虚数乗法を持つヒルベルト保型形式の岩澤主予想について

原 隆* (大阪大学大学院理学研究科数学専攻)

本稿は、2013 年 8 月 26 日–29 日に広島大学理学部で開催された第 58 回代数学シンポジウムに於いて著者が行った同タイトルの講演の報告書であり、大阪大学大学院理学研究科の落合理さんとの共同研究 [HO13] の概要を纏めたものです。楕円保型形式の岩澤主予想の研究は、今年になって Inventiones Mathematicae に受理されたスキナーとウルバンの結果 [SU13] を筆頭に今世紀に入って目覚ましい進展を迎えましたが、楕円保型形式の拡張概念の一種であるヒルベルト保型形式に対する主予想の研究は (精密な定式化も含め) まだまだ道半ばであるように思われます。本研究の目的は、ヒルベルト保型形式の中でも特に **虚数乗法を持つもの** に対する (円分) 岩澤主予想を、こちらも近年研究の進展が著しい CM 体の (多変数) 岩澤主予想に帰着させて考察することです。

第 1 節では古典的な場合として、虚数乗法を持つ楕円尖点形式の円分岩澤主予想と虚二次体の二変数岩澤主予想の関係について概観します。第 2 節では虚数乗法を持つヒルベルト尖点形式の円分岩澤主予想を定式化し、主定理の主張及び証明の概略を紹介しています。第 3 節では多変数主予想を特殊化する際に現れる技術的問題について解説しました。第 3 節で取り上げる問題は何れも岩澤理論の専門家にとっては良く知られたものであると思いますが、近年若干蔑ろにされがちな傾向がある様にも見受けられるため、なるべく詳細に説明するよう心掛けたつもりです。本稿を通じて専門家以外の方にも、岩澤理論の研究に於ける典型的な課題の一端を感じ取って戴ければ幸いです。

■謝辞 第 58 回代数学シンポジウムという大舞台で講演させていただくという貴重な機会を戴き大変光栄でした。シンポジウムの運営にご尽力なさった関係者の皆様、取り分け代数学シンポジウムの総合責任者を務められた大阪大学の今野一宏さん並びに会場責任者でもあり、参考資料の印刷等個人的にもお世話になった広島大学の島田伊知朗さんに感謝申し上げます。また、著者に本シンポジウムでの講演を薦めて下さり、共同研究の内容を発表することを快諾して下さったのみならず、本稿の拙い初稿に目を通し的確なコメントを下さった代数学シンポジウム整数論分科プログラム責任者の落合理さんにも心から御礼申し上げます。

■記号の準備 本稿を通じて p は奇素数とします。また、有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ を固定し、$\overline{\mathbb{Q}}$ の複素数体 $\mathbb{C}$ への埋め込み $\iota_\infty\colon \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 及び p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の (固定された) 代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ への埋め込み $\iota_p\colon \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を其々固定して考えます。

本稿では整数環の記号として、基本的に代数体の整数環にはドイツ文字 (フラクトゥール体) の $\mathfrak{r}$ を、p 進数体 (の有限次拡大) の整数環にはカリグラフィー体の $\mathcal{O}$ を用います (分かりにくい箇所では其の都度明記します)。$\mathcal{O}$ は主に p 進ガロワ表現の係数環として用いられます。

代数体 (即ち $\mathbb{Q}$ の有限次拡大) K に対し、G_{K} で K の絶対ガロワ群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathsf{K})$ を表すこととします。さらに K の各素点 v に於ける分解群、惰性群を其々 D_v, I_v で表します (此れ等の群は絶対

* 日本学術振興会特別研究員 (PD) 課題番号 23 · 200

ガロワ群 G_{K} の部分群であり、共役を除いて一意に定まります)。同様に p 進数体 (の有限次拡大) $\mathcal{K}$ に対しても、$G_{\mathcal{K}}$ で其の絶対ガロワ群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathcal{K})$ を表すものとします。

■専門家の方向けの注意　本稿では類体論の相互写像を、素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して **幾何学的フロベニウス元** *geometric* FROBENIUS *substitute* $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}$ を対応させる写像として正規化しております (此処で代数体 K の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対する幾何学的フロベニウス元 $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}$ とは、$\mathfrak{p}$ に於ける剰余体 $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}} := \mathfrak{r}_F/\mathfrak{p}$ の位数を q とするとき、$\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}$ の任意の元 x に対して $x \mapsto x^{q^{-1}}$ を誘導する絶対ガロワ群 G_{K} の元のことです。斯様な元は共役の不定性を除いて一意に定まります)。特にディリクレ指標 χ 及び有理素数 ℓ に対して $\chi(\mathrm{Frob}_\ell) := \chi(\ell)$ を満たす様に記法を定めております。より具体的には、例えば良く行われる円分拡大のガロワ群の同一視

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_m)/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times;\ \sigma_a \mapsto a$$

(但しガロワ群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_m)/\mathbb{Q})$ の元 σ_a は、任意の 1 の m 乗根 ζ_m を ζ_m^a に写す $\mathbb{Q}(\mu_m)$ の $\mathbb{Q}$-自己同型写像を表わすこととします) の下では $\chi(\sigma_a) = \bar{\chi}(a) := \chi^{-1}(a)$ が成り立つものとしています。本稿で登場する p 進ゼータ関数の補間公式 (例えばアミース、ヴェリュ、ヴィシク等のもの) に於いて、ディリクレ指標による捻りの部分が良く知られている形のものと一見異なる表記である様に見えるのは、主に此の類体論の正規化の違いに起因するものです。

目次

§1　楕円保型形式の場合

本節では楕円尖点形式の円分岩澤主予想を定式化し、現在知られている結果を紹介します。

§1.1 楕円尖点形式の円分岩澤主予想

k を 2 以上の整数、N を正の整数とし、$\chi\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ を N を法とするディリクレ指標とします。重さ k、レベル N、Nebentypus[*1] χ の楕円尖点形式のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $S_k(N,\chi;\mathbb{C})$ で表します。つまり $S_k(N,\chi;\mathbb{C})$ の元 f は、ポワンカレ上半平面 $\mathfrak{h}=\{\tau\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau)>0\}$ 上定義された複素数値正則関数で、$SL_2(\mathbb{Z})$ のレベル $\Gamma_0(N)$ 合同部分群

$$\Gamma_0(N)=\left\{\gamma=\begin{pmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ c_\gamma & d_\gamma \end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, c_\gamma\equiv 0 \mod N\right\}$$

の任意の元 γ に対して **保型性関係式** *automorphy relation*

$$f(\gamma\tau)=\chi(d_\gamma)(c_\gamma\tau+d_\gamma)^k f(\tau), \qquad {}^\forall\tau\in\mathfrak{h}$$

を満たし、さらに「(モジュラー曲線 $X_1(N)$ の) 尖点での値が 0」となるもの[*2]です。但し $\gamma\in SL_2(\mathbb{Z})$ は $\mathfrak{h}$ 上にメービウス変換 $\tau\mapsto\gamma\tau=(a_\gamma\tau+b_\gamma)(c_\gamma\tau+d_\gamma)^{-1}$ で作用するものとします。

さて、$S_k(N,\chi;\mathbb{C})$ の元 f で p **通常** *p-ordinary* な p **安定新形式** *p-stabilised newform* であるものを考えます。此処で f が p 安定新形式 であるとは、f 自身が三宅敏恒の意味での原始形式 primitive form になっているか、レベルが p と素な原始形式 f' の p 安定化 (大雑把に言えば「p の外でのヘッケ固有値を変えずに、レベルが p の倍数となる様にする操作」のことです) として f が得られることとします[*3]。特に f はヘッケ代数の作用に関する同時固有形式であって、f の (無限遠点のまわりでの) フーリエ級数展開を $f(\tau)=\sum_{n=1}^\infty a(n;f)q^n,\ q=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ と表記することにすると $a(1;f)=1$ であって、各 $a(n;f)$ は f に関するヘッケ作用素 T_n の固有値と等しくなっています (ヘッケ作用素の理論については [Sh71, Chapter 3.] 等を参照して下さい)。さらに有理数体 $\mathbb{Q}$ に $\{a(n;f)\}_{n=1}^\infty$ を付け加えた体 $\mathbb{Q}_f$ は $\mathbb{Q}$ の有限次拡大になることが知られています (此の体 $\mathbb{Q}_f$ を f に関するヘッケ体と呼びます)。以上の設定の下で f が p 通常 とは、f の p 番目のフーリエ係数 $a(p;f)$ の p 進付値が 1 (即ち p 進単数) となることを意味しています[*4]。

