楕円曲面の特異ファイバーの研究とその応用

三井健太郎（神戸大理）

1　序

本稿では，主に楕円曲面の不変量の研究について報告する．束構造を持つ代数多様体の研究において特異ファイバーの研究は重要である．その理由は，多くの場合に求めたい不変量の情報が特異ファイバーへ集中しているためである．ここでは任意標数 p の代数的閉体 k 上の楕円曲面の場合を中心に，標準束と基本群を求めることを目標とした特異ファイバーの研究を紹介する．また最後に，アーベル多様体族の場合に派生した問題を論じる．

2　標準束

複素解析楕円曲面 $f\colon X \to C$ の標準束 ω_X は標準束の公式を用いて表すことができた [Kod64, p. 772]．この公式は，特異ファイバーを $\{F_x\}_{x\in S\subset C}$ と書くとき

$$\omega_X \cong f^*\mathscr{L} \otimes \mathscr{O}_X\left(\sum_{x\in S} \frac{a_x}{m_x} F_x\right)$$

で与えられる．ここで $\mathscr{L}$ は C 上の直線束，m_x は F_x の重複度であり，次が成り立つ：

（1）$\deg \mathscr{L} = \chi(\mathscr{O}_X) - 2\chi(\mathscr{O}_C)$.

（2）$a_x = m_x - 1$.

また，$\chi(\mathscr{O}_X)$ は f の特異ファイバーの既約成分の型から計算できる．従って，特異ファイバーの不変量から多重種数のような X の重要な不変量を決定できる．

Bombieri と Mumford は同様の公式を任意標数の代数的閉体上の楕円曲面に対して与えた [BM77]．標数０の場合には複素解析的な場合と本質的な違いはないが，正標数の場合には（１）と（２）のいずれも一般には成り立たない．曲線 C の閉点 x に対し $\mathscr{O}_{X,x}$-加群 $(R^1 f_* \mathscr{O}_X)_x$ のねじれ部分の長さを l_x で表す. このとき，次が成り立つ：

（１'）$\deg \mathscr{L} = \chi(\mathscr{O}_X) - 2\chi(\mathscr{O}_C) + \sum_{x \in S} l_x$.

（２'）$0 \leq a_x < m_x$.

整数 $\chi(\mathscr{O}_X)$ は f のヤコビ束から求めることができる（[CD89, 5.3.6] と [Ogg67, p. 20]）．上述の標準束の公式を使うためには不変量 l_x と a_x を決定しなければならない．しかしながら，これらの不変量に関して部分的な結果しか知られていない [BM77]，[KU85]，[KU86]，[CD89]，[LLR04]. 楕円曲面の分類を進める上でもこの問題の解決は重要である．以下，得られた結果を述べる．

不変量 l_x と a_x を体系的に調べるために，底空間を円盤の類似物で置き換え局所的な場合を考える．即ち，底空間を代数的閉体を剰余体に持つ完備離散付値環とする．そうすることによって，算術幾何と双有理幾何の手法が使えるようになる．また，局所的な場合に得られた結果は大域的な場合の研究へ応用できる [Mit].

R を剰余体 k をもつ完備離散付値環とする．k は標数 $p \geq 0$ の代数的閉体とし，R の分数体を K と書く．$C := \operatorname{Spec} R$ とおく．C 上の**楕円束**とは，一般ファイバーが幾何学的連結な種数１の非特異曲線となる固有平坦正則 C-スキームのことである．特殊ファイバーが例外因子を含まないとき楕円束は**極小**であるという．以下，C 上の極小楕円束に関する結果を述べる．

極小楕円束 $f\colon X \to C$ の一般ファイバーを X_K と書く．特殊ファイバーの型を ${}_mT$（小平の型）と書く．m は重複度である．$p = 0$ のときは重複ファイバーの型 T は I_n $(n \geq 0)$ である．しかし，$p > 0$ のときはそれ以外の型でも重複ファイバーとなる．整数 $u(T)$ と $v(T)$ を表１で定義する．

f の相対双対層を ω_f と書く．f の特殊ファイバーを X 上の因子 D を使って mD と書く．f に付随した不変量の組 (l, a) を考える：

（１）R-加群 $\Gamma(C, R^1 f_* \mathscr{O}_X)$ のねじれ部分の長さ l.

T	I_n	I_n^*	II	II^*	III	III^*	IV	IV^*
$u(T)$	1	2	6	6	4	4	3	3
$v(T)$	0	0	4	0	2	0	1	0

表 1: 整数 $u(T)$ と $v(T)$ の定義.

（2）自然な単射準同型

$$f^* f_* \omega_f \longrightarrow \omega_f.$$

が誘導する同型

$$\omega_f \cong f^* f_* \omega_f \otimes \mathscr{O}_X(aD)$$

に現れる整数 a.

