p 進等質空間上の球関数と表現の局所密度

広中 由美子
(早稲田大学 教育・総合科学学術院)

概要：§1 で 導入と記号の設定も込めて p 進群上の球関数を振り返る．§2 以降は等質空間上の球関数について考察する．まず，等質空間上の球関数の定義と例を与え，§3 では，線形形式の空間の場合に球関数と表現の局所密度は密接な関係をもつことを紹介し，大局的応用についても言及する．§4 で，等質空間の球関数の表示式を述べる．群上の球関数の明示式に現れるデータと，考えている等質空間上の球関数の関数等式を用いて表わす式である．ワイル群の作用に関する球関数の関数等式が欲しいので，§5 では，特に単純ルートに対応する作用についての関数等式をもつための十分条件とそのときの形を紹介する．等質空間上の調和解析の例を §6 で述べる．

§1 p 進群上の球関数

この話全体で k は $\mathfrak{p}$-進体とし，その素元を π, 剰余体位数を q とし，k 上の付置 $|\ |$ は $|\pi| = q^{-1}$ と正規化しておく．k 上定義された代数的集合とその k-有理点のなす集合を，$\mathbb{G}$ と G のように対応する文字で表す.

さて，$\mathbb{G}$ は k 上定義された線形連結簡約代数群，K は G の “良い ”極大コンパクト部分群とする．G の極大 k-split torus の次元を r とする．G の K に関するヘッケ環
$\mathcal{H}(G,K) := \{\, f : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid$ 両側 K-不変，コンパクト台 $\}$
は超越次数 r の可換 $\mathbb{C}$-代数であり，KgK の特性関数たちで張られ，関数空間
$\mathcal{C}(G,K) := \{\, \Psi : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid$ 両側 K-不変 $\}$
に接合積
$f * \Psi(x) = \int_G f(g)\Psi(g^{-1}x)dg,$ $\quad dg$ は G 上の左不変測度 によって作用する.

$\omega \in \mathcal{C}(G,K)$ が $\omega(1) = 1$ で $\mathcal{H}(G,K)$-同時固有関数であるとき，G **上の** K **に関する (帯) 球関数 (zonal) spherical function** と呼ぶ.

例 1. (Satake, Macdonald) $G = GL_n(k),\ K = GL_n(\mathcal{O}_k)$ を考える．下三角ボレル部分群 B をとる．$r = n$ であり，G の両側 K 剰余類分解 (カルタン分解) は次のように与えられる：

$$G = \sqcup_{\lambda \in \Lambda_n} K\pi^\lambda K, \qquad \pi^\lambda = Diag(\pi^{\lambda_1}, \dots, \pi^{\lambda_n}),$$
$$\Lambda_n = \{\lambda \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n\} \supset \Lambda_n^+ = \{\lambda \in \Lambda_n \mid \lambda_n \geq 0\}. \tag{1.1}$$

$\mathcal{H}(G,K)$ は，対称 Laurent 多項式のなす $\mathbb{C}$-代数と同型となり，球関数を与えることと $\mathbb{C}$-代数同型 $\mathcal{H}(G,K) \longrightarrow \mathbb{C}$ を与えることは同値で，球関数は $z \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$\omega_z(g) = \int_K \psi_z(kg)dk, \tag{1.2}$$
$$\psi_z(g) = \prod_{i=1}^n |p_i|^{z_i + \frac{n-2i+1}{2}}, \quad g \in \begin{pmatrix} p_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix} K.$$

の形で与えられ，Weyl 群 W は z_i の置換として作用して，佐武同型

$$\lambda_z : \mathcal{H}(G,K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[q^{\pm z_1}, \dots, q^{\pm z_n}]^{S_n},\ f \longmapsto \widehat{f}(z) = \int_G f(g)\omega_z(g)dg \tag{1.3}$$

を与える．さらに明示式は $\lambda \in \Lambda_n$ について

$$\omega_z(\pi^\lambda) \ = \ q^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (n-2i+1)\lambda_i} \prod_{i=1}^n \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-i}} \cdot \sum_{\sigma \in W} \sigma(q^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i} \prod_{i<j} \frac{1-q^{z_i - z_j - 1}}{1-q^{z_i - z_j}})$$

と与えられる．これは，定数 c_λ と Hall-Littlewood 対称式 P_λ によって

$$\omega_z(\pi^\lambda) \ = \ c_\lambda \cdot P_\lambda(q^{-z_1}, \dots, q^{-z_n}; q^{-1}) \tag{1.4}$$

とも表示できる．但し

$$c_\lambda = \delta^{\frac{1}{2}}(\pi^\lambda) \cdot \frac{w_\lambda(q^{-1})}{w_n(q^{-1})}, \quad \delta^{\frac{1}{2}}(\pi^\lambda) = q^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (n-2i+1)\lambda_i}$$
$$w_\lambda(t) = \prod_\ell w_{m_\ell(\lambda)}(t),\ w_m(t) = \prod_{i=1}^m (1-t^i),\ m_\ell(\lambda) = \sharp\{i \mid 1 \leq i \leq n,\ \lambda_i = \ell\},$$
$$P_\lambda(x_1, \dots, x_n; t) = \frac{(1-t)^n}{w_\lambda(t)} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \prod_{i<j} \frac{1-tx_i^{-1}x_j}{1-x_i^{-1}x_j}). \tag{1.5}$$

$\{P_\lambda(x;t) \mid \lambda \in \Lambda_n\}$ は $\mathbb{C}[t][x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]^{S_n}$ の直交基底となることが分かっている．それにより，Plancherel 公式は，$\mathfrak{a}^* = \left\{\sqrt{-1}\left(\mathbb{R}/\frac{2\pi}{\log q}\mathbb{Z}\right)\right\}^n$ と $\mathfrak{a}^*$ 上の不変測度 dz を用い

て、以下のように与えられる：

$$\int_G f_1(g)\overline{f_2(g)}dg = \int_{\mathfrak{a}^*} \widehat{f_1}(z)\overline{\widehat{f_2}(z)}d\mu(z), \quad f_1, f_2 \in \mathcal{H}(G,K), \tag{1.6}$$
$$d\mu(z) = \frac{dz}{|c(z)|^2}, \quad c(z) = \prod_{i<j} \frac{1-q^{-z_i+z_j-1}}{1-q^{-z_i+z_j}}.$$

p 進群上の球関数論の発端は，Mautner([Mau58]) の PGL_2 についての論文と言ってよかろう．p 進簡約群上の球関数の一般論は Satake ([Sata63]) で展開された．Macdonald ([Mac71]) が明示式と Plancherel 公式を与え，Casselman([Cas80]) が表現論的な証明の再構成をし，Casselman-Shalika ([CS80]) は (不分岐拡大で split する場合について) Whitakker 関数の明示式が与えた．
Cartier による p 進群の表現論の論説 ([Car79]) は，Casselman の手法の解説も含み，記号の定義などが明確である．

また，Macdonald([Mac00]) は，ルート系に付随する直交多項式系 (Macdonald 多項式) の理論を展開した．単連結な p 進群の場合には明示式はこれらの多項式の特殊化で本質的に表示され，Plancherel 測度も具体的に与えられる．

§2　等質空間上の球関数 (定義と例)

先と同様に, $\mathbb{G}$ は k 上定義された線形連結簡約代数群，$\mathbb{P}$ はその k 上定義された極小放物部分群，K は G の "良い" 極大コンパクト部分群，$G = PK = KP$ とし，$\mathbb{G}$ が k 上定義された affine variety $\mathbb{X}$ に k 上作用している場合を考える (代数的閉包 $\overline{k}$ 上では推移的に作用しているとする).

数論的に興味深い $X = \mathbb{X}(k)$ を G の作用と共に考察したい．作用を $G \times X \longrightarrow X,\ (g, x) \longmapsto g \cdot x$ と表すことにする ($\overline{k}$ 上でも同じ記号).