以下、斯様な p 通常 p 安定新形式 f に対して二種類の素性が全く異なる不変量 (即ち代数的不変量であるセルマー群の特性イデアルと、解析的不変量である p 進 L 関数) を定義します。其れらが或る意味で本質的に一致することを主張するのが p **通常楕円尖点形式の（円分）岩澤主予想** *the*

---

*1 “側の型” と言う意味のドイツ語由来の用語であり、英語風に Neben-type とも呼ばれています。此の語の尤もらしい日本語訳を著者は見たことがありません。

*2 「f の尖点での値が 0」という表現の厳密な意味については保型形式の標準的な教科書 (例えば [Sh71, Definition 2.1] 等) をご覧下さい。「尖点形式 cuspform」という呼称は、此の「尖点での値が 0 になる」という性質に由来しています。

*3 より精確にはレベル N' の原始形式 f' (但し N' は p と素であるとします) の p **安定化** *p-stabilisation* $f'^{p\text{-st}}_{\alpha_p}$ とは、ヘッケ作用素 T_p に関する f' のヘッケ多項式 $(*)_p\colon X^2-a(p;f')X+\chi(p)p^{k-1}=(X-\alpha_p)(X-\beta_p)$ の一方の根 α_p を選んだときに $f'^{p\text{-st}}_{\alpha_p}(\tau)=f'(\tau)-\beta_p f'(p\tau),\ {}^\forall\tau\in\mathfrak{h}$ で定義されるレベル $N'p$ のヘッケ固有形式のことです。此のとき $f'^{p\text{-st}}_{\alpha_p}$ に関するヘッケ作用素 U_p の固有値は α_p となります。後述の p 通常な場合、即ち $a(p;f')$ が p 進単数となる場合には、特に断りがなければ ($f'^{p\text{-st}}_{\alpha_p}$ も p で通常となる様に) α_p として $(*)_p$ の唯一つの p 進単数根を選ぶことが多いです (其の際には p 安定化を $f'^{p\text{-st}}$ と略記します)。定義から p 安定化は必ず p に於いて旧形式となりますが、慣習として レベル N' の原始形式の p 安定化 は「p 安定新形式」と呼ぶことになっているようです。大変誤解を招き易い用語ですので十分に注意なさって下さい。

*4 始めに固定した埋め込み ι_p によって $a(p;f)$ を $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の元と見做した上での p 進付値を考えています。したがって p 通常性の概念は埋め込み ι_p の取り方に依存します。

(cyclotomic) Iwasawa main conjecture for p-ordinary elliptic cuspforms です。

代数サイドの出発点は、志村五郎やピエール・ルネ・ドリーニュ Pierre René DELIGNE によって構成された f **に付随する** 2 **次元ガロワ表現** GALOIS *representation associated to f*

$$V_f \cong (\mathbb{Q}_{f,(p)}^{\wedge})^{\oplus 2} \ \curvearrowleft \ G_{\mathbb{Q}}$$

です (始めに固定した埋め込み $\mathbb{Q}_f \subset \overline{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\iota_p} \overline{\mathbb{Q}}_p$ が定める p 進付値による $\mathbb{Q}_f$ の完備化を $\mathbb{Q}_{f,(p)}^{\wedge}$ で表しました)。此の表現は pN の外で不分岐な既約表現であって、pN と互いに素な素数 ℓ に於ける幾何的フロベニウス元 Frob_ℓ の作用の固有方程式が f に関するヘッケ作用素 T_ℓ のヘッケ多項式と一致すること、即ち等式

$$\det(X \cdot \mathrm{id}_{V_f} - \mathrm{Frob}_\ell \mid V_f) = X^2 - a(\ell; f)X + \chi(\ell)\ell^{k-1}$$

が pN を割らないような全ての素数 ℓ に於いて成り立つことによって特徴付けられます。ガロワ表現の一般論により $G_{\mathbb{Q}}$ の作用で安定な V_f の $\mathcal{O}$-格子が存在することが知られていますので (但し $\mathbb{Q}_{f,(p)}^{\wedge}$ の整数環を $\mathcal{O}$ とおきました)、其のような $\mathcal{O}$-格子 $T_f \cong \mathcal{O}^{\oplus 2}$ を一つ選んで固定しておきます。さて、1 の p 冪根全体のなす ($\overline{\mathbb{Q}}$ の部分) 群を μ_{p^∞} とし、$\mathcal{O}$ 上の $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})$ の岩澤代数 (または完備群環) $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})]]$ を $\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$ と略記することとします。此のとき $\mathcal{T}_f^{\mathrm{cyc}}$ をテンソル積 $T_f \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$ で定義し、$g \in G_{\mathbb{Q}}$ を $\mathcal{T}_f^{\mathrm{cyc}}$ 上に (対角的に) $x \otimes 1 \mapsto gx \otimes g|_{\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})}$ で作用させます。斯様にして得られる $\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$ 上階数 2 の ガロワ表現 $\mathcal{T}_f^{\mathrm{cyc}} \cong (\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}})^{\oplus 2}$ を T_f の **円分変形** *cyclotomic deformation* と呼びます。$\mathcal{T}_f^{\mathrm{cyc}}$ の離散化として、$\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$ のポントリャーギン双対 $\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc},\vee} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ への $\mathcal{T}_f^{\mathrm{cyc}}$ の係数拡大 $\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}} = \mathcal{T}_f^{\mathrm{cyc}} \otimes_{\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}} \Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc},\vee} \cong (\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc},\vee})^{\oplus 2}$ を考察します (絶対ガロワ群 $G_{\mathbb{Q}}$ はテンソル積の第一成分にのみ作用するものとします)。一般にガロア表現 $\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}$ の **セルマー群** SELMER *group* は、1 次ガロワコホモロジー群 $H^1(\mathbb{Q}, \mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}})$ の元で各素点に於いて或る種の「局所条件」を満たすものの成す部分群として定義されます。「局所条件」は状況に応じて様々なものが用いられますが、此処ではガロワコホモロジーの制限写像から誘導される大域-局所制限射

$$H^1(\mathbb{Q}, \mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}) \to \prod_{\ell \nmid p\infty} H^1(I_\ell, \mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}) \times H^1(I_p, \mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}/\mathrm{Fil}_p^+ \mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}})$$

の核としてセルマー群 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}} \subset H^1(\mathbb{Q}, \mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}})$ を定義します[*5*6]。構成から $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}}$ のポントリャーギン双対 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}}^\vee$ は有限生成な $\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$-加群となりますが、さらに $\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$-加群として捩れ加群になっていることも加藤和也によって示されています ([Kato04, Theorem 17.4(1)] 参照。此の事実は一般にはベイリンソン-加藤元の成すオイラー系を用いた大変非自明な結果です。加藤和也の結果に関しては第 1.2 節でも簡単に触れます)。したがって $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}}^\vee$ の **特性イデアル** *characteristic ideal* $\boxed{\mathrm{Char}_{\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}} \mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}}^\vee}$ $(\subset \Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}})$ が定義されます (特性イデアルの定義の仕方については後程第 3.2 節

*5 f の p 通常性から、T_f は $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現として は階数 1 の 不分岐 $\mathcal{O}$-部分表現 $\mathrm{Fil}_p^+ T_f \subset T_f$ を持つ可約表現となります。したがって $\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}$ にも自然にフィルター構造 $\mathrm{Fil}_p^+ \mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}} \subset \mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}$ が入り、上記のセルマー群の定義では p での「局所条件」を定めるために此のフィルター構造を用いています。此の様に p 上の素点での局所ガロワ表現のフィルター構造を用いて「局所条件」を定めて定義されるセルマー群は、一般に **グリーンバーグのセルマー群** GREENBERG*'s* SELMER *group* と呼ばれています。より一般に、p 進ホッジ理論を用いて p 上の素点での「局所条件」を定めて定義される **ブロック-加藤のセルマー群** BLOCH-KATO*'s* SELMER *group* も岩澤理論では良く扱われます。

*6 定義からも分かる様に厳密にはセルマー群 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_f}$ はガロワ表現の格子 T_f の取り方に依存します。格子の選び方による不定性は、解析サイドでは周期の定義 (注意 2) に反映されることとなります。