このとき不等式 $0 \leq a < m$ が成り立つ．もし $m = 1$ ならば $(l,a) = (0,0)$ が成り立つ．次数 d の有限次分離拡大体 K'/K をとる．R' を K' における R の整閉包とする．$C' := \operatorname{Spec} R'$ と $X_{K'} := X_K \times_K K'$ とおく．$X_{K'}$ の極小正則 C'-モデル $f' \colon X' \to C'$ をとる．f' の特殊ファイバーの型を ${}_{m'}T'$ と書く．上述と同様に f' に付随した不変量の組 (l',a') を定義する．不変量の二つの組 (l,a) と (l',a') の間の関係を明らかにすることで，不変量を求める手段を与える．次の定理により，$p \nmid u(T)$ のときは $T = \mathrm{I}_n$ $(n \geq 0)$ の場合に帰着させることができる：

定理 2.1. $p \nmid u(T)$ と $d = u(T)$ を仮定する．もし $T = \mathrm{I}_n$ $(n \geq 0)$ または I_n^* $(n \geq 0)$ ならば $n' := dn$ とおく．その他の場合には $n' := 0$ とおく．このとき ${}_{m'}T' = {}_m\mathrm{I}_{n'}$ と

$$u(T)(ml + a) = m'l' + a' + v(T)(m' - 1)$$

が成り立つ．

不等式 $0 \leq a < m$ が成り立つから，$ml + a$ を m で割った商が l で余りが a になる．従って，$ml + a$ と m がわかれば l と a がわかる．R' の付値を正規化し値群が $\mathbb{Z}$ となるようにして，R'/R の different の付値を $d_{C'/C}$ と書く [Ser79, IV, §1]. $T = \mathrm{I}_n$ $(n > 0)$ の場合は [LLR04, §8] で得られていた：

定理 2.2 (Liu–Lorenzini–Raynaud)**.** $T = \mathrm{I}_n$ $(n > 0)$ と仮定する．このとき $d = m$ と $m' = 1$ を満たす被覆 C'/C が C 上の同型の差を除き一意的に存在し，

$$ml + a = d_{C'/C}$$

が成り立つ．

$T = \mathrm{I}_0$ と仮定する．すると自然な射影 $X_{K'} \to X_K$ のモデル $\pi_X : X' \to X$ が取れる．$\mathscr{O}_X$ と $\mathscr{O}_{X'}$ を特殊ファイバーに沿って局所化することで付値環の有限拡大が得られる．$d_{X'/X}$ でその different の付値を表す．残された場合 $T = \mathrm{I}_0$ は次の定理を使って計算できる：

定理 2.3. $T = \mathrm{I}_0$ と仮定する．このとき

$$\frac{dm'}{m}(ml + a) = m'l' + a' + m'd_{C'/C} - d_{X'/X}$$

が成り立つ．

$d = m$ と $m' = 1$ が成り立つように被覆 C'/C が取れる．このとき $(l', a') = (0, 0)$ が成り立つ．定理を使って不変量 l と a を決定するには $d_{X'/X}$ を求めなければならない．射 $\pi_X : X' \to X$ は étale 部分（最も大きな X の中間有限 étale 被覆）と non-étale 部分に分けて考えることができる．もし π_X が étale 部分ならば $d_{X'/X} = 0$ が成り立つ．従って，π_X は non-étale 部分と仮定することができる．一般に，一般ファイバー X_K は Galois コホモロジー $H^1(K, E_K)$ の元 η に対応する．ここで E_K は X_K のヤコビアンである．このとき，K の付値を用いて η の「大きさ」を定義することができ，その量を使って $d_{X'/X}$ を決定できる．このようにして，最終的に不変量の組 (l, a) が求まる．

上述の三つの定理は，$p \mid u(T)$ の場合を含むさらに一般的な定理から導かれる．ただし，一般の場合には基底変換の特異点解消の難しさから不変量の計算はより困難になる．定理の証明は，二つの準同型

$$\tau\colon H^1(X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow H^1(E, \mathscr{O}_E)$$

と

$$\tau'\colon H^1(X', \mathscr{O}_{X'}) \longrightarrow H^1(E', \mathscr{O}_{E'})$$

の比較により与えられる．これらの準同型は，一般ファイバーにおけるヤコビアンの Lie 代数の間の準同型を拡張して定義される（[LLR04] の Theorem 3.8）．標準的な同型

$$H^1(X_K, \mathscr{O}_{X_K}) \otimes_K K' \cong H^1(X_{K'}, \mathscr{O}_{X_{K'}}),$$

を用いることで，$H^1(X, \mathscr{O}_X)$ と $H^1(X', \mathscr{O}_{X'})$ の $H^1(X_{K'}, \mathscr{O}_{X_{K'}})$ への像を比較できる．これらの差は，π_X が存在する場合には $\pi_X : X' \to X$ と $\pi_C : C' \to C$

