を, $\varphi(Y_\xi) := pY_\xi + \log(\varphi(X_\xi)/X^p_\xi)$, $\gamma(Y_\xi) := Y_\xi + \log(\gamma(X_{xi})/Y_\xi)$ となるように定義する (つまり, $Y_\xi := \log(X_\xi)$ と定義している). この環を用いて,

$$D_{\mathrm{pst}}(M) := \cup_K (\mathcal{R}_A(\pi_K)[Y_\xi, 1/t_\xi] \otimes_{\mathcal{R}_A} M)^{\Gamma_K}$$

と定義する． ここで, K は $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 内の $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大全体を動き, $\Gamma_K := \mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K) \subseteq \Gamma$, $\mathcal{R}_A(\pi_K)$ は K の A 上相対的 Robba 環とする (定義は省略). Berger の定理 (de Rham $\Rightarrow$ 潜在的準安定) により, $D_{\mathrm{pst}}(M)$ は階数 $r_M := \mathrm{rank}_{\mathcal{R}_A}(M)$ の自由 $A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}^{ur}_p$-加群となる． $G_{\mathbb{Q}_p}$ の de Rham A-表現に対して同様に, 自然な同型 $D_{\mathrm{pst}}(T) \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{pst}}(D_{\mathrm{rig}}(T))$ が存在する． これらにより, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の de Rham A-表現の場合と同じ方法で, 固定した ξ に対して, M の ε-定数

$$\varepsilon_A(M,\xi) \in (A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\mu^\infty_p))^\times$$

を定義することができる． M の Hodge-Tate 重みの集合を重複度も込めて $\{h_1, \cdots h_{r_M}\}$ とし, その和を $h := \sum_{i=1}^{r_M} h_i$ と記す． これを用いて, 十分大きな $n \geqq 1$ に対して, 射

$$\Delta_{A,2}(M) \to \frac{1}{t^h_\xi} D^+_{\mathrm{dif},n}(\det_{\mathcal{R}_A} M) = \frac{1}{t^h_\xi} A_n[[t_\xi]] \otimes_{\iota_n, \mathcal{R}^{r_n}_A} (\det_{\mathcal{R}_A} M)^{r_n} : x \mapsto \frac{1}{\varepsilon_A(M,\xi)(-t_\xi)^h} \otimes \varphi^n(x)$$

を定義すると, これは n によらない同型

$$\Delta_{A,2}(M) \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{dR}}(\det_{\mathcal{R}_A} M) \xrightarrow{\sim} \det_A D_{\mathrm{dR}}(M)$$

を誘導する ([Na13b] Lemma 3.4). この同型に対応するものとして, 基底

$$\varepsilon_{\mathrm{dR},A}(M,\xi) \in \det_A D_{\mathrm{dR}}(M)^{-1} \otimes_A \Delta_{A,2}(M)$$

を定義する． この基底は, de Rham A-表現の場合の一般化になっている, つまり, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の de Rham A-表現 T に対して, 同型 $\det_A D_{\mathrm{dR}}(T)^{-1} \otimes_A \Delta_{A,2}(T) \xrightarrow{\sim} \det_A D_{\mathrm{dR}}(D_{\mathrm{rig}}(T))^{-1} \otimes_A \Delta_{A,2}(D_{\mathrm{rig}}(T))$ の下で, 等式

$$\varepsilon_{\mathrm{dR},A}(T,\xi) = \varepsilon_{\mathrm{dR},A}(D_{\mathrm{rig}}(T),\xi)$$

が成立する．

最後に, 基底 $\theta_A(M) \in \Delta_{A,1}(M) \otimes_A \det_A D_{\mathrm{dR}}(M)$ の定義を解説する. これを定義するためには, Bloch-加藤の基本完全系列から得られる完全系列

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, T) \to D_{\mathrm{cris}}(T) \xrightarrow{x \mapsto ((1-\varphi)(x), \bar{x})} D_{\mathrm{cris}}(T) \oplus t(T) \to \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, T) \to 0$$