で簡単に復習します)。随分と長い道程を経てきましたが、此処で定義された特性イデアルが岩澤理論に於ける代数サイドの主役を演ずることとなります。

> **注意 1** (セルマー群について). セルマー群の定義は近年洗練されたものが採用されているため、専門家以外の方には若干其の意図するところが摑みづらいかもしれません。此処では理解の一助となる様に、楕円保型形式に付随するガロワ表現 T_f を自明なガロワ表現 $T_{\mathrm{triv}} = \mathbb{Z}_p$ に取り替えたものを考えてみましょう。T_{triv} に対しても先程解説した手順に従って円分変形 $T^{\mathrm{cyc}}_{\mathrm{triv}}$ 並びに其の離散化 $\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_{\mathrm{triv}}$ が構成出来ます。此処でセルマー群 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_{\mathrm{triv}}}$ を大域-局所制限射
> $$H^1(\mathbb{Q}, \mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_{\mathrm{triv}}) \to \prod_{\ell \nmid \infty} H^1(I_\ell, \mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_{\mathrm{triv}})$$
> の核として定義すると[*7]、簡単な計算により $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_{\mathrm{triv}}}$ のポントリャーギン双対 $\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_{\mathrm{triv}}}$ は $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ の至る処不分岐な最大副 p アーベル拡大 M_∞ のガロワ群 $\mathrm{Gal}(M_\infty/\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}))$ と $\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\mathcal{O}}$-加群として 同型となります (此の場合「局所条件」は拡大 $M_\infty/\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ の分岐を統制するために課せられている条件と見ることが出来ます)。さらに大域類体論の相互写像によって同型
> $$\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_{\mathrm{triv}}} \cong \mathrm{Gal}(M_\infty/\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})) \cong \varprojlim_{n,\ \text{ノルム}} \mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\mu_{p^n}))\{p\}$$
> が得られます。但し $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\mu_{p^n}))\{p\}$ は円分体 $\mathbb{Q}(\mu_{p^n})$ のイデアル類群の p-シロー部分群を表しています。上記の同型の右辺は円分体のイデアル類群 (の射影極限) という非常に数論的な不変量であり、岩澤理論の創設者たる岩澤健吉の一連の研究の出発点とも呼べる対象です (其のため右辺の加群は屢々 **岩澤加群** IWASAWA *module* と呼ばれています)。セルマー群という概念は、一般のガロワ表現に対してもイデアル類群や岩澤加群のような数論的な不変量を構成するために産み出されたものであると見ることも出来ましょう。著者の私見としては、此のように考えることで一見難解に思われるセルマー群の概念も比較的受け入れ易くなるのではないかと存じます。 ■

一方で解析サイドの主役は **p 進 L 関数** *p-adic L-function* です。此れについて説明するために先ずは楕円尖点形式 f の L 関数の特殊値について考察しましょう。以下、導手が p の冪乗[*8]のディリクレ指標 ϕ を、p で割り切れる整数 n に対しては $\phi(n) = 0$ と定めることで $\mathbb{Z}$ 上の関数に拡張しておきます。此のときディリクレ級数 $L(s; f, \phi) = \sum_{n=1}^\infty a(n; f)\phi(n)n^{-s}$ はドリーニュによって解決された ラマヌジャン-ペーターソン予想 RAMANUJAN-PETERSSON *conjecture* によって $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > (k+1)/2\}$ で絶対かつ広義一様に収束し、さらに複素数平面 $\mathbb{C}$ 全体に有理型接続されます (解析接続に関しては例えば [Sh71, Theorem 3.66] 等を参照して下さい)。複素関数 $L(s; f, \phi)$ を f に付随する L 関数 (の ϕ による捻り) と呼びます。此処で

$$\{L(j; f, \phi) \mid 1 \le j \le k-1,\ \phi \text{ は導手 } p \text{ 冪のディリクレ指標 }\}$$

は (ドリーニュの意味での) 臨界値 critical values の集合となります。即ち、尖点形式 f の **周期** *period* と呼ばれる複素数 $C^\pm_{f,\infty}$ が存在して、上記の様な j と ϕ に対して $L(j; f, \phi)/C^\pm_{f,\infty}$ が代数

[*7] 此れは $\mathrm{Fil}^+_p \mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_{\mathrm{triv}} = 0$ としてグリーンバーグのセルマー群を考えていることと等価です。

[*8] 此処では導手が p の 0 乗 $(= 1)$ となる場合、即ち ϕ が自明な指標となる場合も含めて考えています。此の場合は全ての整数 n に対して $\phi(n) = 1$ を満たすものとして ϕ を $\mathbb{Z}$ 上の関数と考えます。

的数となります (ドリーニュの臨界値予想についての詳細は原典である [De79] を参照して下さい)。f に付随する p 進 L 関数は、上記の臨界値を「p 進的に補間する」ような元 $\boxed{\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(f)}$ $(\in \Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}})$ として構成されます。より精確には $\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}$ は $\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$ の元で[*9]、$1 \leq j \leq k-1$ を満たす任意の自然数 j 及び導手が p の冪乗の任意のディリクレ指標 ϕ に対して **補間公式** *interpolation formula*

$$\boxed{\chi_{p,\mathrm{cyc}}^{j}\phi(\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(f)) = (j-1)!G(\phi^{-1})A_p(j;f,\phi)\frac{L(j;f,\phi)}{(-2\pi\sqrt{-1})^{j-1}C_{f,\infty}^{\pm}}}$$

を満たすものとして特徴付けられます。但し $\chi_{p,\mathrm{cyc}}\colon \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}_p^\times$ は p 進円分指標であり、ϕ を大域類体論の相互写像によって $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})$ 上定義された位数が有限な指標と同一視しています[*10]。さらに補間公式に現れる記号は以下の様に定義されます。

- $C_{f,\infty}^{+}$ 及び $C_{f,\infty}^{-}$ は「モジュラー表象周期」と呼ばれる複素 (超越) 数で、直観的には「モジュラー曲線上での f の周期積分」として定義されるものです。また、補間公式に於ける複素周期の符号 $\pm$ は $\pm = (-1)^{j-1}\mathrm{sgn}(\phi)$ で定められています。此処で $\mathrm{sgn}(\phi) = \phi(-1)$ はディリクレ指標 ϕ の符号と呼ばれる値です (モジュラー表象周期の定め方については注意 2 を参照して下さい)。
- $G(\phi^{-1}) = \displaystyle\sum_{x \in (\mathbb{Z}/p^{n_\phi}\mathbb{Z})^\times} \phi^{-1}(x)\exp(2\pi\sqrt{-1}x/p^{n_\phi})$ は ϕ^{-1} のガウス和と呼ばれる数です (但し ϕ の導手を p^{n_ϕ} としました)。
- $A_p(j,;f,\phi) = \begin{cases} 1 - \dfrac{p^{j-1}}{\alpha_p(f)} & \phi \text{ が自明な指標のとき,} \\ \left(\dfrac{p^{j-1}}{\alpha_p(f)}\right)^{n_\phi} & \phi \text{ の導手が } p^{n_\phi}\ (n_\phi \geq 1) \text{ のとき} \end{cases}$

  は「p 進補正項」p-adic multiplier と呼ばれるものです (但し $\alpha_p(f) = a(p;f)$ は f に関する U_p 作用素の固有値を表すものとしています)。

斯様な元 $\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(f)$ は、メイザー Barry Mazur 並びに スウィナトン-ダイヤー Henry Peter Francis Swinnerton-Dyer によるヴェイユ曲線に対する p 進 L 関数の構成についての結果 [MSD74] やマニン Yuri Ivanovič Manin による先駆的な仕事 [Ma73, Ma74] を受けて、最終的には アミース Yvette Amice、ヴェリュ Jacques Vélu [AV75]、ヴィシク Mikhail Markovič Višik [Vi76] によって一般の場合に構成されました。彼等の構成は何れも **モジュラー 表象** *modular symbol* と呼ばれるモジュラー曲線上の尖点を結ぶ測地線上での積分作用素を用いるものです。モジュラー表象の理論は保型形式の岩澤理論に於いて中枢的な役割を演ずる極めて重要なものですが、紙面の関係上本稿では此れ以上言及することは差し控えたいと思います (楕円保型形式の p 進 L 関数の所謂 例外零点予想 exceptional zero conjecture について論じたメイザー、テイト John Tate、タイテルバウム Jeremy Teitelbaum の論文 [MTT86] にモジュラー表象の理論や p 進 L 関数の構成の概略、歴史的背景等が良く纏められていますので、興味がある方は是非参考になさって下さい)。尚、f に付随