の分岐に関係した不変量を使って求めることができる．一般の場合には，X と X' の一般ファイバーの特異モデルを使って，以下のように両者の不変量を比較する．

まず，重複ファイバーの解消と構成を復習する [Kod63, §6]．$p=0$ の場合には，重複度 m の重複ファイバーは，m 次の完全分岐巡回拡大による基底変換と正規化により重複のないファイバーにできる．このとき楕円束の全空間の間に誘導される射は étale である．逆に，任意の重複度 m の重複ファイバーは，重複のないファイバーを持つ楕円束への位数 m の同変群作用による étale 商として得られる．特に，この商写像を使って X と X' の不変量を比較できる．

しかし，$p>0$ の場合には，重複ファイバーは étale 被覆により解消されるとは限らない．一般には重複ファイバーの良い解消を構成する問題は難しい [KU85]，[KU86]．他方，次のような判定法がある：楕円束 $f\colon X\to C$ が重複ファイバーを持たないための必要充分条件は f の一般ファイバーが K-有理点を持つという条件で与えられる．従って，被覆 $\pi_C\colon C'\to C$ で次の条件を満たすものが存在することはすぐにわかる：$X\times_C C'$ のいかなる正則 C'-モデル X' も重複ファイバーを持たない．しかし残念ながら，一般には一般ファイバーの正則 C-モデル X と一般ファイバーの正則 C'-モデル X' をどのように取っても有限射 $X'\to X$ が存在しない場合がある．特に，このような射を使って X と X' の不変量を比較することができない．この困難を克服するために，一般ファイバーの特異モデルの間の有限射 $\pi_{\widetilde{X}}\colon \widetilde{X}'\to\widetilde{X}$ を研究する．ここで，双有理幾何の手法を用いて反射層の理論を応用する．最終的に，π_C と $\pi_{\widetilde{X}}$ の分岐を詳しく調べることで X と X' の不変量を比較できるようになり，X と X' の不変量の間の関係式が得られる．

応用として，小平次元 0 の楕円曲面の分類表 2 が得られる．以下のような記号を用いる．χ は $\chi(\mathscr{O}_X)$，p_g は X の幾何種数，g は C の種数，l は $R^1f_*\mathscr{O}_X$ のねじれ部分の長さの合計，n は X の標準束の Picard 群における位数，p は基礎体 k の標数，(a_i/m_i) は上述の重複ファイバーに付随した不変量，列 N は曲面 X の名前（[BM77] と [BM76]）：K：$K3$ 曲面，E：古典 Enriques 曲面，N：非古典 Enriques 曲面，A：アーベル曲面（ここでは二つの楕円曲線の積になる），H：超楕円曲面，Q：準超楕円曲面．列 j はヤコビアン束の j-不変量：C：任意の定数，O：通常 j-不変量と等しい任意の定数，S：超特異 j-不変量と等しい任意の定数.「存在しない」と書いてある行は，Bombieri と Mumford の表にあったものである [BM77].

χ	p_g	g	l	(a_i/m_i)	n	p	N	j	例または非存在性
0	0	0	0	$(1/2,1/2,1/2,$	2	$\neq 2$	H	C	[H] a, [Mit13]
				$1/2)$		2	Q	O	[Q] a, [Mit13]
				$(2/3,2/3,2/3)$	3	$\neq 3$	H	C	[H] b, [Mit13]
						3	Q	O	[Q] a, [Kat95, §5.2], [Mit13]
				$(1/2,3/4,3/4)$	4	$\neq 2$	H	C	[H] c, [Mit13]
						2	Q	O	[Q] d, [Mit13]
				$(1/2,2/3,5/6)$	6	$\neq 2,3$	H	C	[H] d, [Mit13]
						2	Q	O	[Q] b, [Mit13]
						3	Q	O	[Q] b, [Mit13]
0	0	0	1	$(0/2^*,1/2,1/2)$	2	2	Q	O	[Q] c, [Mit13]
				$(1/2^*,1/2)$	2	2			存在しない
				$(1/3^*,2/3)$	3	3	Q	O	[Q] c, [Kat95, §5.2], [Mit13]
				$(1/4^*,3/4)$	4	2	Q	O	[Q] e
				$(2/4^*,1/2)$	2	2			存在しない
				$(2/6^*,2/3)$	3	2	H	O	[H] d, [KU85, §8.4]
							Q	S	[Q] g
				$(3/6^*,1/2)$	2	3	H	O	[H] d, [KU85, §8.4]
							Q	S	[Q] e
0	1	0	2	$(0/p^{u*})$					
				$u=1$	1	2	H	O	[H] a, [KU85, §8.1]
							Q	S	[Q] f ($\lambda=0$), [Q] h
				$u=1$	1	3	H	O	[H] b, [KU85, §8.1]
							Q	S	[Q] d, [Q] f
				$u=2$	1	2	H	O	[H] c, [KU85, §8.2]
				その他	1	>0			存在しない
				$(0/p^{u*},0/p^{v*})$					
				$u=1, v=1$	1	2	H	O	[H] a
							Q	S	[Q] f ($\lambda\neq 0$)
				その他	1	>0			存在しない
0	1	1	0	なし	1	任意	A	C	二つの楕円曲線の積
						2	H	C	[H] a, [H] c, [KU85, §8.1, §8.2]
						3	H	S	[H] b, [KU85, §8.1]
0	0	1	0	なし	2	$\neq 2$	H	C	[H] a, [Mit13]
					3	$\neq 3$	H	C	[H] b, [Mit13]
					4	$\neq 2$	H	C	[H] c, [Mit13]
					6	$\neq 2,3$	H	C	[H] d, [Mit13]
1	0	0	0	$(1/2,1/2)$	2	任意	E		
1	1	0	1	$(0/2^*)$	1	2	N		
2	1	0	0	なし	1	任意	K		$K3$ Kummer 曲面