を (φ, Γ)-加群の場合へ拡張する必要がある. そこでまず, 次数 $[0,1]$ 以外の項はゼロとなる A-加群の複体を

$$C^\bullet_\gamma(M[1/t_\xi]) : [M[1/t_\xi] \xrightarrow{1-\gamma} M[1/t_\xi]]$$

と定義し, それのコホモロジーを $\mathrm{H}^i(\Gamma, M[1/t_\xi])$ と表す. 特に, $D_{\mathrm{cris}}(M) = \mathrm{H}^0(\Gamma, M[1/t_\xi])$ である. このとき, 自然な射 $\mathrm{H}^i(\mathbb{Q}_p, M) \to \mathrm{H}^i(\Gamma, M[1/t_\xi])$ を定義することができ ([Na13b] §2), M の有限コホモロジーを

$$\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, M) := \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, M) \to \mathrm{H}^1(\Gamma, M[1/t_\xi]))$$

と定義する. 以上の状況で, Bloch-加藤の基本完全系列の (φ, Γ)-加群の場合への一般化として, 次を証明した. $t(M) := D_{\mathrm{dR}}(M)/D^0_{\mathrm{dR}}(M)$ とおく.

定理 2.5. (*[Na13a]* Theorem 1.1*, [Na13b]* Proposition 2.20, 2.23*,* 2.25)

(1) M に関して関手的な完全系列

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathbb{Q}_p, M) \to D_{\mathrm{cris}}(M) \xrightarrow{x \mapsto ((1-\varphi)(x), \bar{x})} D_{\mathrm{cris}}(M) \oplus t(M) \to \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, M) \to 0$$

が存在する. 本稿では, この完全系列を M の *Bloch-*加藤基本完全系列と呼ぶことにする.

(2) T を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の A 表現とする. このとき, 自然な同型 $\mathrm{H}^i(\mathbb{Q}_p, T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(\mathbb{Q}_p, D_{\mathrm{rig}}(T))$, $D_{\mathrm{cris}}(T) \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{cris}}(D_{\mathrm{rig}}(T))$, $D^i_{\mathrm{dR}}(T) \xrightarrow{\sim} D^i_{\mathrm{dR}}(D_{\mathrm{rig}}(T))$ により, T の *Bloch-*加藤基本完全系列は $D_{\mathrm{rig}}(T)$ の *Bloch-*加藤基本完全系列と同型になる.

(3) *Tate* 双対 $\cup : \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, M) \times \mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, M^*(1)) \to A$ (*[Li08]*) は, 同型

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{Q}_p, M)/\mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, M^*(1))^*$$

を導く.

注意 2.6. この定理 (1), (3) は, Fontaine の p-進周期環 $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ は使わないで, 純粋に (φ, Γ)-加群の明示的な構造を用いるだけで証明できる. 特に, 境界射に現れる射 $t(M) \to \mathrm{H}^1_f(\mathbb{Q}_p, M)$ は Bloch-加藤 exponential 射の一般化であるが, この射を明示的に定義することが可能である ([Na13a] Proposition 2.22). [Na13a], [Na13b] では, Bloch-加藤 exponential 射, 及び Perrin-Riou exponential 射に関して知られていた様々な定理を, この明示的な定義を用いてより簡単な方法で, さらにはより一般の場合に証明している.

この定理 (1), (3) を用いて, 基底 $\theta_A(T) \in \Delta_{A,1}(T) \otimes_A \det_A D_{\mathrm{dR}}(T)$ と同じ方法で, 基底

$$\theta_A(M) \in \Delta_{A,1}(M) \otimes_A \det_A D_{\mathrm{dR}}(M)$$

を定義する. 定理 (2) より, de Rham A-表現 T に対して, 同型 $\Delta_{A,1}(T)\otimes_A \det_A D_{\mathrm{dR}}(T) \xrightarrow{\sim} \Delta_{A,1}(D_{\mathrm{rig}}(T))\otimes_A \det_A D_{\mathrm{dR}}(D_{\mathrm{rig}}(T)))$ の下で, 等式

$$\theta_A(T)=\theta_A(D_{\mathrm{rig}}(T))$$

が成立する. よってさらに, 自然な同型 $\Delta_A(T)\xrightarrow{\sim}\Delta_A(D_{\mathrm{rig}}(T))$ の下で, 等式

$$\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{A,\xi}(T)=\varepsilon^{\mathrm{geom}}_{A,\xi}(D_{\mathrm{rig}}(T))$$

が成立する.