X 上の Schwartz 空間 $\mathcal{S}(K\backslash X)$ とその代数的双対空間 $\mathcal{C}(K\backslash X)$

$$\mathcal{C}(K\backslash X) = \{\, \Psi : X \longrightarrow \mathbb{C} \mid \text{左 } K\text{-不変} \,\} \supset \mathcal{S}(K\backslash X) = \{\, \varphi \in \mathcal{C}(K\backslash X) \mid \text{コンパクト台} \,\}$$

を導入する．これらには，接合積により $\mathcal{H}(G,K)$ が作用する：

$$f * \Psi(x) = \int_G f(g)\Psi(g^{-1}\cdot x)dg, \quad f \in \mathcal{H}(G,K),\ \Psi \in \mathcal{C}(K\backslash X).$$

$\omega(\neq 0) \in \mathcal{C}(K\backslash X)$ が $\mathcal{H}(G,K)$-同時固有関数であるとき，**X 上の (K に関する) 球関数**と呼ぶ.

$\mathbb{G} \cong \mathbb{G} \times \mathbb{G}/\Delta(\mathbb{G})$ であり，$\widetilde{G} = G \times G,\ \widetilde{K} = K \times K$ とすると，$\mathcal{S}(\widetilde{K}\backslash G) = \mathcal{H}(G,K)$ (as $\mathbb{C}$-spaces) であるから，先に考えた群上の球関数を含む概念である.

$(\mathbb{G},\mathbb{X})$ について以下の条件を考える．

(A1): $\mathbb{X}$ は有限個の $\mathbb{P}$-軌道に分解する．($\Longrightarrow$ Zariski 開軌道 $\mathbb{X}^{op}$ が存在)

(A2): $\mathbb{X}$ 上の $\mathbb{P}$-相対不変式の基本系を $\mathbb{X}$ 上の正則関数にとれる．

($\mathbb{P}$ の k-有理指標の全体 $\mathfrak{X}(\mathbb{P})$ は自由アーベル群をなす．k 上定義された有理関数 $d : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ は，ある $\psi \in \mathfrak{X}(\mathbb{P})$ について $d(p \cdot x) = \psi(p)d(x),\ p \in \mathbb{P}$ をみたすとき，$\mathbb{P}$-**相対不変**であると言う．相対不変式に対応する指標の全体 $\mathfrak{X}_0(\mathbb{P})\ (\subset \mathfrak{X}(\mathbb{P}))$ の基底を与える相対不変式の系を**基本系**と呼ぶことにする.）

(A3): 任意の $y \in \mathbb{X}\backslash\mathbb{X}^{op}$ に対して，${\mathbb{P}_y}^o$ 上非自明な $\psi \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{P})$ が存在する．

(但し，${\mathbb{P}_y}^o$ は y の固定部分群の単位元連結成分を表す.)

(A4): $\mathfrak{X}(\mathbb{P})$ と $\mathfrak{X}_0(\mathbb{P})$ の階数が一致． $(n := \mathrm{rk}(\mathfrak{X}_0(\mathbb{P})) \leq r = \mathrm{rk}(\mathfrak{X}(\mathbb{P}))$ とする.)

注意： $\mathbb{X}$ は連結線形簡約群の等質空間であるから既約で，(A1) からただ一つの開軌道を持つ．$\mathbb{X}$ が球等質空間ならば (A1) はみたされる．対称空間，特に involution θ に関して $\mathbb{X} \cong \mathbb{G}/\mathbb{G}^\theta$ ならば，球等質空間である．
(A2) に関連し，概均質ベクトル空間の相対不変式の基本系は多項式関数でとれることが知られている．
(A3) は，球関数の表示式 (§4) を得るのに必要．(A4) をみたさないこともしばしばある．

以下，(A1)–(A3) を仮定する．

典型的な構成法：$d_i(x),\ 1 \leq i \leq n$ を (A2) のような $\mathbb{P}$-相対不変式の基本系とする．$s \in \mathbb{C}^n$ と $x \in X$ について，K 上の不変測度 dk を用いて

$$\omega(x;s) := \int_K |\mathbf{d}(k\cdot x)|^s\, dk, \quad |\mathbf{d}(y)|^s = \prod_{i=1}^n |d_i(y)|^{s_i}. \tag{2.1}$$

右辺の積分は，$\mathrm{Re}(s_i) \geq 0, {}^\forall i$ のときに絶対収束し，$\mathbb{C}^n$ まで q^{s_i} の有理関数として解析接続される．この意味で $\omega(x;s)$ を考えると，$\mathcal{C}(K\backslash X)$ の元であり，さらに $\mathcal{H}(G,K)$-同時固有関数であることが分かり，$\underline{\omega(x;s)\text{ は }X\text{ 上の球関数}}$となる．実際

$$\begin{aligned} &(f * \omega(\ ;s))(x) = \lambda_s(f)\omega(x;s), \quad f \in \mathcal{H}(G,K), \\ &\lambda_s(f) = \int_P f(p)\,|\psi(p)|^{-s}\,\delta(p)dp, \quad |\psi(p)|^{-s} = \prod_{i=1}^n |\psi_i(p)|^{-s_i}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

但し，dp は P 上の左不変測度，$\int_{K\cap P} dp = 1$，$\delta(p)$ は P の modulus 指標とする．

上の λ_s は $\mathcal{H}(G,K)$ の佐武同型の特殊化で得られ，ともかく，球関数は，その“固有値” $\lambda_s,\ s \in \left(\mathbb{C}/\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\log q}\mathbb{Z}\right)^n$ で parametrize されることが分かる．群上の場合は，$r = n$

で (generic な) $s \in \mathbb{C}^n$ について１次元であるが，等質空間の場合，generic $s \in \mathbb{C}^n$ で一次独立な球関数は $\sharp(P\backslash X^{op})$ だけ存在する．

次のようなことが問題となる．

・空間のカルタン分解 ($K\backslash X$ の良い代表系）を求める．

・球関数 $\omega(x;s)$ の明示式.

・X 上のすべての球関数を求める．

・関数空間 $\mathcal{S}(K\backslash X)$ の $\mathcal{H}(G,K)$-加群としての構造を定める．球関数 $\Psi(x,s)$ を核関数に用いて球フーリエ変換 $\mathcal{S}(K\backslash X) \longrightarrow \mathbb{C}(q^{s_1},\dots,q^{s_n}), \varphi \longmapsto \widehat{\varphi}(s) = \int_X \varphi(x)\Psi(x;s)dx$ を考察する．

・$\mathfrak{a}^* = \sqrt{-1}\left(\mathbb{R}/\frac{2\pi}{\log q}\mathbb{Z}\right)^n$ 上の Plancherel 測度と Plancherel 公式を与える．言い換えると $\int_X \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx = \int_{\mathfrak{a}^*} \widehat{\varphi}(s)\overline{\widehat{\psi}(s)}d\mu(s),\ \varphi,\psi \in \mathcal{S}(K\backslash X)$ をみたすように $\mathfrak{a}^*$ 上の測度を与える．

・数論的応用：§3 で述べる局所密度はその例であるし，そもそも球関数は保型形式や保型表現とは密接な関係を持っている．

例 2．対称形式 (S)，エルミート形式 (H)，交代形式 (A) の空間．いずれの場合も極小放物型部分群 P としては，下三角行列からなるボレル部分群 B をとり，以下で基本系とは B-相対不変式の基本系を意味する．行列 g の左上 i 次小行列式 を $d_i(g)$ と表すことにする．

(S): $G_n = GL_n(k),\ X_n = \{x \in G_n \mid {}^t x = x\},\ K_n = GL_n(\mathcal{O}_k)$.
基本系は $d_i(x), 1 \le i \le n$ で，対応する B の指標は $\psi_i(p) = d_i(p)^2$.