表 2: 小平次元 0 の相対的極小楕円曲面 $f\colon X \to C$ の不変量．[H]=[BM77, §3, p. 37], [Q]=[BM76, §2, p. 214].

3　基本群

代数多様体の位相的基本群は古くから研究されているが，étale 基本群については難しく，特に正標数の場合に知られていることは少ない．ここでは束構造を持つ代数多様体の étale 基本群を求める問題について論じる．束構造を持つ位相多様体の位相的基本群はホモトピー完全列を使って計算できた．代数多様体族の場合でも束構造が非特異であればホモトピー完全列を使って計算できる．しかし，通常，代数多様体族は特異ファイバーを持つ．従って，特異ファイバーを持つ代数多様体族にも応用できるホモトピー完全列を構成する必要がある．以下，そのようなホモトピー完全列の構成に関して得られた結果を紹介し，楕円曲面の場合への応用を解説する．

点付き連結局所 Noether スキーム $(X,\bar{x})$ の étale 基本群を $\pi_1(X,\bar{x})$ と書く．以下，基点 $\bar{x}$ は省略する．スキームの間の射は，忠実平坦かつ各ファイバーが幾何学的被約のとき **separable** という．局所 Noether スキームの間の固有 separable 射 $f\colon X \to S$ が $\mathscr{O}_S = f_*\mathscr{O}_X$ を満たしているとする．言い換えれば，次のようになる：

（１）X と S は局所 Noether スキーム.

（２）$f\colon X \to S$ は忠実平坦固有射.

（３）f に付随した準同形 $\mathscr{O}_S \to f_*\mathscr{O}_X$ は同形.

（４）f の各幾何学的ファイバーは被約.

f の幾何学的ファイバー $i\colon F \to X$ をとる．このとき Grothendieck は，i と f が誘導する列

$$\pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S) \longrightarrow 1$$

が完全であることを示した [Gro71, X.1]．しかし，条件（４）は代数多様体族の場合へ応用するには強すぎる条件である．例えば楕円曲面の場合，条件（４）は必ずしも満たされない．

そこで，上述の完全列をより一般の場合へ応用できるように修正する．以下，任意の局所 Noether スキームを考える代わりに，正則整スキームの場合について考える．具体的には $f\colon X \to S$ が次の条件を満たす場合を考える：

（1'）X と S は正則整スキーム．

（2'）$f\colon X \to S$ は忠実平坦かつ有限型.

（3'）$\mathscr{O}_S$ は $f_*\mathscr{O}_X$ の中で整閉.

（4'）f の幾何学的一般ファイバーは被約.

例えば楕円曲面はこれらの条件を満たす．i_* はそのままにしておいて上述のホモトピー完全系列を一般化するためには，$\pi_1(S)$ をより大きな群に置き換えなければならない．そのためにスキーム論の枠組みで軌道体とその基本群を定義する．

軌道体 (S,B) を局所 Noether 正規スキーム S と分岐のデータ B の組として定義する．分岐のデータは余次元１の点に対して，その局所環の強 Hensel 化の有限次 Galois 拡大で与える．大雑把にいって，底スキームの間の有限射が高々与えられた分岐条件を満たすとき，その射を軌道体の射であると定義する．また，分岐条件が丁度分岐と一致するとき，その射が étale であると定義する．底スキームが代数的閉体上の曲線である場合には軌道体は Deligne–Mumford スタックと見做すことができるが，一般には異なる概念であり，軌道体は基本群の計算へ応用しやすい．軌道体 (S,B) の基本群を $\pi_1(S,B)$ と書く．ただし，ここでも基点は省略した．f の連結被約幾何学的ファイバー $i\colon F \to X$ をとる．このとき，射 f は軌道体 (S,B) と自然な準同形 $f_*^{\mathrm{orb}}\colon \pi_1(X) \to \pi_1(S,B)$ を誘導し，結果として完全列

$$\pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X) \xrightarrow{f_*^{\mathrm{orb}}} \pi_1(S,B) \longrightarrow 1$$

を得る．ここで B は，余次元１の f の被約でない幾何学的ファイバーから決まる．

完全性の証明の概略は次のようになる．X の étale 被覆（有限，étale，かつ，全射）と f の合成は，Stein 分解と類似した方法で分解できる．有限射の部分を局所的に解析することで，局所的には現れうる分岐のうちで最大のものが存在することがわかる．これが B を与える．逆に，(S,B) の étale 被覆で f を基底変換し，正規化を取ると X の étale 被覆が得られる．これらの結果を用いると完全性を証明できる．