[*9] 先天的には $\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(f)$ は $\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}$ の元として構成されるものですが、適切な複素周期の選び方の下で (即ち p 最適な周期を採用した際には) $\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(f)$ は $\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$ の元として構成されるべきだと考えられています。今の場合には p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(f)$ が 実際に $\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$ に属することが証明出来ます。楕円保型形式の場合も含め、p 進 L 関数の p 進整性の問題には基本的に繊細な議論が要求されます。

[*10] 指標 $\chi_{p,\mathrm{cyc}}^{j}\phi\colon \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \to \mathcal{O}^\times$ を $\mathcal{O}$-線型かつ連続に $\mathcal{O}$-代数の射 $\chi_{p,\mathrm{cyc}}^{j}\phi\colon \Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}} \to \mathcal{O}$ に拡張して考えています。

する p 進 L 関数は、ランキン-セルバーグの畳み込み積 Rankin-Selberg convolution の理論を用いて構成することも出来ますが、此処では詳細は割愛させていただきます。

注意 2 (保型形式の周期について). ドリーニュの臨界値予想 [De79] に登場する複素周期は其の定義及び性質上零でない代数的数による定数倍の不定性を常に孕んでいますが、p 進 L 関数の生成する単項イデアルに着目する岩澤理論の文脈では、周期をより精密に **p 進単数倍 の不定性を除いて** 定まる様に定義しなければなりません。其の様に定義された複素周期は **p 最適な複素周期** p-optimal complex period と呼ばれています。以下では f (及び T_f) に対する p 最適な (モジュラー表象) 周期 $C^{\pm}_{f,\infty} = C^{\pm}_{f,\infty}(\delta^{\pm}_{T_f}(f))$ の定義の仕方を簡単に解説します。

レベル $\Gamma_1(N)$ の (アファイン) モジュラー曲線を $Y_1(N)_{/\mathbb{Q}}$ で表し、$Y_1(N)$ 上の普遍楕円曲線 $\lambda_{\mathrm{univ}}\colon \mathcal{E} \to Y_1(N)$ を考えます。$Y_1(N)$ の複素有理点の集合 $Y_1(N)(\mathbb{C})$ には複素解析的多様体の構造が入り、ポワンカレ上半平面を用いて $Y_1(N)(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{h}/\Gamma_1(N)$ と一意化されることに注意しましょう。ポワンカレ上半平面 $\mathfrak{h}$ 上の点 τ に対応する $Y_1(N)$ の複素有理点を x_τ で表すことにすると、x_τ に於ける $\mathcal{E}$ のファイバー $\mathcal{E}_{x_\tau}(\mathbb{C})$ は (複素解析的) 楕円曲線 $\mathfrak{h}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$ と同型になります。さて、可換環 A に対して $Y_1(N)(\mathbb{C})$ 上の局所系 $\mathcal{H}^1_A$ を $\mathcal{H}^1_A := R^1\lambda_{\mathrm{univ},*}A$ で定義しましょう ($\mathcal{H}^1_A$ は $(\mathcal{H}^1_A)_{x_\tau} = H^1_{\mathrm{Betti}}(\mathcal{E}_{x_\tau}(\mathbb{C}), A) \cong A^{\oplus 2}$ で特徴付けられる局所系に他なりません)。局所的に $\mathcal{H}^1_A$ は、$\mathfrak{h}$ 上 0 と 1 を繋ぐ直線で代表される $\mathcal{E}_{x_\tau}(\mathbb{C})$ のサイクル類 c_1 を 1 に、0 と τ を繋ぐ直線で代表されるサイクル類 c_τ を 0 に送る $H_1(\mathcal{E}_{x_\tau}(\mathbb{C}), A)$ 上の A-線型形式 e_1 と、逆に c_1 を 0 に、c_τ を 1 に送る A-線型形式 e_τ からなる基底を持ちます。局所系係数のコンパクト台付きベッチコホモロジー群 $H^1_{c,\mathrm{Betti}}(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathrm{Symm}^{k-2}\mathcal{H}^1_A)$ には所謂 ヘッケ対応 Hecke correspondence を介してヘッケ作用素が作用しており、$A = \mathbb{C}$ のときにはヘッケ作用素の作用に関して同変な写像

$$ES\colon S_k(\Gamma_1(N), \mathbb{C}) \to H^1_{c,\mathrm{Betti}}(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathrm{Symm}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathbb{C}});\ h \mapsto (\tau \mapsto h(\tau)(e_1 - \tau e_\tau)^{\otimes(k-2)}d\tau)$$

が定義されます (アイヒラー-志村写像 Eichler-Shimura map と呼ばれています。尚、此処ではド・ラムの定理によって $H^1_{c,\mathrm{Betti}}(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathrm{Symm}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathbb{C}})$ を暗に局所系係数のド・ラムコホモロジー群と同一視しています)。以降ではヘッケ代数が作用している加群 M に対し、ヘッケ代数の元の族 $\{T_\ell - a_\ell(f)\}_{\ell\colon \text{素数}}$ 及び $\{\langle a\rangle - \chi(a)\}_{a \nmid N}$ の M への作用に関する核の共通部分をとったものを $M[f]$ で表すことにします (当然 $ES(f)$ は $H^1_{c,\mathrm{Betti}}(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathrm{Symm}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathbb{C}})[f]$ に属します)。また、複素共役写像が (ベッチまたはエタール) コホモロジー群に誘導する対合写像が ± 1 倍で作用する固有空間を上付き添字の $\pm$ で表すことにしましょう。

他方、$\mathcal{O}$ は $\mathcal{E}_{\text{ét}}$ 上の $\mathbb{Z}_p$-層と、$\mathbb{Q}^\wedge_{f,(p)}$ は $\mathcal{E}_{\text{ét}}$ 上の p 進層と見做すことが出来ますので、此れを用いて $Y_1(N)_{\text{ét}}$ 上の $\mathbb{Z}_p$-層 $\mathcal{H}^1_{\text{ét},\mathcal{O}} = R^1\lambda_{\mathrm{univ},*}\mathcal{O}$ 並びに p 進層 $\mathcal{H}^1_{\text{ét},\mathbb{Q}^\wedge_{f,(p)}} = R^1\lambda_{\mathrm{univ},*}\mathbb{Q}^\wedge_{f,(p)}$ を定義しましょう。此のとき、ベッチコホモロジーとエタールコホモロジーの比較定理により同型

$$H^1_{c,\mathrm{Betti}}(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathrm{Symm}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathbb{Q}^\wedge_{f,(p)}})[f]^{\pm} \cong H^1_{c,\text{ét}}(Y_1(N)_{/\overline{\mathbb{Q}}}, \mathrm{Symm}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\text{ét},\mathbb{Q}^\wedge_{f,(p)}})[f]^{\pm}$$

が得られます。右辺の $H^1_{c,\text{ét}}(Y_1(N)_{/\overline{\mathbb{Q}}}, \mathrm{Symm}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\text{ét},\mathbb{Q}^\wedge_{f,(p)}})[f]$ には自然に $G_{\mathbb{Q}}$ が作用し、表現 V_f と同型になります (寧ろドリーニュによる f に付随するガロワ表現の構成其のものです)。必要ならば適当にスカラー倍を調整することで

T_f は $H^1_{c,\text{ét}}(Y_1(N)_{/\overline{\mathbb{Q}}}, \mathrm{Symm}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\text{ét},\mathcal{O}})[f]$ の $H^1_{c,\text{ét}}(Y_1(N)_{/\overline{\mathbb{Q}}}, \mathrm{Symm}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\text{ét},\mathbb{Q}^\wedge_{f,(p)}})[f]$ に

於ける像に入るが、$\varpi^{-1}T_f$ は像に入らない (但し ϖ は $\mathcal{O}$ の一意化元)