(H): ２次拡大 k'/k を一つ決めて，これに対応するエルミート行列を考える．
$G_n = GL_n(k'),\ X_n = \{x \in G_n \mid x^* = x\},\ K_n = GL_n(\mathcal{O}_{k'})$.
基本系は $d_i(x) \in k, 1 \le i \le n$ で，対応する指標は $\psi_i(p) = N_{k'/k}(d_i(p))$.
k'/k が不分岐の場合を (Hu), 分岐する場合を (Hr) と表す.

(A): $G_n = GL_{2n}(k),\ X_n = \{x \in G_n \mid {}^t x = -x\},\ K_n = GL_{2n}(\mathcal{O}_k)$.
基本系は，左上 $2i$ 次 Pfaffian $pf_i(x), 1 \le i \le n$ で，対応する指標は $\psi_i(p) = d_{2i}(p)$.
これらの空間では，球関数は表現の局所密度の生成関数ともみなせて興味深い (cf. §3).
(A): [HS88], [HS89]; (S), (H) : [H88], [H90], [H99].

例 3. $G_m = GL_m,\ SO_m,\ U_m,\ Sp_m$ などについて $G = G_n$ と $X = G_n/G_r \times G_{n-r}$ の組 $(1 \le r < n)$.

交代形式の場合や 例 3 は 条件 (A4) をみたさない.

例 4. 直交対称行列の空間 $\cong SO(n,n)/S(O(n) \times O(n))$ や ユニタリ・エルミート行列の空間 $\cong U(n,n)/U(n) \times U(n)$. p 進 (エルミート)Siegel 特異級数は，これらの空間の球関数の特別なものと捉えられ，球関数論を用いて特異級数の関数等式が求められる. ([HS06], [H11])

k'/k が不分岐 non-dyadic の場合には，球関数の明示式や Plancherel 公式も含めうまく解析できる．([HK14], [HKpp])

例 5. 対称空間ではない例として $G = Sp_2 \times (Sp_1)^2$ と $X = Sp_2$ の組をあげておこう. $SO(5)$ と isogeny である．また $Sp_{2n} \times (Sp_n)^2$ の Sp_{2n} への作用は $n = 1$ のときだけ球等質的である．([H05])

§3　球関数と局所密度

例 2 のような線形形式の空間の場合に，局所密度との関係を紹介する.

$A \in X_m,\ B \in X_n,\ m \ge n$ について，A による B の表現の**局所密度** $\alpha(A,B)$ を次式で定義する：

$$\alpha(A,B) := \lim_{\ell \to \infty} \frac{\sharp N_\ell(A,B)}{q^{\ell n(*)}}, \tag{3.1}$$

但し，$((*), N_\ell(A,B))$ は空間 X に応じて次式で与える.

$$\begin{cases} (m - \frac{n+1}{2}, \left\{ v \in M_{mn}(\mathcal{O}_k/(\pi^\ell)) \,\middle|\, {}^t vAv \equiv B(\mathrm{mod}(\pi^\ell) \right\}) & --(S) \\ (2m-n, \left\{ v \in M_{mn}(\mathcal{O}_{k'}/(\pi^\ell)) \,\middle|\, v^*Av \equiv B(\mathrm{mod}(\pi^\ell) \right\}) & --(H) \\ (4m-2n+1, \left\{ v \in M_{2m,2n}(\mathcal{O}_k/(\pi^\ell)) \,\middle|\, {}^t vAv \equiv B(\mathrm{mod}(\pi^\ell) \right\}) & --(A). \end{cases}$$

上の $N_\ell(A,B)$ の代わりに v を 正則行列に伸ばせるような (primitive) 元に限定して $N_\ell^{pr}(A,B)$ をとり， **原始的局所密度** $\alpha^{pr}(A,B)$ を定義する．$\alpha^{pr}(A,A) = \alpha(A,A)$ である.

ℓ が十分大きいとき，(3.1) の右辺の分数は ($\alpha,\ \alpha^{pr}$ とも) 一定となる.

もちろん，局所密度は A, B のそれぞれ K_m, K_n の類で不変である．球関数もその定義から K_n-不変であるから，X_n のカルタン分解が問題になり，それは次のように与えられる．以下簡単のため，$p \ne 2$ と仮定する.

カルタン分解 ($K_n\backslash X_n$ の完全代表系) は次のように知られている.

(S): $Diag(\pi^{\mu_1},\ldots,\varepsilon_1\pi^{\mu_1},\ldots,\pi^{\mu_t},\ldots,\varepsilon_t\pi^{\mu_t})$,
$\mu_1>\cdots>\mu_r,\ \varepsilon_i\in\{1,\delta\}$, ($\delta\in\mathcal{O}_k$ は非平方の単数)

(Hu): $\pi^\lambda=Diag(\pi^{\lambda_1},\ldots,\pi^{\lambda_n}),\ \lambda\in\Lambda_n=\{\lambda\in\mathbb{Z}^n \mid \lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n\}$.

(Hr) : 略 (対角型とは限らぬ，単数もはいり，(S) と (Hu) の mixture 型),

(A) : $x_\lambda=\begin{pmatrix}0 & \pi^{\lambda_1}\\ -\pi^{\lambda_1} & 0\end{pmatrix}\perp\cdots\perp\begin{pmatrix}0 & \pi^{\lambda_n}\\ -\pi^{\lambda_n} & 0\end{pmatrix},\ \lambda\in\Lambda_n$

X 上の典型的な球関数は次式で与えらる，但し，χ_i は $\mathcal{O}_k^\times$ の 2 次指標で (Hu), (A) では自明とする.

$$\omega(x;\chi;s):=\int_K\prod_{i=1}^n|d_i(k\cdot x)|^{s_i}\,\chi_i(d_i(k\cdot x))dk. \tag{3.2}$$

球関数と局所密度の関係 – 帰納的公式 ([HS88], [H88]): $m>n,\ \chi_j=1\ (j>n)$ とすると，$x\in X_m$ について $\omega(x;\chi;s_1,\ldots,s_n,0,\ldots,0)$ は x に長方行列を作用させた結果で決まり，局所密度と次のように結びつく：

$$\begin{aligned}
&\omega(x;\chi_1,\ldots,\chi_n,1,\ldots,1;s_1,\ldots,s_n,0,\ldots,0)\\
&\quad= c_{mn}\sum_{y\in K_n\backslash X_n}\frac{\alpha^{pr}(x,y)}{\alpha(y,y)}\cdot\omega(y;\chi_1,\ldots,\chi_n;s_1,\ldots,s_n)\\
&\quad= c_{mn}\cdot G(s)\times\sum_{y\in K_n\backslash X_n}\frac{\alpha(x,y)}{\alpha(y,y)}\cdot\omega(y;\chi_1,\ldots,\chi_n;s_1,\ldots,s_n),
\end{aligned}$$

但し

$$c_{mn}=\begin{cases}w_m(q^{-1})/w_n(q^{-1})w_{m-n}(q^{-1}) & --(S),(Hr)\\ w_m(q^{-2})/w_n(q^{-2})w_{m-n}(q^{-2}) & --(Hu),\\ w_{2m}(q^{-1})/w_{2n}(q^{-1})w_{2(m-n)}(q^{-1}) & --(A)\end{cases}\qquad w_\ell(t)=\prod_{i=1}^{\ell}(1-t^i),$$

$$G(s)=\begin{cases}\prod_{i=1}^n(1-q^{-2s_i-\cdots-2s_n-m+i-1}) & --(S)\\ \prod_{i=1}^n(1-q^{-2s_i-\cdots-2s_n-2m+2i-2}) & --(Hu)\\ \prod_{i=1}^n(1-\chi_i\cdots\chi_n(-1)q^{-s_i-\cdots-s_n-m+i-1}) & --(Hr)\\ \prod_{i=1}^n(1-q^{-s_i-\cdots-s_n-2m+2i-1})(1-q^{-s_i-\cdots-s_n-2m+2i-2}) & --(A).\end{cases}$$

定数 c_{mn} と自分自身への密度 $\alpha(y,y)$ はよく分かっているので，球関数と局所密度は一方がうまくわかれば他方が取り出せる関係になる．特に，

$$\omega(x;\chi;s_1,\ldots,s_m)=\chi_m(\det(x))\,|\det(x)|^{s_m}\,\omega(x;\chi_1,\ldots,x_{m-1},1;s_1,\ldots,s_{m-1},0)$$

であり，サイズ 1 への局所密度はやさしいので，上の帰納的公式からサイズ 2 の球関数はたやすく求まる ([H88]-II).
一般サイズでも (A), (Hu) では，球関数が明示的に分かり，その主要部分を H-L 多項式の特殊化で表せるので，うまく局所密度が取り出せた ([HS88], [HS89], [H99], [H98]).