代数的閉体上の楕円曲面の場合へ応用すると，楕円曲面の単連結性判定法が得られる：

定理 3.1. 標数 $p \geq 0$ の代数的閉体 k 上の相対的極小楕円曲面 $f\colon X \to C$ をとる．C の各閉点 x に対し

$$m_x := \begin{cases} m, & f^{-1}(x) \text{ の小平の型は } {}_m\mathrm{I}_n\ (n \geq 0), \\ 1, & \text{その他} \end{cases}$$

とおく．$p \nmid n_x$ と $n_x \mid m_x$ を満たす最大の整数を n_x とする（$p = 0$ のときは $n_x = m_x$）．このとき，X が単連結であるための必要充分条件は次の 6 条件で与えられる：

（1）$\chi(\mathscr{O}_X) > 0$.

（2）$C \cong \mathbb{P}^1_k$.

（3）$\sharp\{x \in C(k) \mid n_x > 1\} \leq 2$.

（4）$x \neq y$ のとき $\gcd(n_x, n_y) = 1$.

（5）もし $p > 0$ であり，$f^{-1}(x)$ の型が ${}_m\mathrm{I}_n$ $(n > 0)$ なら，$p \nmid m$.

（6）もし $p > 0$ であり，$(f^{-1}(x))_{\mathrm{red}}$ が通常型楕円曲線と同形なら，$\mathscr{O}_{C,x}$-加群 $(R^1 f_*\mathscr{O}_X)_x$ はねじれ部分を持たない.

さらに，これらの条件のうちいずれを省くこともできない.

重複ファイバーを持つ複素解析楕円曲面は対数変換を使って構成できた [Kod64, §4]．代数的な場合にも類似の方法があるので，重複ファイバーを持つ楕円曲面の様々な例を構成することができる [Lan86]，[CD89, V, §4]，[Mit13]，[Mit]．位相的基本群の場合，複素解析楕円曲面の単連結性判定法は Moishezon により与えられていた [Moi77, II, §2, p.191]．証明には可微分多様体の変形を用いる．上述の定理は，先ほど解説したホモトピー完全列を応用して，任意標数に通用する代数的方法により証明する.

複素解析楕円曲面 $f\colon X \to C$ の位相的基本群に関する研究を復習する．f の非特異ファイバー $i\colon F \to X$ をとる．i は準同形写像 $i_*\colon \pi_1(F) \to \pi_1(X)$ を誘導する．$\pi_1(X)$ を研究するために飯高は $\operatorname{Coker} i_*$ として現れうる群を，対数変換と van Kampen の定理を応用して決定した [Iit71, §4]．また，$\operatorname{Coker} i_*$ は軌道体の基本群を使って記述できる [Ue86, §1]，[FM94, 1.3.6]．この方法は，特異ファイバーをもつ Seifert 束 [Sei33] は底空間を軌道体に取り換えれば非特異ファイバー束と見做せるという観察に基づく [Thu80].

上述のホモトピー完全列は，このアイデアをスキームの枠組みで発展させて得られた．

代数的楕円曲面の étale 基本群の場合へ話を戻す，$\chi(X)=0$ の場合，i_* は単射である．そうでない場合，i_* は零写像である．証明は f をヤコビアン束の場合に帰着させて行う．$\mathrm{Im}\, i_*$ については標数による違いは現れない．しかし，代数的な場合と複素解析的な場合では違いが現れる．Hopf 曲面がその例を与える．$\mathrm{Coker}\, i_*$ については，代数的な場合と複素解析的な場合に違いは現れない．しかし，標数０と正標数の間では違いが現れる．以下，この違いについて説明する．

正標数の場合には標数０の場合よりも複雑な曲線の被覆が現れる．局所的な様子も複雑になり，例えば Artin–Schreier 被覆のような拡大次数だけからは決まらない被覆が生じる．標数０の場合には拡大次数から Kummer 被覆が一意に決まるので，これは大きな違いである．この違いにより，複素解析的な場合 [Kod63, §6] と比べ正標数の場合には重複ファイバーの解消が難しくなる [KU85, §§6–7]，[KU86, §2]，[LLR04, §8.6]．楕円曲面から誘導される軌道体に付随する分岐条件を求めるためには，この困難を解決しなければならない．Galois コホモロジーの計算などを経て，最終的には分岐条件として巡回拡大しか現れないことがわかる．結果として，分岐条件が巡回拡大になるような軌道体の研究が重要になる．上述の定理を示すには，その中で単連結なものを分類すればよく，そのために次の被覆が存在するか調べることになる：

（１）正種数の曲線の一点の上でのみ順分岐する被覆.

（２）有理曲線の高々二点の上で順分岐する被覆.