を満たす様に V_f と $H^1_{c,\text{ét}}(Y_1(N)_{/\overline{\mathbb{Q}}}, \mathrm{Symm}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\text{ét},\mathbb{Q}^{\wedge}_{f,(p)}})[f]$ を同一視しておきます。すると、最初に固定した p 進埋め込み ι_p が誘導する p 進付値に関する $\mathbb{Q}_f$ の付値環を $\mathbb{Z}_{f,(p)}$ で表すとき、$H^1_{c,\mathrm{Betti}}(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathrm{Symm}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathbb{Z}_{f,(p)}})[f]^{\pm}$ の $H^1_{c,\mathrm{Betti}}(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathrm{Symm}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathbb{Q}^{\wedge}_{f,(p)}})[f]^{\pm}$ に於ける像と T_f との $(H^1_{c,\text{ét}}(Y_1(N)_{/\overline{\mathbb{Q}}}, \mathrm{Symm}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\text{ét},\mathbb{Q}^{\wedge}_{f,(p)}})[f]$ に於ける) 共通部分は其々階数 1 の自由 $\mathbb{Z}_{f,(p)}$-加群になります。其処で各々の $\mathbb{Z}_{f,(p)}$-基底 $\delta^{\pm}_{T_f}(f)$ を選んでおきましょう。此れ等は $H^1_{c,\mathrm{Betti}}(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathrm{Symm}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathbb{Z}_{f,(p)}})[f]$ の元と見做され、$H^1_{c,\mathrm{Betti}}(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathrm{Symm}^{k-2}\mathcal{H}^1_{\mathbb{C}})[f]$ での像は $\mathbb{C}$-ベクトル空間としての基底を成しています。以上の設定の下で、f のアイヒラー-志村類 $ES(f)$ を基底 $\delta^{\pm}_{T_f}(f)$ に関する線形結合表示で表したときの係数

$$ES(f) = C^{+}_{f,\infty}\delta^{+}_{T_f}(f) + C^{-}_{f,\infty}\delta^{-}_{T_f}(f)$$

として複素周期 $C^{\pm}_{f,\infty}$ を定義します。構成から $\delta^{\pm}_{T_f}(f)$ の選び方を変えても $C^{\pm}_{f,\infty}$ は $\mathbb{Z}_{f,(p)}$ の単数倍しか変わらないことが容易に確かめられますので、$C^{\pm}_{f,\infty}$ は p 最適な複素周期となっています[*11]。 ■

以上で岩澤主予想の主役を演じる二つの対象 $\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_f}$ 及び $\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_p(f)$ が出揃いました。其の何れもが岩澤代数 $\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\mathcal{O}}$ の元乃至イデアルとして構成されていたことに注意して下さい。岩澤主予想は、此の素性が全く異なる二つの $\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\mathcal{O}}$ の元 (或いはイデアル) が本質的に一致することを主張する極めて神秘的かつ驚くべき予想なのです。

楕円尖点形式の (円分) 岩澤主予想　$\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\mathcal{O}}$ のイデアルとして以下の等号が成立する;

$$\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_f} = (\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_p(f))$$

注意 3 (岩澤主予想について). 適切な L 関数の整数点での値 (特殊値) に数論的な不変量 (例えばイデアル類群の位数等) が現れると言う現象は、ディリクレの解析的類数公式等を通じて古来から観察されており、現在に於いては所謂バーチ、スウィナトン-ダイヤー予想やブロック-加藤の玉河数予想といった形で精密な予想が定式化されるに至っています。岩澤主予想は斯様な L 関数の特殊値に纏わる予想の p 進版の一種と見做すことも出来ます (実際、岩澤降下 Iwasawa descent という技法を用いることで臨界値に於ける玉河数予想、或いはコホモロジー的リヒテンバウム予想の p 部分を導出することが出来ます)。著者の個人的な雑感としては、岩澤主予想の醍醐味は $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}$ のような無限次拡大上で (つまり或る種の "極限をとった" 状態で) 理論を展開することで、関数値のみならず p 進 L 関数という "関数其のもの" (或いは p 進測度) を数論的な不変量である特性イデアルと比較出来る様になる点にもあるのではないかと思います。 ■

[*11] 構成からも分かる様に、基底 $\delta^{\pm}_{T_f}(f)$ 及び周期 $C^{\pm}_{f,\infty}$ は厳密には $\mathcal{O}$-格子 T_f の取り方に依存します。格子の選び方による不定性が代数サイドではセルマー群の定義に反映されていることは既に注意した通りです。

§1.2 虚数乗法を持たない場合

本稿の主題は飽く迄虚数乗法を持つ保型形式の岩澤主予想ではありますが、此の十数年の間に **虚数乗法を持たない** 楕円尖点形式の岩澤主予想の研究にも劇的な進展が見られていますので、本小節にて簡単に解説させて戴きたいと思います。岩澤主予想を証明するためには、要するに互いに逆方向の包含関係 $\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_f} \supseteq (\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_p(f))$ と $\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_f} \subseteq (\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_p(f))$ を証明すれば良いわけですが、其々の包含関係は全く異なる手法で示されます*12。

包含関係 $\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_f} \supseteq (\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_p(f))$ は 2004 年に加藤和也 Kazuya KATO によって (少なくとも $\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ に於ける包含関係として)*13 証明されました [Kato04, Theorem 17.4]。加藤の証明手法は、アファインモジュラー曲線 $Y(M,N)$ 上のジーゲル単数 (或る可逆な正則関数の族) から構成される **ベイリンソン-加藤のオイラー系** BEĬLINSON-KATO*'s* EULER *system* を用いた、所謂「オイラー系の議論」に根差したものです。オイラー系とは非常に大雑把に言えば、エタールコホモロジー $H^1_{\text{ét}}(\mathbb{Z}[\mu_m, 1/p], \varpi^a T_f(k-r))$ の元 z_m からなる族 $\{z_m\}_{m\in\Xi}$ でガロワコホモロジーのノルム写像 (または余制限写像 cores) に関して非常に “良い振る舞い” をするもののことです (此処で r は固定した整数で、Σ を p を含む適切な素数の集合とするとき、Ξ は素因子が p 以外の Σ の元を含まない様な自然数全体の集合としています。詳細は [Kato04, Section 13] を参照して下さい)。斯様なオイラー系で、さらに L 関数の特殊値と (相互写像を介して) 巧く結びつくものが存在するとき、ルービン、ペラン-リウ、加藤和也によって整備された或る程度典型的な一般論に基づいて所望の包含関係を導くことが出来ます (オイラー系の一般論についての詳細は [PR98, Kato99, Ru00] を参照なさって下さい)。加藤によるベイリンソン-加藤のオイラー系の構成は非常に精緻かつ巧妙であり、其の過程では剰余体が完全体でない混標数完備離散付値体 (より具体的には、モジュラー曲線の関数体の p 進完備化) の絶対ガロワ群の p 進表現論といった高度な p 進ホッジ理論が展開されています。

他方、包含関係 $\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_f} \subseteq (\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_p(f))$ は (或る程度の量の技術的仮定の下で) クリストファー・マクレーン・スキナー Christopher McLean SKINNER と エリック・ウルバン Eric URBAN の共同研究に於いて証明されました [SU13, Theorem 3.6.1, Theorem 3.6.4]*14。 彼等の手法は、ユニタリ群 $GU(2,2)$ 上の Λ 進アイゼンシュタイン級数 $\mathcal{E}$ で定数項にちょうど f に付随する p 進 L 関数が現れるものを構成した上で、肥田晴三によって構成された **普遍通常ヘッケ環** *universal ordinary* HECKE *algebra* のイデアルで $\mathcal{E}$ を零化するようなもの (此れをアイゼンシュタインイデア

*12 所謂 **解析的類数公式** *analytic class number formula* に相当するものが知られていれば、総実代数体の岩澤主予想の場合の様に上記の包含関係のうち片方を示せば残りの包含関係は自動的に導出されます。しかし楕円保型形式の場合 (或いは一般のガロワ表現の場合) には解析的類数公式の対応物は全く知られていないので (何せ楕円曲線の場合ですらバーチ、スウィナトン-ダイヤー予想というミレニアム問題ですから!!!)、岩澤主予想を示すためには両方の包含関係を個別に証明する必要があります。尤も、L 関数の特殊値の研究の観点からは寧ろ岩澤主予想を通じてバーチ、スウィナトン-ダイヤー予想に迫りたいのですから、此処で類数公式のトリックが適用出来ることを期待するのは虫が良過ぎると言うものでしょう。

*13 もし T_f の或る基底に関して $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}} T_f \cong GL_2(\mathcal{O})$ の像が $SL_2(\mathcal{O})$ を含むならば、加藤の結果はより精密に $\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\mathcal{O}}$ での包含関係として成立します。

*14 実際には彼等は虚二次体の $\mathbb{Z}_p^{\oplus 2}$ 拡大 (二変数) と肥田変形のパラメータ (一変数) を変数とする “3 変数 p 進 L 関数” に対して相当する包含関係を証明し、特殊化の議論や加藤の結果と併せて f の円分岩澤主予想を導いています。