2.3 Robba 環上の (φ,Γ)-加群に対する局所 ε-予想

以上の準備を用いて, [Na13b] では次の予想を立てた ([Na13b] Conjecture 3.9).

予想 2.7. (*Robba* 環上の (φ,Γ)-加群に対する局所 ε-予想) $\mathbb{Z}_p$ 上の基底 $\xi\in\Gamma(\overline{\mathbb{Q}}_p,\mathbb{Z}_p(1))$, $\mathbb{Q}_p$ 上のアフィノイド代数 A, $\mathcal{R}_A$ 上の (φ,Γ)-加群 M からなる各三つ組み (ξ,A,M) に対して, 予想 *1.2* の条件と同様の条件 (i), $(ii),(iii),(iv)$, 及び次の条件 (v) を満たす A 上の基底

$$\varepsilon_{A,\xi}(M)\in\Delta_A(M)$$

が唯一つ存在する.

(v) 任意の連続準同型 $\Lambda\to A$, 及び任意の Λ-表現 T に対し, 自然な同型 $\Delta_\Lambda(T)\otimes_\Lambda A\xrightarrow{\sim}\Delta_A(D_{\mathrm{rig}}(T\otimes_\Lambda A))$ の下で, 等式

$$\varepsilon_{\Lambda,\xi}(T)\otimes 1=\varepsilon_{A,\xi}(D_{\mathrm{rig}}(T\otimes_\Lambda A))$$

が成立する.

この予想に関して, [Na13b] では次の定理を証明した.

定理 2.8. (*[Na13b]* Theorem 3.9) 階数 1 の *Robba* 環上の (φ,Γ)-加群に対して予想 2.7 は正しい. つまり, M が $\mathcal{R}_A$ 上階数 1 となる任意の三つ組み (ξ,A,M) に対して, 条件 $(i),(iii),(iv),(v)$ を満たす基底 $\varepsilon_{A,\xi}(M)\in\Delta_A(M)$ が唯一つ存在する. 特に, 任意の連続環準同型 $\Lambda\to A$, 及び任意の階数 1 の Λ-表現 T に対して, 加藤和也氏が [*Ka93b*] で構成した ε-元 $\varepsilon_{\Lambda,\xi}(T)\in\Delta_\Lambda(T)$ は, 等式 $\varepsilon_{\Lambda,\xi}(T)\otimes 1=\varepsilon_{A,\xi}(D_{\mathrm{rig}}(T\otimes_\Lambda A))$ を満たす.

注意 2.9. この定理の証明の方針は, 基本的には加藤和也氏による階数 1 の Λ-表現の場合の証明と同様である. 証明は大きく分けて, ε-元の構成 ([Na13b]§4.1) の部分と, 幾何的な表現に対する特徴付け ((iv) の条件) の確認 ([Na13b] §4.2) の部分との二つに分かれる. ε-元 $\varepsilon_{A,\xi}(M)\in\Delta_A(M)$ の構成について, まずは ε-元の底変換との両立性を用いて普遍的な階数 1 の (φ,Γ)-加群の場合の ε-元の構成に帰着する. 普遍的な場合は, Coleman 準同型の理論を, 普遍的な階数 1 の (φ,Γ)-加群に対して一般化することで ε-元を構成する. Coleman 準同型の理論を (φ,Γ)-加群に一般化するためには, (φ,Γ)-加群の岩澤コホモロジーの理論 ([Po12], [KPX13]) と Robba 環の p-進 Fourier 解析的な表示

(Amice-Colmez 変換) を用いる. (iv) の条件の確認では, (φ, Γ)-加群の Bloch-加藤 exponential 射及び双対 exponential 射の明示的な定義 ([Na13a] Proposition 2.22) を用いて, 一般化した Coleman 準同型 (の理論) の幾何的な表現での値を具体的に計算する ([Na13b] Proposition 4.12, 4.18). この部分は, 加藤和也氏による明示的相互法則 ([Ka93a] II.§2 Theorem 2.1.2) の (φ, Γ)-加群への一般化とみなせる.