（３）有理曲線の三点の上で順分岐する被覆.

（４）曲線の一点の上で暴分岐する被覆.

（２）は簡単であるが，そのほかの場合は与えられた分岐を持つ被覆の構成が難しくなる.（１）には Kummer 理論,（４）には Artin–Schreier–Witt 理論が応用できる.（３）の場合には，複素数体上の性質の良い被覆を正標数へ退化させて構成する．こうして得られた被覆は他の問題へも応用することができ，Fenchel の予想と呼ばれる次の定理の別証が得られる [Fox52], [Cha83]：任意の Fuchs 群は有限指数のねじれのない部分群を持つ.

定理に現れる条件（５）と（６）は正標数の場合のみ現れる．これらが満たされない場合に非自明な étale 被覆がとれることはすでに観察され

ていた [KU85, §§6–7]．この現象は，Galois コホモロジーなどを用いて体系的に研究することができ，このような形で定理に現れる．

4　周期と指数の問題

重複ファイバーの解消問題の高次元化として，周期と指数の問題（period-index problem）を考察する．体 K 上のアーベル多様体 A_K のトーサー X_K をとる．X_K に対応するは $H^1(K, A_K)$ の元の位数を X_K の**周期（period）**という．指数（index）については後で述べる．以下，K を局所体，または，代数的閉体を剰余体にもつ完備離散付値体と仮定する．アーベル多様体 A_K の Néron モデルの特殊ファイバーの単位成分（identity component）が通常型アーベル多様体のトーラスによる拡大であるとき，A_K は**通常型準アーベル還元**を持つという．次の定理が周期と指数の研究で得られた主結果である：

定理 4.1. K を局所体，または，代数的閉体を剰余体にもつ完備離散付値体とする．K 上の g 次元アーベル多様体 A_K をとる．A_K は通常型準アーベル還元を持つと仮定する．T_k で A_K の還元のトーラス部分を表す．不等式 $\dim T_k \leq g-2$ が成立するか，T_k が分裂すると仮定する．このとき，周期が P である A_K のトーサーは，次数が P^g を割り切る K 上分離的有理点を持つ．

トーサーの周期とトーサーの 0-サイクルの次数の間の関係を探る問題は，**周期と指数の問題（period-index problem）**と呼ばれている．これまでに，Lang–Tate [LT58]，Lichtenbaum [Lic68]，Milne [Mil70]，Gerritzen [Ger73]，Krashen–Lieblich–Bhargav [KL08]，Clark [Cla10] らによって研究されてきた．定理の P^g の指数 g は減らせないことが知られている．A_K が通常型良還元を持つ場合，定理の仮定は満たされる．還元に関する仮定のもと，定理はこれまでに知られている結果を一般化し，また，上限の評価を改良している．

これまでに知られている結果をまとめる．X_K を周期が P であるアーベル多様体 A_K のトーサーとする．X_K の 0-サイクルの最小正次数を X_K の**指数（index）**という．指数を I で表す．P と I の関係を調べるのが周期と指数の問題である．これは中心的単純 K-代数の分裂拡大体の次数を評価する問題と類似の問題である [LT58, pp. 669–670]．g を A_K の次元とする．問題をはっきりさせるため，K が任意体の場合について考える：

命題 4.2. 次の主張が成り立つ．（１）I は X_K が分裂する全ての K の有限次分離拡大体の拡大次数の最大公約数と等しい．（２）$P \mid I$．（３）$I \mid P^{2g}$.

（１）の証明には Gabber–Liu–Lorenzini の結果を使う（[GLL13] の Theorem 9.2）.（２）はよく知られている [LT58].（３）は g 次元アーベル多様体の P 倍写像の次数が P^{2g} であることに注意すれば示せる．上限 P^{2g} は一般には減らすことができない [LT58, p. 678]．しかし，K が局所体の場合には，$g=1$ の仮定のもと等式 $P=I$ が成立する [Lic68]，[Mil70]．$g \geq 2$ のとき，次の問題は未解決である．

問題 4.1. $2g$ よりも小さい正整数 e_g であって，任意の局所体上の g 次元アーベル多様体のトーサーに対して常に $I \mid P^{e_g}$ が成立するものは存在するか？

以下，K を局所体と仮定する．アーベル多様体 A_K の Néron モデルの特殊ファイバーの単位成分が分裂トーラスであるとき，A_K は**分裂トーラス還元**を持つという．このとき次が知られている．

（ａ）（Lang–Tate [LT58]）A_K が良還元を持ち K の剰余体の標数が P を割り切らないとき，X_K は分岐次数が P の倍数である任意の拡大体上で分裂する．特に，$P=I$ が成立する．

（ｂ）（Lichtenbaum [Lic68] と Milne [Mil70]）$g=1$ ならば，$P=I$ が成立する．

（ｃ）（Gerritzen [Ger73]）A_K が分裂トーラス還元を持つとき，X_K が分裂する最小の有限次分離拡大体 L/K が存在する．L/K の次数は P^g を割り切る．特に，$I \mid P^g$ が成立する．

（ｄ）（Krashen–Lieblich–Bhargav [KL08]）A_K が主偏極であり，良還元を持ち，$2 \nmid P$ であるとき，$I \mid P^g$ が成立する（[KL08] の Theorem A.2.1 と [Cla10] の Proposition 19）.