また，局所密度は，球関数の代わりに，岩堀部分群に関するガウス和を用いて表示式を求めることもできる ([SH00], [H00]). 最も興味深い対称形式についてはいずれにせよ難しく，得られた結果も明示式とは言い難い.

局所密度の大域的応用： A, B が整係数の対称行列のとき，$k = \mathbb{Q}_p$ に関わる局所密度を α_p のように記すことにする．正定値整係数対称行列 A の theta 級数 は $Z \in \mathbb{H}_n$(Siegel 上半平面) について

$$\theta_A(Z) = \sum_{v \in M_{mn}(\mathbb{Z})} exp(\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}({}^t vAvZ))$$

と定義され $\mathbb{H}_n$ 上の正則関数となる．これを A の genus について平均をとり，genus theta 級数 $\theta(g(A), Z)$ を作ると，Siegel の定理により，これの正定値な T での Fourier 係数は，T によらない定数 c と共に

$$c \cdot (\det T)^{\frac{m-n-1}{2}} \prod_p \alpha_p(A, T) \tag{3.3}$$

と与えられる (から 局所密度は興味深いとも言える)．不定値な A についても，正定値な T についての Fourier 係数が (3.3) となるような $\mathbb{H}$ 上の正則関数を定義でき，これも $\theta(g(A), Z)$ と表す.

$\alpha_p(A, T)$ を (一定の A について) T の関数とみなして，一次独立性を求めることができ，これから, $\theta(g(A), Z)$ の一次独立性がわかる．genus theta 級数は，level が平方因子を含まなければ Siegel Eisenstein 級数のなす空間を張ること，一般には極めて小さい特定の部分空間を張ることが分かる．(素数 level については [KS06]，一般には [BHS09])

§4　等質空間上の球関数の一般的な表示式

§2 の記号を踏襲し，(A1) – (A3) を仮定して，群 G のデータと，球関数の関数等式を用いて，X 上の球関数を表示する式を与える. (残念ながら一般には "明示式" とは言い難い). この節は [H10]-§2 に基づく.
まず，X の P-軌道ごとに細分した球関数を用意する．$X^{op} = \mathbb{X}^{op}(k)$ は有限個の P-軌道に分かれる．P-軌道 X_u ごとに

$$\omega_u(x;s) := \int_K |\mathbf{d}(k\cdot x)|_u^s\, dk, \quad |\mathbf{d}(y)|_u^s = \begin{cases} |\mathbf{d}(y)|^s & \text{if } y \in X_u \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

と定めると，これらも (2.2) の λ_s に対応する X 上の球関数であり，generic s について一次独立となる．

$x_0 \in X^{op}$ をひとつとって固定し，$\mathbb{H} = \mathbb{G}_{x_0}$ (固定部分群), $H = \mathbb{H}(k)$ とおく．(先に決めたように) δ は P の modulus 指標，相対不変式 $d_i(x)$ に対応する指標 ψ_i からまとめ書きして $|\psi|^s$ を定めておく．W を $\mathbb{G}$ の極大 k-split torus ($\subset \mathbb{P}$) に関する Weyl 群とし，

$$W_0 := \{\sigma \in W \mid P \cap H \text{ 上で } \sigma(|\psi|^s) \equiv 1 \text{ かつ} \sigma(\delta) = \delta\}$$

と定める．$\sigma \in W_0$ について $\varepsilon_\sigma \in \mathbb{Q}^n$ を $\delta\sigma(\delta^{-1}) = |\psi|^{2\varepsilon_\sigma}$ により定めることができる．P の指標 $\chi_s := |\psi|^s \delta^{-\frac{1}{2}}$ は， $\sigma \in W_0$ については，$|\psi|$ と δ で $\sigma(\chi_s) = |\psi|^{\sigma(s)+\varepsilon_\sigma} \delta^{-\frac{1}{2}}$ と記述できる．

J を P と整合的な K の岩堀部分群とし，

$$\mathcal{R} = \{x \in X^{op} \cap G\cdot x_0 \mid J\cdot x \subset P\cdot x_0\},$$
$$\mathcal{R}^+ = \left\{x \in \mathcal{R} \;\middle|\; |\mathbf{d}(v\cdot x)|^s = |\mathbf{d}(x)|^s,\ {}^\forall v \in J\right\}$$

とおき，$\mathcal{U} = \{\nu \mid X_\nu \subset G\cdot x_0\}$ とする．

Theorem 4.1 *(A1) – (A3)* を仮定する．*generic* s の下で，$x \in \mathcal{R}$ について

$$\big(\omega_\nu(x;s)\big)_{\nu\in\mathcal{U}} = \frac{1}{Q}\sum_{\sigma\in W_0} c(\sigma(\chi_s))\cdot B_\sigma(s)\cdot \left(\int_J |\mathbf{d}(v\cdot x)|_\nu^{\sigma(s)+\varepsilon_\sigma}\, dv\right)_{\nu\in\mathcal{U}}.$$

さらに $x \in \mathcal{R}^+$ であれば,

$$\big(\omega_\nu(x;s)\big)_{\nu\in\mathcal{U}} = \frac{1}{Q}\sum_{\sigma\in W_0} c(\sigma(\chi_s))\cdot B_\sigma(s)\cdot \left(|d(x)|_\nu^{\sigma(s)+\varepsilon_\sigma}\right)_{\nu\in\mathcal{U}}.$$

ここで，定数 $Q = \sum_{\sigma\in W}(J\sigma J : J)^{-1}$ と $c(\chi_s)$ は G の球関数を与える量で, 行列 $B_\sigma(s)$ は次の関数等式で定まる：

$$\big(\omega_\nu(x;s)\big)_{\nu\in\mathcal{U}} = B_\sigma(s)\big(\omega_\nu(x;\sigma(s)+\varepsilon_\sigma)\big)_{\nu\in\mathcal{U}}.$$

注意 (1) $c(\chi_s)$ や $B_\sigma(s)$ の成分は，$q^{s_1},\dots,q^{s_n}$ の有理関数である．

(2) $c(\chi)$ の積表示は Cartier に従って Σ_0 を渡る とすべきである (cf. [Car79]-Th.4.4). ここで，G のルート系 Σ の内，affine ルートに対応する部分集合が Σ_0 であり， Σ_0

は reduced ルート系となり，同じ W をワイル群にもつ．G が k 上 split または Σ が reduced であれば $\Sigma_0 = \Sigma$ である．正ルートは P に対応してとり，+ を付けて表すと

$$c(\chi) = c(\chi) = \prod_{\alpha \in \Sigma_0^+} \frac{(1 - q_{\alpha/2}^{-\frac{1}{2}} q_\alpha^{-1} \chi(a_\alpha)^{-1})(1 + q_{\alpha/2}^{-\frac{1}{2}} \chi(a_\alpha)^{-1})}{1 - \chi(a_\alpha)^{-2}}.$$

(A4) がみたされているときは，$|\psi(p)|^{\varepsilon_0} = \delta^{\frac{1}{2}}(p),\ p \in P$ をみたすように $\varepsilon_0 \in \mathbb{Q}^n$ がとれるので，初めから

$$\widetilde{\omega}_\nu(x;s) = \int_K |\mathbf{d}(k \cdot x)|_\nu^{s+\varepsilon_0}\, dk$$