ル Eisenstein ideal と称します) を仲介させて包含関係を証明するという所謂(いわゆる)「アイゼンシュタイン合同式の手法」に基づいています。「アイゼンシュタイン合同式の手法」は元来(がんらい)メイザー及びワイルズ Andrew John Wiles が有理数体や総実代数体の (円分) 岩澤主予想の証明 [MW84, Wil90] に於(お)いて用いた手法で、スキナーとウルバンの手法は其(そ)の直接的な一般化となっています。

岩澤主予想は大変難しい予想で、楕円尖点形式の他の〈対象(モチーフ)〉*15に対する岩澤主予想はまだまだ解決には至らない場合が殆(ほとん)どですが、それでも哲学としては他の〈対象(モチーフ)〉に対する岩澤主予想も楕円尖点形式の場合 (或(ある)いは総実代数体の場合) と同様に、「オイラー系の手法」と「アイゼンシュタイン合同式の手法」によって各々(おのおの)逆方向の包含関係を示すことで証明されるべきであると考えられています。

§1.3　虚数乗法を持つ場合

次に尖点形式 f が <u>**虚数乗法** *complex multiplication* を持つ</u> 場合を考察します。先(ま)ず f が虚数乗法を持つとはどういうことかを説明するために、(A_0) 型量指標*16のテータ持ち上げについて簡単に復習しましょう。

F を虚二次体とし、ガロワ群 $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ の生成元 (即(すなわ)ち複素共役) を c で表します。また、素数 p が F に於(お)いて $p\mathfrak{r}_F = \mathfrak{P}\mathfrak{P}^c$ と完全分解すると仮定します。此処(ここ)では便宜上始めに固定した埋め込み $F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\iota_p} \overline{\mathbb{Q}}_p$ により誘導される p 上の素点を $\mathfrak{P}$ としましょう。F の量指標 $\eta\colon \mathbb{A}_F^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$ が <u>**無限型** $(0,k-1)$ **の** (A_0) **型量指標**</u> *größencharacter of type* (A_0) *of infinity type* $(0,k-1)$ であるとは、η の無限素点成分が $\eta_\infty(x_\infty) = \bar{x}_\infty^{-(k-1)}$ を満たすことでした (但(ただ)し x_∞ は $\mathbb{A}_F^\times$ の無限素点成分 $\cong \mathbb{C}^\times$ の元であり、$^-$ は通常の意味での複素共役を表しています)。此(こ)のとき $\vartheta(\eta)$ を形式的なフーリエ級数展開

$$\vartheta(\eta)(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n;\vartheta(\eta))q^n := \sum_{(0)\neq\mathfrak{A}\subset\mathfrak{r}_F} \eta(\mathfrak{A})q^{\mathcal{N}\mathfrak{A}}$$

によって定めます (但(ただ)し $\mathfrak{r}_F$ は F の整数環を表し、右辺の和は F の零でない整イデアル全体を渡るものとします。また、$\mathcal{N}\mathfrak{A}$ はイデアル $\mathfrak{A}$ の絶対ノルムを表しています)。以下、η に付随する F の分数イデアル群上の指標も記号の濫用(らんよう)で η で表すこととします (導手 $\mathfrak{C}(\eta)$ と互いに素でない分数イデアル $\mathfrak{A}$ に対しては $\eta(\mathfrak{A}) = 0$ と定めます)。すると構成及び形式的な計算から L 関数の等式

$$L(s;\vartheta(\eta)) = L(s;\eta) := \sum_{(0)\neq\mathfrak{A}\subset\mathfrak{r}_F} \frac{\eta(\mathfrak{A})}{\mathcal{N}\mathfrak{A}^s}$$

が成り立ち、(A_0) 型量指標 η の L 関数 $L(s;\eta)$ の関数等式とヴェイユの逆定理から $\vartheta(\eta)$ が $S_k(D_{F/\mathbb{Q}}\mathcal{N}\mathfrak{C}(\eta), \nu_{F/\mathbb{Q}}\eta|_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{f,\times}};\mathbb{C})$ の元となることが従います (より強く $\vartheta(\eta)$ は原始形式となります)。此処(ここ)で $D_{F/\mathbb{Q}}$ は二次体 F の絶対判別式を、$\nu_{F/\mathbb{Q}}$ は二次拡大 $F/\mathbb{Q}$ に付随する二次指標を表してい

---

*15 此処(ここ)では岩澤主予想が考えられる様な (幾何的) 対象と言う程度の意味合いで考えて戴(いただ)いて差し支えありません。

*16 代数体のイデール類群の指標のうち「無限素点成分が代数的なもの」を指す用語で、代数的ヘッケ指標 algebraic Hecke character とも呼ばれています。(A_0) 型量指標という呼称は、アンドレ・ヴェイユ André Weil による量指標の分類 (と言っても非常に大雑把(おおざっぱ)なものですが) に於(お)いて用いられたものです。量指標 größencharacter という呼称自体はヘッケによって導入されたものと思われます。

ます。尖点形式 $\vartheta(\eta)$ は η の **テータ持ち上げ** *theta lifting* と呼ばれています[*17]。定義から $\vartheta(\eta)$ の p でのフーリエ係数 $a(p;\vartheta(\eta))$ は $\eta(\mathfrak{P})+\eta(\mathfrak{P}^c)$ で与えられ、もし量指標 η が $\mathfrak{P}$ で不分岐であるならば ($\iota_p(\eta(\mathfrak{P}))$ が $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}^{\times}$ に含まれるため) $\vartheta(\eta)$ が p 通常となることが従います。p 通常 p 安定新形式 f が虚数乗法を持つとは、此処では p が完全分解する様な虚二次体 F と、F 上定義された無限型 $(0,k-1)$ の (A_0) 型量指標 η で (ι_p が誘導する) p 上の素イデアル $\mathfrak{P}$ で不分岐なものが存在して、f が η のテータ持ち上げ $\vartheta(\eta)$ の p 安定化として表されることであると定義します[*18]。

次に代数サイドで何が起こっているのかを見て行きましょう。以下記号の簡略化のため η の導手 $\mathfrak{C}(\eta)$ を単に $\mathfrak{C}$ で表し、$F_{\mathfrak{C}p^\infty}$ で F の法 $\mathfrak{C}p^\infty$ の射類体 ray class field modulo $\mathfrak{C}p^\infty$ を表すこととします。また、$\mathcal{O}$ 上の $\mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F)$ の岩澤代数を $\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$ で表し[*19]、$\mathcal{O}$ の商体 (即ち $\mathbb{Q}_{f,(p)}^{\wedge}$) を $\mathcal{K}$ で表すことにします。大域類体論により η に対応してガロワ群の連続指標 $\eta^{\mathrm{gal}}\colon \mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{C}p^\infty}/F)\to\mathcal{O}^\times$ が得られます。此のとき $\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}$ に付随するガロワ表現 $V_{\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}}$ は、G_F の 1 次元 $\mathcal{K}$-線型ガロワ表現 $\mathcal{K}(\eta^{\mathrm{gal}})$ の誘導表現 $\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\mathcal{K}(\eta^{\mathrm{gal}})$ と同型になります[*20]。特に $V_{\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}}$ の $G_{\mathbb{Q}}$ 安定な $\mathcal{O}$-格子として $T_{\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}}=\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}\mathcal{O}(\eta^{\mathrm{gal}})$ が取れます。此のとき誘導表現に対するシャピロの補題から

$$H^1(\mathbb{Q},\mathcal{A}_{\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}}^{\mathrm{cyc}})=H^1(\mathbb{Q},\mathrm{Ind}_F^{\mathbb{Q}}(\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}}))\underset{\text{シャピロの補題}}{\cong}H^1(F,\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}})$$

が成り立ちます (但し $\mathcal{T}_f^{\mathrm{cyc}}$ 及び $\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}$ の構成と同様に、$\mathcal{O}(\eta^{\mathrm{gal}})$ の円分変形 $\mathcal{T}_\eta^{\mathrm{cyc}}$ は係数拡大 $\mathcal{O}(\eta^{\mathrm{gal}})\otimes_{\mathcal{O}}\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$ に G_F を対角的に作用させることで定義し、其の離散化 $\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}}$ は $\mathcal{T}_\eta^{\mathrm{cyc}}\otimes_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}}\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc},\vee}$ で定義しています)。此の同型により 2 **次元ガロワ表現** $\mathcal{A}_{\vartheta(\eta)^{p\text{-}st}}^{\mathrm{cyc}}$ **に対するセルマー群を** 1 **次元ガロワ表現** $\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}}$ **に対するセルマー群に置き換える**ことが可能となります。実際に「局所条件」の部分にもシャピロの補題を適用して計算すると、$\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_{\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}}}$ は大域-局所制限写像

$$H^1(F,\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}})\to\prod_{\mathfrak{L}\nmid\mathfrak{P}}H^1(I_{\mathfrak{L}},\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}})$$