（ｅ）（Clark [Cla10]）任意の正整数 g に対して正整数 c_g が存在して，任意の局所体上の g 次元主偏極アーベル多様体のトーサーに対して $I \leq c_g P^g$ が成立する．

これらの結果から次の問題が考えられる：

問題 4.2. 任意の局所体上の g 次元アーベル多様体のトーサーに対して I は P^g を割り切るか？

P^g の指数 g が減らせないことは知られている [Ger73]，[Lic68, §6]．上述の定理はこの問題への部分的解答を与えている．

証明の方針について述べる．まず始めに，アーベル多様体に対し単位群と値群を導入するので，これらについて説明する．K の分離閉包 K^{sep} をとる．$G_K := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ とおく．$\mathscr{O}_{K^{\mathrm{sep}}}^{\times}$ を K^{sep} の単位群とし，v を K^{sep} の付値とする．このとき，G_K-加群の完全列

$$1 \longrightarrow \mathscr{O}_{K^{\mathrm{sep}}}^{\times} \longrightarrow (K^{\mathrm{sep}})^{\times} \xrightarrow{v} \mathbb{Q} \longrightarrow 1$$

が存在する．この完全列は $\mathbb{G}_{m,K}$ への G_K-作用を調べる際に便利である．リジッド幾何を用いることでアーベル多様体 A_K に対して同様の完全列

$$0 \longrightarrow C_{A_K}(K^{\mathrm{sep}}) \longrightarrow A_K(K^{\mathrm{sep}}) \longrightarrow \Phi_{A_K} \longrightarrow 0$$

を構成することができる．ここで，C_{A_K} は A_K のリジッド解析化 A_K^{an} のリジッド解析開部分群であり A_K の**単位群**と呼ぶ．また，Φ_{A_K} は $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ の有限直和に G_K-作用を定めたもので A_K の**値群**と呼ぶ．上述の完全列は A_K が潜在的良還元を持たない場合，A_K への G_K-作用を調べる際に役立つ．A_K が潜在的良還元を持つ場合には $C_{A_K} = A_K^{\mathrm{an}}$ が成り立つ．K^{sep} 内の有限次拡大体 L/K に対して，$A_K \times_K L$ の Néron モデルの特殊ファイバーの連結成分の成す有限 étale 群スキーム（component group）を $\Phi_{A_L/L}$ と書く．このとき G_K-加群 Φ_{A_K} は，K^{sep} 内の全ての有限次拡大体 L/K についての $\Phi_{A_L/L}$ の射影極限と見做すことができる．また，K がより一般の非 Archimedes 的完備付値体上のアーベル多様体の場合にも，Néron モデルを使わずに同様の完全列を構成することができる．

この完全列を使うと $A_K(K^{\mathrm{sep}})$ の研究は $C_{A_K}(K^{\mathrm{sep}})$ と Φ_{A_K} の研究に帰着する．Φ_{A_K} の構造は単純なので，主に単位群 $C_{A_K}(K^{\mathrm{sep}})$ の方が問題となる．$C_{A_K}(K^{\mathrm{sep}})$ の研究は K^{sep} の剰余体上の準アーベル多様体の研究と K^{sep} の付値環上の形式群の研究に帰着する．

次に，K の剰余体 k が代数的閉体の場合へ帰着させる．ここで楕円曲面の研究手法を応用する．楕円曲面の重複ファイバーの構成と同じ要領で，リジッド解析群 C_{A_K} のトーサーに対し付値環上の形式スキームによるモデルが取れる．この形式スキームはスキームの完備化で得られることがわかる．Gabber–Liu–Lorenzini の研究 [GLL13] を応用して，こうして得られたスキームの特殊ファイバーの解析から，トーサーの指数を評価できる．結果として k を代数的閉体としてよいことが示せる．

最終的に，k が代数的閉体の場合に C_{A_K} についての周期と指数の問題を研究することになる．C_{A_K} への G_K-作用を調べるには，A_K の Néron モ

デルの特殊ファイバーへの G_K-作用と，A_K から得られる形式群への G_K-作用を研究しなければならない．k が代数的閉体だから，前者は簡単である．後者の解析には，Cartier と梅村による p-可除群の変形理論が使える [Car71]，[Ume71]．これらの結果により，$H^1(K, C_{A_K})$ の元は分裂拡大体が上手く選ばれた有限個の $H^1(K, C_{A_K})$ の元の和の形に書ける．ここに現れる拡大体の合成体により，元のトーサー X_K が分裂することを示し証明が完了する．

参考文献

[BM76] E. Bombieri and D. Mumford, *Enriques' classification of surfaces in char. p. III*, Invent. Math. **35** (1976), 197–232.