とシフト しておく方がよい (或いは変数変換の際に $\delta^{\frac{1}{2}}$ 分を調整する)．そうすると上の定理は次のようになる：

Theorem 4.2 *(A1) – (A4)* を仮定する．*generic* s の下で $x \in \mathcal{R}$ について

$$\left(\widetilde{\omega}_\nu(x;s)\right)_{\nu \in \mathcal{U}} = \frac{1}{Q} \sum_{\sigma \in W} \gamma(\sigma(s)) \cdot \widetilde{B}_\sigma(s) \cdot \left(\int_J |\mathbf{d}(v \cdot x)|_\nu^{\sigma(s)}\, dv \right)_{\nu \in \mathcal{U}}.$$

さらに $x \in \mathcal{R}^+$ であれば

$$\left(\widetilde{\omega}_\nu(x;s)\right)_{\nu \in \mathcal{U}} = \frac{1}{Q} \sum_{\sigma \in W} \gamma(\sigma(s))) \cdot \widetilde{B}_\sigma(s) \cdot \left(|\mathbf{d}(x)|_\nu^{\sigma(s)} \right)_{\nu \in \mathcal{U}}.$$

ここで定数 Q と $\gamma(s) = c(|\psi|^s)$ は 先と同様で，行列 $\widetilde{B}_\sigma(s)$ は次の関数等式で定まる：

$$\left(\widetilde{\omega}_\nu(x;s)\right)_{\nu \in \mathcal{U}} = \widetilde{B}_\sigma(s) \left(\widetilde{\omega}_\nu(x;\sigma(s))\right)_{\nu \in \mathcal{U}}.$$

群 G のデータと球関数の関数等式を用いた表示式が得られた．X が一つの P-軌道であれば球関数を細分する必要はなく，関数等式が分かれば，Th. 4.1 あるいは Th.4.2 は明示式と言える．交代形式の空間の場合は，そのようにして球関数の明示式を再構成できる．

(Hu) の場合には 2^n 個に細分する必要があるが，P-軌道が有限群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ で統制されていて $\omega(x;s)$ の関数等式の形も単純なので，まとめなおして $\omega(x;s)$ の明示式が得られ，$\mathcal{S}(K\backslash X)$ の $\mathcal{H}(G,K)$-加群としての構造も，Plancherel 公式もよく分かる．ユニタリ・エルミート行列の空間でも同様．これについては，§6 で紹介する．

(S) の場合には，non-dyadic case でも 4^n 個に細分する必要があり，関数等式は分かっているが，うまく整理できないので，原理的な表示式のままである．例 4 の直交行対称行列の空間でも同様.

§5　球関数の Weyl 群の作用に関する関数等式

　球関数の関数等式は，極の情報をもたらしたり，それ自体の面白さがある．さらに前節でみたように，球関数の表示式を求めるためにも興味深い．この節は [H05b] とその改良版 [H10]-§3 に基づく．

関数等式は cocycle relations をみたすので，単純ルートに対応する Weyl 群の生成元についての関数等式がまず問題になる．次の条件 (A5) をみたせば，球関数 $\omega(x;s)$ の球関数が存在し，それは特殊な概均質ベクトル空間のゼータ関数の関数等式に帰着する．

以下この節では，(A1) – (A3) を仮定し，α は Σ_0 の単純ルートで対応する reflection $\sigma = \sigma_\alpha$ は W_0 に含まれるとする．α に対応する standard 放物部分群を $\widetilde{\mathbb{P}}$ と表し，次の (A5) を仮定する．

(A5): 以下をみたすような k-有理表現 $\rho : \widetilde{\mathbb{P}} \longrightarrow R_{k'/k}(GL_2)$ が存在:

$$\rho(\widetilde{\mathbb{P}}) = R_{k'/k}(GL_2) \text{ 又は } R_{k'/k}(SL_2), \quad \rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\rho^{-1}(\mathbb{P}_2) \subset \mathbb{P},\ \rho(K \cap \widetilde{\mathbb{P}}) \supset R_{k'/k}(SL_2(\mathcal{O}_k)),$$

但し，k'/k は有限次不分岐拡大で，$R_{k'/k}$ は基礎体の制限関手，$\mathbb{P}_2$ は上半三角からなる $\rho(\widetilde{\mathbb{P}})$ のボレル部分群.

P-軌道 X_u を一つ定め，$J_u = \left\{ \nu \,\middle|\, \widetilde{P} \cdot X_\nu = \widetilde{P} \cdot X_u \right\}$ とする．また $d = [k' : k]$(拡大次数), $e = [\mathfrak{X}(\mathbb{P}) \cap (\mathfrak{X}_0(\mathbb{P}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) : \mathfrak{X}_0(\mathbb{P})]$ (群指数) とする．$\mathbb{X}$ 上の $\mathbb{P}$-相対不変式系 $\{d_i(x) \mid 1 \le i \le n\}$ に対して，$\mathbb{X} \times R_{k'/k}(M_{21})$ 上の $\widetilde{\mathbb{P}} \times R_{k'/k}(GL_1)$-相対不変式系 $\left\{ \widetilde{d}_i(x,v) \,\middle|\, 1 \le i \le n \right\}$ で $\widetilde{d}_i(x, {}^t(1,0)) = d_i(x)$ をみたすものが定まるが，これについて $e_i = \deg_v(\widetilde{d}_i(x,v))$ とおく．これらの記号を用いて，次の定理が成立する．

Theorem 5.1 *(A1) – (A3), (A5)* の仮定の下で，次の関数等式が成立する：

$$\omega_u(x;s) = \frac{1 - q^{-2d - \sum_i e_i s_i}}{1 - q^{-2d - \sum_i e_i(\sigma(s)_i + \varepsilon_{\sigma i})}} \times \sum_{\nu \in J_u} \gamma_{u\nu}(s) \cdot \omega_\nu(x; \sigma(s) + \varepsilon_\sigma),$$

但し，$\varepsilon_{\sigma i}$ は ε_σ の第 i 成分で, $\gamma_{u\nu}(s)$ は $q^{\frac{s_i}{e}}$ たちの有理関数.
さらに *(A4)* も仮定すると，

$$\widetilde{\omega}_u(x;s) = \frac{1 - q^{-2d - \sum_i e_i(s_i + \varepsilon_{0i})}}{1 - q^{-2d - \sum_i e_i(\sigma(s)_i + \varepsilon_{0i})}} \times \sum_{\nu \in J_u} \widetilde{\gamma}_{u\nu}(s) \cdot \widetilde{\omega}_\nu(x; \sigma(s)),$$

但し，ε_{0i} は ε_0 の第 i 成分で, $\widetilde{\gamma}_{u\nu}(s)$ は $q^{\frac{s_i}{e}}$ たちの有理関数.

現れる関数等式は，特別な形の概均質ベクトル空間の関数等式である．そのことを次に述べる．$\mathbb{V} = R_{k'/k}(M_{21})$ とし，$\widetilde{\mathbb{P}}$ の $x_u \in X_u$ を固定する部分群を $\widetilde{\mathbb{P}}_u$ とおく．

Theorem 5.2 概均質ベクトル空間 $(\widetilde{\mathbb{P}}_u \times R_{k'/k}(GL_1), \mathbb{V})$ は u によらず同型で，J_u 毎に k 上同型である．$V = \mathbb{V}(k)$ 上のフーリエ変換 $\mathcal{F}_V$ により次の関数等式をもつ：

$$\int_V \mathcal{F}_V(\phi)(v) \left|\widetilde{d}(x_u, v)\right|_u^s dv = \sum_{\nu \in J_u} \gamma_{u\nu}(s) \int_V \phi(v) \cdot \left|\widetilde{d}(x_u, v)\right|_\nu^{\sigma(s)+\varepsilon_\sigma} dv,\ (\phi \in \mathcal{S}(V)),$$

ここで $\gamma_{u\nu}(s)$ は *Th. 5.1* のものである．特に $\widetilde{\mathbb{P}}_u \times R_{k'/k}(GL_1)$ の単位元連結成分は $\overline{k}$ 上では $R_{k'/k}(GL_1 \times GL_1)$ に同型である．