の核として定義される $\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}}$ のセルマー群 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}}}$ と同一視出来ることが分かります。

$\vartheta(\eta)$ と η の (複素) L 関数が一致することから、p 進 L 関数の側でも $\vartheta(\eta)^{p\text{-}st}$ に付随する p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(\vartheta(\eta)^{p\text{-}st})$ が (A_0) 型量指標 η に付随する (円分的) p 進 L 関数 $\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}^{\mathrm{cyc}}(\eta)$ と本質的に「等しい」であろうことは想像に難くありません。したがって (もし $\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}^{\mathrm{cyc}}(\eta)$ が構成されたならば) $f=\vartheta(\eta)^{p\text{-}st}$ に対する円分岩澤主予想は (A_0) 型量指標 η に対する円分岩澤主予想

$$\mathrm{Char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}}}^\vee=(\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}^{\mathrm{cyc}}(\eta)) \tag{1.1}$$

に帰着されると考えられます (後に見る様に、此の等式は岩澤代数 $\Lambda_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}}^{\mathrm{cyc}}:=\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}[[\mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F)]]$ のイデアル間の等式として解釈されるべきものです)。

[*17] (A_0) 型量指標は代数群 $GL(1)$ の保型形式と見做せるため、テータ持ち上げは $GL(1)$ から $GL(2)$ への所謂「保型形式の持ち上げ」となっています。テータ持ち上げは種々の「保型形式の持ち上げ」の中でも最も単純なものの代表例と言えましょう。

[*18] 此のことは、或る二次指標 ν で f と「f の ν による捻り」の殆ど全てのフーリエ係数が一致するものが存在することと同値です。こちらの条件の方が虚数乗法を持つ楕円曲線に付随する保型形式の性質を直接一般化したものなので、「虚数乗法を持つ」というイメージに近いかもしれません。同値性については [Ri77, Section 4] を参照して下さい。

[*19] p は F で完全分解するので、$\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$ は制限写像によって $\mathcal{O}$-代数として自然に $\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$ と同型になります。

[*20] $V_{\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}}$ の半単純性及び、F で分裂する pN を割り切らない素数 $\ell=\mathfrak{L}\mathfrak{L}^c$ に対して $\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}(\mathrm{Frob}_\ell\mid V_{\vartheta(\eta)^{p\text{-}st}})$ が $a(\ell;\vartheta(\eta)^{p\text{-st}})=\eta(\mathfrak{L})+\eta(\mathfrak{L}^c)$ と一致するという $V_{\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}}$ の特徴付けから (チェボタレフの稠密性定理を介して) 従います。詳細は [Ri77] をご覧下さい。

(A_0) 型量指標 η に付随する p 進 L 関数 $\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_{p,\mathrm{CM}}(\eta)$ は直接構成されるわけではなく、所謂 **虚二次体の二変数 p 進 L 関数** $\mathcal{L}_p(F)$ のガロワ指標 η^{gal} に依る捻り (を特殊化したもの) として得られます。$\mathcal{L}_p(F)$ は岩澤代数 $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}[[\mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{C}p^\infty}/F)]]$ の元として構成され (但し $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}$ は $\mathbb{Q}_p$ の最大不分岐拡大の整数環です)、補間公式

$$\boxed{\frac{\lambda^{\mathrm{gal}}(\mathcal{L}_p(F))}{\Omega^{w+2r}_{\mathrm{CM},p}} = (w+r-1)!\mathfrak{g}(\lambda)\left(\frac{2\pi}{\sqrt{|D_F|}}\right)^r\left(1-\frac{\lambda(\mathfrak{P})}{p}\right)\left(1-\frac{\check{\lambda}(\mathfrak{P}^c)}{p}\right)\frac{L(0;\lambda)}{\Omega^{w+2r}_{\mathrm{CM},\infty}}}$$

によって特徴付けられます。此処で、$\lambda\colon \mathbb{A}_F^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$ は無限型 $(-w-r, r)$ を持つ (即ち唯一の複素素点 ∞ への制限が $\lambda_\infty(x_\infty) = x_\infty^{w+r}\bar{x}_\infty^{-r}$ で与えられる) ような (A_0) 型量指標で、導手が $\mathfrak{C}p^\infty$ を割り、尚かつ無限型のパラメータ (w, r) が $(w \geq 1$ かつ $r \geq 0)$ または $(w \leq 1$ かつ $w+r-1 \geq 0)$ を満たすもの全体を動くものとします。さらに $\lambda^{\mathrm{gal}}\colon \mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{C}p^\infty}/F) \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ は大域類体論により λ に対応するガロワ指標であるとし、補間公式に現れるその他の記号は以下で定義されるものとします。

- $\check{\lambda}$ は F のイデール x に対して $\lambda(x)\check{\lambda}(x^c) = |x|_{\mathbb{A}_F}$ で定義される (A_0) 型量指標で、λ の双対指標 dual character と呼ばれます。
- $D_F\,(<0)$ は F の絶対判別式です。
- $\mathfrak{g}(\lambda)$ は $\mathfrak{g}(\lambda) = \dfrac{\lambda_{\mathfrak{P}}(\varpi_{\mathfrak{P}}^{-e(\mathfrak{P})})}{p^{e(\mathfrak{P})}} \displaystyle\sum_{x \in (\mathfrak{r}_{F_{\mathfrak{P}}}/\mathfrak{P}^{e(\mathfrak{P})})^\times} \lambda_{\mathfrak{P}}(x) e_{\mathfrak{P}}(\varpi_{\mathfrak{P}}^{-e(\mathfrak{P})}(\sqrt{D_F})_{\mathfrak{P}}^{-1}x)$ で定義され、[dS87] では一般化ガウス和 generalised Gauss sum と呼ばれています。ここで、$\varpi_{\mathfrak{P}}$ は局所体 $F_{\mathfrak{P}}$ の一意化元を、$e(\mathfrak{P})$ は λ の導手に於ける $\mathfrak{P}$ の冪指数を表し、さらに $(\sqrt{D_F})_{\mathfrak{P}}$ は $\sqrt{D_F}$ の $F_{\mathfrak{P}}$ に於ける像を表すものとします。また、$e_{\mathfrak{P}}\colon F_{\mathfrak{P}} \to \mathbb{C}^\times$ は局所体 $F_{\mathfrak{P}}$ の標準的加法指標を表しています。
- $(\Omega_{\mathrm{CM},\infty}, \Omega_{\mathrm{CM},p})\,(\in \mathbb{C}^\times \times (\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}})^\times)$ は其々 F の複素 CM 周期、p 進 CM 周期と呼ばれる超越数で、大雑把には「$\mathfrak{r}_F$ による虚数乗法を持つ楕円曲線の周期積分」で表される量です。詳細は例えば [dS87] 等を参照して下さい。此れ等の量は矢張り適当な代数的数による定数倍の不定性を持ちますが、両者の〈比〉は常に一定となります。

此の様な二変数 p 進 L 関数はヴィシク-マニン [VM74]、カッツ Nicholas Michael Katz [Katz76] 並びにドゥシャリ Ehud de Shalit [dS87] により其々異なる手法で構成されました[*21]。

さて、$\widetilde{F}$ を F の全ての $\mathbb{Z}_p$-拡大 (即ちガロワ群が $\mathbb{Z}_p$ と同型な F のアーベル拡大) の合成体とし、$\widetilde{F}_\infty = \widetilde{F}(\mu_p)$ と定義します。定義から $\widetilde{F}_\infty$ は円分拡大 $F(\mu_{p^\infty})$ を含むことに注意して下さい。類体論により $\widetilde{F}/F$ のガロワ群は $\mathbb{Z}_p^{\oplus 2}$ と同型であり、また $\widetilde{F}_\infty$ は法 p^∞ の射類体 $F_{p^\infty \mathfrak{r}_F}(\subset F_{\mathfrak{C}p^\infty})$ に含まれます。岩澤代数 $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(\widetilde{F}_\infty/F)]]$ のことを $\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}$ で表すこととします。岩澤代数の射

$$\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}[[\mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{C}p^\infty}/F)]] \to \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}[[\mathrm{Gal}(\widetilde{F}_\infty/F)]] =: \Lambda^{\mathrm{CM}}_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}};\ g \mapsto \eta^{\mathrm{gal}}(g)g|_{\widetilde{F}_\infty}$$