[BM77] ______, *Enriques' classification of surfaces in char. p. II*, Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, pp. 23–42.

[Car71] P. Cartier, *Relèvements des groupes formels commutatifs*, Séminaire Bourbaki, 21eme année (1968/1969), Exp. No. 359, Lecture Notes in Mathathematics, vol. 179, Springer-Verlag, Berlin, 1971, pp. 217–230.

[CD89] F. R. Cossec and I. V. Dolgačev, *Enriques surfaces. I*, Progress in Mathematics, vol. 76, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1989.

[Cha83] T. C. Chau, *A note concerning Fox's paper on Fenchel's conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), no. 4, 584–586.

[Cla10] P. L. Clark, *The period-index problem in WC-groups IV: a local transition theorem*, J. Théor. Nombres Bordeaux **22** (2010), no. 3, 583–606.

[FM94] R. Friedman and J. W. Morgan, *Smooth four-manifolds and complex surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 27, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Fox52] R. H. Fox, *On Fenchel's conjecture about F-groups*, Mat. Tidsskr. B. **1952** (1952), 61–65.

[Ger73] L. Gerritzen, *Periode und Index eines prinzipal-homogenen Raumes über gewissen abelschen Varietäten*, Manuscripta Math. **8** (1973), 131–142.

[GLL13] O. Gabber, Q. Liu, and D. Lorenzini, *The index of an algebraic variety*, Invent. Math. **192** (2013), no. 3, 567–626.

[Gro71] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1), Augmenté de deux exposés de M. Raynaud.

[Iit71] S. Iitaka, *Deformations of compact complex surfaces. III*, J. Math. Soc. Japan **23** (1971), 692–705.

[Kat95] T. Katsura, *Multicanonical systems of elliptic surfaces in small characteristics*, Compositio Math. **97** (1995), no. 1-2, 119–134, Special issue in honour of Frans Oort.

[KL08] D. Krashen and M. Lieblich, *Index reduction for Brauer classes via stable sheaves*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2008), no. 8, Art. ID rnn010, 31, With an appendix by Bhargav Bhatt.

[Kod63] K. Kodaira, *On compact analytic surfaces: II*, Ann. of Math. (2) **77** (1963), no. 3, 563–626.

[Kod64] ———, *On the structure of compact complex analytic surfaces. I*, Amer. J. Math. **86** (1964), 751–798.

[KU85] T. Katsura and K. Ueno, *On elliptic surfaces in characteristic p*, Math. Ann. **272** (1985), no. 3, 291–330.

[KU86] ———, *Multiple singular fibres of type $\mathbf{G}_a$ of elliptic surfaces in characteristic p*, Algebraic and topological theories (Kinosaki, 1984), Kinokuniya, Tokyo, 1986, pp. 405–429.

[Lan86] W. E. Lang, *An analogue of the logarithmic transform in characteristic p*, Proc. 1984 Vancouver conference in algebraic geometry CMS Conf. Proc., vol. 6, Am. Math. Soc., 1986, pp. 337–340.

[Lic68] S. Lichtenbaum, *The period-index problem for elliptic curves*, Amer. J. Math. **90** (1968), 1209–1223.

[LLR04] Q. Liu, D. Lorenzini, and M. Raynaud, *Néron models, Lie algebras, and reduction of curves of genus one*, Invent. Math. **157** (2004), no. 3, 455–518.

[LT58] S. Lang and J. Tate, *Principal homogeneous spaces over abelian varieties*, Amer. J. Math. **80** (1958), 659–684.

[Mil70] J. S. Milne, *Weil-Châtelet groups over local fields*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **3** (1970), 273–284.

[Mit] K. Mitsui, *Logarithmic transformations of rigid analytic elliptic surfaces*, to appear in Math. Z.

[Mit13] ———, *Logarithmic transformations of rigid analytic elliptic surfaces*, Math. Ann. **355** (2013), no. 3, 1123–1170.

[Moi77] B. Moishezon, *Complex surfaces and connected sums of complex projective planes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 603, Springer-Verlag, Berlin, 1977, With an appendix by R. Livne.

[Ogg67] A. P. Ogg, *Elliptic curves and wild ramification*, Amer. J. Math. **89** (1967), no. 1, 1–21.

[Sei33] H. Seifert, *Topologie Dreidimensionaler Gefaserter Räume*, Acta Math. **60** (1933), no. 1, 147–238.

[Ser79] J. P. Serre, *Local fields*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 67, Springer-Verlag, New York, 1979.

[Thu80] W. P. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, Lecture notes, Princeton University, `http://library.msri.org/books/gt3m/`, 1980.

[Ue86] M. Ue, *On the diffeomorphism types of elliptic surfaces with multiple fibers*, Invent. Math. **84** (1986), no. 3, 633–643.

[Ume71] H. Umemura, *Formal moduli for p-divisible groups*, Nagoya Math. J. **42** (1971), 1–7.