例 2 の対称形式の空間の場合，単純ルート $\alpha = e_\alpha - e_{\alpha+1}$, $1 \leq \alpha < n$ に対応する放物型部分群は

$$\widetilde{\mathbb{P}} = \{ (p_{ij}) \in GL_n(k) \mid p_{ij} = 0 \text{ unless } i \geq j \text{ or } (i,j) = (\alpha, \alpha+1)\}$$

である．$p \in \widetilde{\mathbb{P}}$ に対して "真ん中に現れる" 2×2 行列を r とするとき，($\mathbb{P} = \mathbb{B}$ は下三角なので調整して) $\rho(p) = \det(r)^t r^{-1}$ とすることで，$k' = k$ について (A5) がみたされる．実際 $\rho(\widetilde{\mathbb{P}}) = GL_2$, $\rho(\sigma_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\rho^{-1}(\mathbb{B}_2) = \mathbb{B}$, $\rho(K \cap \widetilde{\mathbb{P}}) = \rho(GL_2(\mathcal{O}_k)) = GL_2(\mathcal{O}_k)$. "小さな"概均質ベクトル空間としては，$(O(S) \times GL_1, M_{21})$ (S は 2 次対称行列) が現れる．

交代形式や不分岐エルミート形式の時も，単純ルートに対する ρ は同様に定義され，(A5) をみたすことが分かる．

これらの場合，上の形の関数等式は，細分した球関数を渡る形で，特殊な概均質ベクトル空間の関数等式に帰着するとはいえ，必ずしも計算しやすいわけではない．むしろ同じタイプの小さいサイズの等質空間の関数等式に帰着させる方が求めやすいように思われる．例 2 の空間の関数等式についてはいずれも既知 ([HS88]-III).

一方，単純ルートに対応する関数等式の存在に，(A5) が不可欠なわけではない．概均質ベクトル空間の理論には帰着しないが，関数等式を持つ例もある．例 4 のユニタリ・エルミート行列の空間でそのような例が現れる ([H11], [HK14], [HKpp]).

例 5 の場合は，単純ルートに対して出てくる "小さな"概均質ベクトル空間は，いずれも k 上で $(GL_1 \times GL_1, k^2)$ と同型になり，関数等式は Tate の公式に帰着する．球関数の明示式や $\mathcal{S}(K \backslash X)$ の構造なども分かっている．詳しくは ([H05], [H05b]-4.1).

§6　いくつかの具体的な結果

6.1. 交代形式と不分岐エルミート形式の空間の場合

P_λ は (1.5) で与えた Hall- Littlewood 多項式であるが，記号を合わせて書いておく ($w_\lambda(t)$ は (1.5) の通り)：

$$P_\lambda(q^{z_1}, \ldots, q^{z_n}; t) = \frac{(1-t)^n}{w_\lambda(t)} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma(q^{\langle \lambda, z \rangle} c(z,t)), \quad c(z,t) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{1 - tq^{z_j - z_i}}{1 - q^{z_j - z_i}}, \tag{6.1}$$

ここで $\sigma \in S_n$ は $\{z_i\}$ に添え字の置換として作用させる．また実際には $t \in \mathbb{R}^\times, |t| < 1$ が指定され，そのとき $\{P_\lambda(q^{z_i}; t) \mid \lambda \in \Lambda_n\}$ は $\mathcal{R} = \mathbb{C}[q^{\pm z_1}, \ldots, q^{\pm z_n}]^{S_n}$ の $\mathbb{C}$ 上の直交基底となり，特に $P_{\mathbf{0}}(q^{z_i} : t) = 1$ である．また，

$$\rho = (n - 2i + 1)_{(1 \le i \le n)} \in \mathbb{Z}^n, \quad \mathfrak{a}^* = \left(\sqrt{-1}\left(\mathbb{R}/\frac{2\pi}{\log q}\mathbb{Z}\right)\right)^n,$$

とおき，$\mathfrak{a}^*$ の不変測度 dz は $vol(\mathfrak{a}^*) = 1$ と正規化しておく．

交代形式 (A) の場合.

$G = GL_{2n}(k)$, $K = GL_{2n}(\mathcal{O}_k)$ で $W = S_{2n} \supset W_0 \cong S_n$．実際 $\sigma \in S_n$ に対して $w_\sigma(2i-1) = 2\sigma(i) - 1$, $w_\sigma(2i) = 2\sigma(i)$, $1 \le i \le n$ で $w_\sigma \in W$ を対応させる．

X はボレル部分群 B に関して単一の軌道なので，関数等式が分かれば，Th.4.1 で明示式が得られる．

$$\omega^{(A)}(x; s) = \int_K \prod_{i=1}^n |pf_i(k \cdot x)|^{s_i}\, dk,$$

において，

$$s_i = -z_i + z_{i+1} - 2,\ (1 \le i \le n-1), \quad s_n = -z_n + n - 1$$

と変数変換して， $\omega^{(A)}(x; z)$ と表すと，カルタン分解の代表元 x_λ $(\lambda \in \Lambda_n)$ について

$$\begin{aligned} &\omega^{(A)}(x_\lambda; z) \\ &= q^{-\langle \lambda, \rho \rangle} \cdot w_\lambda(q^{-2}) \cdot \frac{(1-q^{-1})^n}{w_{2n}(q^{-1})} \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{1 - q^{z_i - z_j - 1}}{1 - q^{z_i - z_j + 1}} \cdot P_\lambda(q^{z_1}, \ldots, q^{z_n}; q^{-2}). \end{aligned} \tag{6.2}$$

X 上の G-不変測度 dx を $vol(K \cdot x_{\mathbf{0}}) = 1$ と正規化しておく．球関数

$$\Psi_z(x) = \omega^{(A)}(x; z)/\omega^{(A)}(x_{\mathbf{0}}; z) \in \mathcal{R}$$

による球フーリエ変換

$$\begin{array}{rccl} \widehat{\ } : & \mathcal{S}(K\backslash X) & \longrightarrow & \mathbb{C}[q^{\pm z_1}, \ldots, q^{\pm z_n}]^{S_n} (= \mathcal{R}) \\ & \varphi & \longmapsto & \widehat{\varphi}(z) = \int_X \varphi(x) \Psi_z(x) dx, \end{array} \tag{6.3}$$

は同型で，次の可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{H}(G,K) & \times & \mathcal{S}(K\backslash X) & \xrightarrow{*} & \mathcal{S}(K\backslash X) \\
\downarrow{\scriptstyle\lambda_z} & & \downarrow{\scriptstyle\widehat{}} & & \downarrow{\scriptstyle\widehat{}} \\
\mathcal{R} & \times & \mathcal{R} & \xrightarrow{\times} & \mathcal{R},
\end{array}$$

但し，λ_z は佐武同型の特殊化で全射，下の $\times$ は環の積.
特に $\mathcal{S}(K\backslash X)$ は $\mathcal{H}(G,K)$-加群として一元生成であり，X 上の球関数は $\Psi_z(x)$ の定数倍だけである（$z \in \mathbb{C}^n$ に対して 1 次元).