参考文献

[BB08] D.Benois, L.Berger, Théorie d'Iwasawa des représentations cristallines. II, Comment. Math. Helv. 83 (2008), no. 3, 603-677.

[Be-Co08] L.Berger, P.Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, Astérisque 319 (2008), 187-212.

[BK90] S. Bloch, K.Kato, L-functions and Tamagawa numbers of motives. The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333-400, Progr. Math. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.

[CC98] F. Cherbonnier,P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes. Invent. Math. 133 (1998), 581-611.

[Co08] P.Colmez, Représentations triangulines de dimension 2, Astérisque 319 (2008), 213-258.

[De73] P.Deligne, Les constantes des éqations fonctionelles des fonctions L, Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 501-597. Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973.

[Fo90] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, I in The Grothendieck Festschrift, Vol. 2, Progr. Math. 87, Birkhäuser, Boston, 1990, 249-309.

[FK06] T.Fukaya, K.Kato, A formulation of conjectures on p-adic zeta functions in non commutative Iwasawa theory, Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XII (Providence, RI), Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 219, Amer. Math. Soc., 2006, pp. 1-85.

[Ka93a] K. Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}. Arithmetic algebraic geometry, Lecture Notes in Mathematics 1553, Springer- Verlag, Berlin, 1993, 50-63.

[Ka93b] K.Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}. Part II. Local main conjecture, preprint.

[Ke04] K.Kedlaya, A p-adic local monodromy theorem, Ann. of Math. (2) 160 (2004), 93-184.

[KL10] K.Kedlaya, R.Liu, On families of (φ, Γ)-modules, Algebra and Number Theory 4 (2010), no7, 943-967.

[KPX13] K.Kedlaya, J.Pottharst, L.Xiao, Cohomology of arithmetic families of (φ, Γ)-modules, to appear in Journal of the American Mathematical Society.

[Ki03] M.Kisin, Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, Invent. Math. 153 (2003), 373-454.

[KM76] F.Knudsen, D.Mumford, The projectivity of the moduli space of stable curves I, Math. Scand. 39 (1976), no. 1, 19-55.

[Li08] R.Liu, Cohomology and duality for (φ, Γ)-modules over the Robba ring, Int. Math. Res. Not. IMRN (2008), no. 3.

[LVZ13] D.Loeffler, O.Venjakob and S.Zerbes, Local epsilon isomorphisms, preprint arXiv:1303.1785.

[Ma73] B.Mazur, Notes on the étale cohomology of number fields, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 6 (1973) 521-556.

[Na10] K.Nakamura, Deformations of trianguline B-pairs and Zariski density of two dimensional crystalline representations, preprint arXiv:1006.4891.

[Na11] K.Nakamura, Zariski density of crystalline representations for any p-adic field, preprint arXiv:1104.1760.

[Na13a] K.Nakamura, Iwasawa theory of de Rham (φ, Γ)-modules over the Robba ring, to appear in Journal de l'Institut de Mathematiques de Jussieu (2013).

[Na13b] K.Nakamura, A generalization of Kato's local ε-conjecture for (φ, Γ)-modules over the Robba ring, preprint arXiv:1305.0880.

[Po13] J. Pottharst, Analytic families of finite-slope selmer groups, Algebra and Number Theory 7-7 (2013), 1571-1612.

[Po12] J. Pottharst, Cyclotomic Iwasawa theory of motives, preprint.

[Ve13] O.Venjakob, On Kato's local ε-isomorphism Conjecture for rank one Iwasawa modules, Algebra and Number Theory (2013).

[Ya09] S.Yasuda, Local constants in torsion rings, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 16 (2009), no. 2, 125-197.