$\mathfrak{a}^*$ 上の Plancherel 測度は

$$d\mu(z) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{w_n(q^{-2})}{(1-q^{-2})^n} \cdot \frac{d\mu(z)}{|c(z,q^{-2})|^2}$$

と与えられ，任意の $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(K\backslash X)$ について

$$\int_X \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx = \int_{fra^*} \widehat{\varphi}(z)\overline{\widehat{\psi}(z)}d\mu(z),$$
$$\varphi(x) = \int_{\mathfrak{a}^*} \widehat{\varphi}(z)\Psi_z(x)d\mu(z).$$

不分岐エルミート形式 (Hu) の場合.
$G = GL_n(k'),\ K = GL_n(k')$ で $W = W_0 = S_n$. $B\backslash X$ は 2^n 個の軌道に分かれ，これらは $(k^\times/N_{k'/k}(k'^\times))^n \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ で統制される.

$$\omega^{(H)}(x;s) = \int_K \prod_{i=1}^n |d_i(k\cdot x)|^{s_i}\, dk,$$

において，

$$s_i = -z_i + z_{i+1} - 1 - \frac{\pi\sqrt{-1}}{\log q},\ (1 \le i \le n-1), \quad s_n = -z_n + \frac{n-1}{2} - \frac{\pi\sqrt{-1}}{\log q}$$

と変数変換して，$\omega^{(H)}(x;z)$ と表すと，関数等式と極の位置に関して

$$\prod_{1\le i<j\le n} \frac{1+q^{z_i-z_j}}{1-q^{z_i-z_j-1}}\omega(x;z) \in \mathbb{C}[q^{\pm z_1}, \dots, q^{\pm z_n}]^{S_n} (= \mathcal{R})$$

が分かる．細分した球関数を考えることは，指標付きの球関数を考えることと同じで §4 の表示式をうまくまとめあげることができ，カルタン分解の代表元 π^λ $(\lambda \in \Lambda_n)$ に

ついて明示式は以下のように与えられる：

$$\begin{aligned}\omega^{(H)}(\pi^\lambda; z) &= (-1)^{\sum_i i\lambda_i} q^{-\frac{1}{2}\langle\lambda,\rho\rangle} \cdot w_\lambda(-q^{-1}) \\ &\quad \times \frac{(1-q^{-1})^n}{w_n(q^{-2})} \cdot \prod_{1\le i<j\le n} \frac{1-q^{z_i-z_j-1}}{1+q^{z_i-z_j}} \cdot P_\lambda(q^{z_1}, \ldots, q^{z_n}; -q^{-1}). \quad (6.4)\end{aligned}$$

X 上の G-不変測度 dx を $vol(K\cdot 1_n)=1$ と正規化しておく．球関数

$$\Psi_z(x) = \omega^{(H)}(x;z)/\omega^{(H)}(1_n;z) \in \mathcal{R}$$

による球フーリエ変換を (6.3) と同様に定義すると次の可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}(G,K) & \times & \mathcal{S}(K\backslash X) & \xrightarrow{*} & \mathcal{S}(K\backslash X) \\ {\scriptstyle\lambda_z}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\widehat{}} & & \big\downarrow{\scriptstyle\widehat{}} \\ \mathcal{R}_0 & \times & \mathcal{R} & \xrightarrow{\times} & \mathcal{R}, \end{array} \qquad \mathcal{R}_0 = \mathbb{C}[q^{\pm 2z_1}, \ldots, q^{\pm 2z_n}]^{S_n},$$

但し，λ_z は佐武同型，球フーリエ変換 $\widehat{}$ も同型で，下の $\times$ は環の積．特に $\mathcal{S}(K\backslash X)$ は $\mathcal{H}(G,K)$-加群として階数 2^n の自由化群であり，(λ_z を通して) $z\in\mathbb{C}^n$ に対応する X 上の球関数の基底として $\left\{ \Psi_{z+u}(x) \;\middle|\; u \in \{0, \frac{\pi\sqrt{-1}}{\log q}\}^n \right\}$ がとれる（2^n 次元).

$\mathfrak{a}^*$ 上の Plancherel 測度は

$$d\mu(z) = \frac{1}{n!}\cdot\frac{w_n(-q^{-1})}{(1+q^{-1})^n}\cdot\frac{d\mu(z)}{|c(z,-q^{-1})|^2}$$

と与えられ，任意の $\varphi,\psi\in\mathcal{S}(K\backslash X)$ について

$$\begin{aligned}&\int_X \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx = \int_{fra^*} \widehat{\varphi}(z)\overline{\widehat{\psi}(z)}d\mu(z), \\ &\varphi(x) = (-1)^{(n+1)v_\pi(\det x)} \int_{\mathfrak{a}^*} \widehat{\varphi}(z)\Psi_z(x)d\mu(z), \quad x\in X.\end{aligned}$$

6.2. ユニタリ・エルミート行列の空間

不分岐 2 次拡大 k'/k を固定し，これに関してユニタリ性やエルミート性を考える．k の剰余体標数 q は奇数と仮定する．この節の結果は [HK14], [HKpp] に基づく．

j_m で逆対角線上に 1 が並びその他は 0 の m 次行列を表す．$G=U(j_m)$ とそれが作用する空間 $X=\{x\in G \mid x^*=x,\ \Phi_{xj_m}(t)=\Phi_{J_m}(t)\}$ を考える． ここで，$\Phi_y(t)$ は 行列 y の固有多項式を表す．代数閉体上で $X(\overline{k})$ が $G(\overline{k})$-軌道になるようにしてある．

$n=[\frac{m}{2}]$ とおく．G は m が偶数のとき C_n 型，奇数のとき BC_n 型となる．極小放物型部分群として，上三角ボレル部分群 B をとる．$K=G(\mathcal{O}_{k'})$ は “良い”極大コンパク

ト部分群である．行列 g の右下の $i\times i$ ブロックの行列式を $d_i(g)$ と表すことにすると，$x\in X$ について $d_i(x)\in k$ であり，B-相対不変式の基本系として $\{d_i(x)\mid 1\le i\le n\}$ がとれて，対応する B の指標は $\psi(p)=N_{k'/k}(d_i(p))$ である．

球関数と変数変換を次のように定める：

$$\omega(x;z)=\omega(x;s)=\int_K |\mathbf{d}(k\cdot x)|^s\,dk, \tag{6.5}$$

$$s_i=-z_i+z_{i+1}-1-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\log q},\ (1\le i<n),\quad s_n=\begin{cases} -z_n-\frac{1}{2}, & 2\mid m,\\ -z_n-1-\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\log q}, & 2\not| m,\end{cases}$$

ワイル群は共に $W\cong S_n\ltimes\{\pm\}^n$ であり，S_n 部分は $\{z_i\}$ の置換として作用し，z_n の符号だけ変える $\tau\in W$ と共に W を生成する．S_n に関する関数等式はエルミート形式の空間の球関数の結果から分かる．τ に関して，§5 (A5) と同様に ρ は考えられるが，仮定の最後の条件をみたさず，現れる概均質ベクトル空間は関数等式を持たない．定義に戻って $n=1$ の場合を直接計算し，それをもとに一般サイズの τ に関する関数等式を求める．そこで Th. 4.2 を用いて球関数の明示式が得られる．

まず，$K\backslash X_n$ は次の完全代表系を持つ（q が奇数だから!)

$$x_\lambda=Diag(\pi^{\lambda_1},\dots,\pi^{\lambda_n},(1),\pi^{-\lambda_n},\dots,\pi^{-\lambda_1}),\quad \lambda\in\Lambda_n^+, \tag{6.6}$$

ここで，成分 1 は $n=2m+1$ の時だけはいり，Λ_n^+ は (1.1) で与えたものである．$e_i\in\mathbb{Z}^n$ を i 次基本ベクトルとし，C_n 型の正ルートを以下のようにとる (BC_n 型に対する Σ_0^+ に一致)：

$$\Sigma^+=\Sigma_s^+\sqcup\Sigma_\ell^+,\quad \Sigma_s^+=\{e_i\pm e_j\mid 1\le i<j\le n\},\ \Sigma_\ell^+=\{2e_i\mid 1\le i\le n\}.$$

$\alpha\in\Sigma^+$ と $z\in\mathbb{C}^n$ の成分ごとの和を $\langle\alpha,z\rangle$ と表す．カルタン分解の代表元 $x_\lambda,(\lambda\in\Lambda_n^+)$ についての明示式は以下のように与えられる．

$$\omega(x_\lambda;z)=\frac{c}{G(z)}\cdot q^{\langle\lambda,0_z\rangle}\cdot\sum_{\sigma\in W}\sigma(q^{-\langle\lambda,z\rangle}c(z;\mathbf{t})), \tag{6.7}$$

ここで，0_z は $s=0$ に対応する z 変数で，

$$c=\begin{cases}(1-q^{-2})^n/w_{2n}(-q^{-1}), & 2\mid m\\ (1+q^{-1})/(1-q^{-2})^n w_{2n+1}(-q^{-1}), & 2\not| m,\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \prod_{\alpha\in\Sigma^+} \frac{1+q^{\langle\alpha,z\rangle}}{1-q^{\langle\alpha,z\rangle-1}},\\
&\quad (\text{但し，} n=2m \text{ のときは，} \alpha\in\Sigma_s^+ \text{ だけを動く})\\
c(z;\mathbf{t}) &= \prod_{\alpha\in\Sigma^+} \frac{1-t_\alpha q^{\langle\alpha,z\rangle}}{1-q^{\langle\alpha,z\rangle}},\\
t_\alpha &= \begin{cases} t_s = -q^{-1}, \ \ \alpha = e_i \pm e_j, \\ t_\ell = \begin{cases} q^{-1}, & \alpha = 2e_i, \ 2 \mid m, \\ -q^{-2}, & \alpha = 2e_i, \ 2 \nmid m. \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}
$$

上の $G(z)$ は関数等式から得られ，$G(z)\omega(x;z) \in \mathbb{C}[q^{\pm z_1},\dots,q^{\pm z_n}]^W (= \mathcal{R}, \text{ say})$ が分かる．従って，明示式と $\omega(x;s)\mid_{s=0}= 1$ であることから

$$
\Psi_z(x) = \omega(x;z)/\omega(x_{\mathbf{0}};z) \in \mathcal{R}
$$

が分かる．一方，明示式 (6.7) の W に関する和の部分は，次の C_n 型の Hall-Little 多項式 (特殊化した Macdonald 多項式, cf. [Mac00]) の定数倍となっていることが読み取れる．

$$
P_\lambda(z;\mathbf{t}) = \frac{1}{W_\lambda(\mathbf{t})} \sum_{\sigma\in W} \sigma(q^{-\langle\lambda,z\rangle} \prod_{\alpha\in\Sigma^+} \frac{1-t_\alpha q^{\langle\alpha,z\rangle}}{1-q^{\langle\alpha,z\rangle}}) \tag{6.8}
$$

上の $W_\lambda(\mathbf{t})$ は C_n 型の Poincaré 多項式で，§1(1.5) の A_n 型の Hall-Little 多項式の定数に相等するものである．

定数 t_α をルートの長短だけで決まる $t \in \mathbb{R}$, $|r| < 1$ として，$\{P_\lambda(z;\mathbf{t}) \mid \lambda \in \Lambda_n^+\}$ は $\mathcal{R}$ の直交基底となることが分かっている ([Mac00])．これらの結果を用いると，この空間に関して，$\mathcal{S}(K\backslash X)$ は階数 2^n の自由 $\mathcal{H}(G,K)$-加群となり，すべての球関数の parametrization($z \in \mathbb{C}^n$ について 2^n 次元) や明示的な Plancherel 公式・逆変換公式などが求められる．

最後に $\mathcal{O}_k$ 上 split する簡約代数群 $\mathbb{G}$ 上の球等質空間上の球関数論に関しては Sakellaridis の一般的議論 ([Sakepp]) があることを付け加えてこの論考を閉じることにする．

参考文献

[BHS09] S. Böcherer, Y. Hironaka and F. Sato: Linear independence of local densities of quadratic forms and its application to the theory of Siegel modular forms, *Contemporary Mathematics AMS* **493**(2009), 51 – 82.

[Car79] P. Cartier: Representations of $\mathfrak{p}$-adic groups — A survey, *Proc. Symp. Pure Math.* **33-1**(1979), 111–156.

[Cas80] W. Casselman: The unramified principal series of $\mathfrak{p}$-adic groups I. The spherical functions, *Compositio Math.* **40**(1980), 387–406.

[CS80] W. Casselman and J. Shalika: The unramified principal series of $\mathfrak{p}$-adic groups II. The Whittaker function, *Compositio Math.* **41**(1980), 207–231.

[H88] Y. Hironaka: Spherical functions of hermitian and symmetric forms I, II, III, *Japan. J. Math.* **14**(1988), 203–223; *Japan. J. Math.* **15**(1989), 15–51; *Tôhoku Math. J.* **40**(1988), 651–671.

[H90] Y. Hironaka: Spherical functions of hermitian and symmetric forms over 2-adic fields, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **39**(1990), 157–193.

[H99] Y. Hironaka, Spherical functions and local densities on hermitian forms, *J. Math. Soc. Japan* **51**(1999), 553 – 581.

[H98] Y. Hironaka, Local zeta functions on hermitian forms and its application to local densities, *J. Number Theory* **71**(1998), 40 – 64.

[H00] Y. Hironaka, Classification of hermitian forms by the Iwahori subgroup and local densities, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **49**(2000), 105 – 142.

[H05] Y. Hironaka, Spherical functions on Sp_2 as a spherical homogeneous $Sp_2 \times (Sp_1)^2$-space, *J. Number Theory* **112**(2005), 238 – 286.

[H05b] Y. Hironaka, Functional equations of spherical functions on p-adic homogeneous spaces, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **75**(2005), 285 – 311.

[H10] Y. Hironaka: Spherical functions on p-adic homogeneous spaces, *"Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L-functions"* – Lectures at the French-Japanese Winter School (Miura, 2008)–, MSJ Memoirs **21**(2010), 50 – 72.

[H11] Y. Hironaka, Spherical functions on $U(n,n)/U(n) \times U(n)$ and hermitian Siegel series, *"Geometry and Analysis of Automorphic Forms of Several Variables"*, Series on Number Theory and Its Applications **7**, World Scientific, 2011, 120 – 159.

[HK14] Y. Hironaka and Y. Komori: Spherical functions on the space of p-adic unitary hermitian matrices, to appear in *International Journal of Number Theory*(2014), Math arXiv:1207.6189

[HKpp] Y. Hironaka and Y. Komori: Spherical functions on the space of p-adic unitary hermitian matrices II – the case of odd size, in preparation.

[HS88] Y. Hironaka and F. Sato: Spherical functions and local densities of alternating forms, *Amer. J. Math.* **110**(1988), 473–512.

[HS89] Y. Hironaka and F. Sato: Local densities of alternating forms, *J. Number Theory* **33**(1989), 32–52.

[HS06] Y. Hironaka and F. Sato: The Siegel series and spherical functions on $O(2n)/(O(n) \times O(n))$, "*Automorphic forms and zeta functions* – Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa –", World Scientific, 2006, 150 – 169.

[KS06] H. Katsurada and R. Schulze-Pillot: Genus theta series, Hecke operators and the basis problem for Eisenstein series, "*Automorphic forms and zeta functions* – Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa –", World Scientific, 2006, 234 – 261.

[Mac71] I. G. Macdonald: *Spherical functions on a group of p-adic type*, Univ. Madras, 1971.

[Mac00] I. G. Macdonald: Orthogonal polynomials associated with root systems, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* **45**(2000), Article B45a.

[Mau58] F. I. Mautner: Spherical functions over $\mathfrak{p}$-adic fields. I. *Amer. J. Math.* **80**(1958), 441 – 457.Rep

[Of04] O.Offen: Relative spherical functions on p-adic symmetric spaces, *Pacific J. Math.* **215**(2004), 97 – 149.

[PR94] V. Platonov and A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Academic Press, 1994.

[Sakepp] Y. Sakellaridis, Spherical functions on spherical varieties, to appear in *Amer. J. Math.*, Math arXiv:0905.4244.

[Sata63] I. Satake: Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{p}$-adic fields, *Publ. Math. I. H. E. S* **18**(1963), 5 – 69.

[SH00] F. Sato and Y. Hironaka: Local densities of representations of quadratic forms over p-adic integers (the non-dyadic case), *J. Number Theory* **83**(2000), 106 – 136.