による $\mathcal{L}_p(F)$ の像を $\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}(\eta)$ とおきます。自然な商写像 $\mathrm{Gal}(\widetilde{F}_\infty/F) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F)$ が誘導する岩澤代数の射 $\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}} \twoheadrightarrow \Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}} = \Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\mathcal{O}} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}$ (此のような写像を **特殊化写像** *specialisation map* と呼びます) による $\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}(\eta)$ の像 $\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_{p,\mathrm{CM}}(\eta)$ こそが、先程から話題に上がっていた **量指標 η に付**

[*21] 構成法が異なるため、例えばカッツの構成した p 進 L 関数の補間公式とドゥシャリの構成した p 進 L 関数の補間公式は見た目がかなり異なりますが、実は同じ補間公式となっていることが直接計算により確認出来ます。ここではカッツの構成に基づく補間公式を掲載しました。

随する（円分的）p 進 L 関数となります。

ところで $\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}(\eta)$ は元々 $\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}}$ という「大きな」岩澤代数の元でした。其処(そこ)で $\mathcal{T}^{\mathrm{cyc}}_{\eta}$ や $\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_{\eta}$ の構成を真似(まね)て、$\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}$-係数のガロワ表現

$$\mathcal{T}_{\eta}=\mathcal{O}(\eta^{\mathrm{gal}})\otimes_{\mathcal{O}}\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}},\ g(x\otimes 1):=gx\otimes g|_{\widetilde{F}_{\infty}} \quad \text{及び} \quad \mathcal{A}_{\eta}=\mathcal{T}_{\eta}\otimes_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}}\Lambda^{\mathrm{CM},\vee}_{\mathcal{O}}$$

を考え、$\mathcal{A}_{\eta}$ のセルマー群 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_{\eta}}$ を $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_{\eta}}$ と全く同様の大域-局所制限写像の核として定義したときに、(1.1) の類似の等式

$$\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}_{\eta}}=(\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}(\eta)) \tag{1.2}$$

を ($\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}}$ のイデアルの等式として) 考察することには意味がありそうです。実は等式 (1.2) は本質的に **虚二次体の二変数岩澤主予想** *two-variable* IWASAWA *main conjecture for imaginary quadratic fields* と等価な等式で、カール・ルービン Karl RUBIN が楕円単数のなすオイラー系を用いた手法によってかなり一般的な状況で証明しました [Ru91a]。したがって、もし特殊化写像 $\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}\twoheadrightarrow\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\mathcal{O}}$ によって **特性イデアル** $\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}_{\eta}}$ **が** $\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_{\eta}}$ **に写るならば**、二変数岩澤主予想 (1.2) の特殊化として量指標の円分岩澤主予想 (1.1) が従い、上記の議論により目出(めで)たく $f=\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}$ の円分岩澤主予想が示されるであろうと期待されます。以上が「虚数乗法を持つ楕円尖点形式の (円分) 岩澤主予想を虚二次体の二変数岩澤主予想に帰着させる」という方針の概略です (図 1 では、ヒルベルト保型形式の場合の議論の概略を図示しています)。此(こ)の手の議論は重さが 2 のとき (即(すなわ)ち虚数乗法を持つ楕円曲線の岩澤主予想のとき) にはルービン自身が行っています ([Ru91b] 参照)。また前述の加藤和也の結果 [Kato04] でも、虚数乗法を持つ場合には矢張(やは)り同様に虚二次体の二変数岩澤主予想に帰着する方針がとられています。

実際には上記の議論を実行するにはまだ幾(いく)つか克服すべき困難が残っています。具体的には

1) $(\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_{p}(\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}))$ と $(\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_{p,\mathrm{CM}}(\eta))$ が実際に一致するか？ (解析サイドの問題)
2) 特殊化写像により本当に $\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}_{\eta}}$ は $\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_{\eta}}$ に写るか？ (代数サイドの問題)

を検証する必要があります。此(こ)れ等の問題はヒルベルト保型形式の場合でも同様に我々の前に立ち塞(ふさ)がって参りますので、其(そ)の詳細に関しては次節で主定理の主張及び証明の方針を紹介した後に解説することに致しましょう。

> **注意 4** (用語について)**.** 副有限群 $\Gamma\cong\mathbb{Z}_p^{\oplus m}$ の位相的生成元 $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ を選んだとき、$\gamma_j\mapsto 1+T_j$ という対応により岩澤代数 $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ は m 変数の形式的冪(べき)級数環 $\mathcal{O}[[T_1,\ldots,T_m]]$ と同型になります (岩澤-セールの同型)。先程の $\mathrm{Gal}(\widetilde{F}_{\infty}/F)$ は殆(ほとん)ど $\mathbb{Z}_p^{\oplus 2}$ と同型ですから、$\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}$ は "大体" 二変数冪(べき)級数環と同一視出来ます[*22]。「二変数岩澤主予想」という呼称は「"二変数冪(べき)級数環" $\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}$-係数の岩澤主予想」という意味合いで用いられる慣例的な呼称です。此(こ)の視点に立つと、特殊化写像 $\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}\twoheadrightarrow\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\mathcal{O}}$ は (適切な位相的生成元の選び方の下で) 二変数冪(べき)級数環 $\mathcal{O}[[X,Y]]$ の元 $f(X,Y)$ に対する「$Y=0$ の代入 (特殊化)」$f(X,Y)\mapsto f(X,0)$ と見做(みな)すことが出来ます。以降も此(こ)の様な意味合いで「変数」「特殊化」という用語を頻繁(ひんぱん)に用います。 ■

[*22] 精確には、$\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}$ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$ の指標 (即(すなわ)ち **法** p **タイヒミュラー指標** TEICHMÜLLER *character of modulo p*) の冪(べき)乗 ω^a (但(ただ)し $a=1,\ldots,p-1$) でラベル付けられた $p-1$ 個の形式的冪(べき)級数環 $\mathcal{O}[[X,Y]]$ の直積と同型な半局所環となります。

§2　ヒルベルト保型形式の場合 — 主結果

本節では p 概通常ヒルベルト尖点形式の円分岩澤主予想を定式化した上で、主定理の主張を紹介し証明の概略を解説します。但（ただ）し、楕円保型形式の場合と比べてヒルベルト保型形式の場合は設定が格段に繁雑（はんざつ）になりますので、ヒルベルト保型形式の詳細な定義等は全て 付録 A に先送りすることとしました。本節では、兎（と）に角（かく）主定理の証明の方針が基本的には第 1.3 節での議論と同様であるということを感じ取って 戴（いただ） ければ幸いです。

§2.1　ヒルベルト尖点形式の円分岩澤主予想

以下、未定義の用語及び記号については 付録 A を参照して下さい。F^+ を d 次総実代数体とし、p **は** F^+ **に於（お）いて不分岐である** と仮定します。F^+ 上定義された重さ (κ_1, κ_2)、レベル $\mathfrak{N}$、Nebentypus ε のヒルベルト尖点形式 $f \in S_{\kappa_1,\kappa_2}(\mathfrak{N}, \varepsilon; \mathbb{C})$ がさらに p 概通常 な p 安定新形式となっているとしましょう。特に f は正規化されたヘッケ固有形式となり、F^+ の零でない整イデアル $\mathfrak{n}$ に於（お）ける f のフーリエ係数 $C(\mathfrak{n}; f)$ は f に関するヘッケ作用素 $T_\mathfrak{n}$ の固有値と一致します。楕円保型形式の場合と同様に、f に関するヘッケ体 $\mathbb{Q}_f$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ に f のフーリエ係数 $\{C(\mathfrak{n}; f)\}_{(0)\neq\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{r}_{F^+}}$ を添加した体として定義します ($\mathbb{Q}_f$ は矢張（やは）り代数体となります)。先と同様に、最初に固定した p 進埋め込み ι_p が誘導する p 進付値に関する $\mathbb{Q}_f$ の完備化 $\mathbb{Q}^\wedge_{f,(p)}$ の整数環を $\mathcal{O}$ で表すこととしましょう。

斯様（かよう）な f に対して、矢張（やは）り G_{F^+} の 2 次元ガロワ表現

$$V_f \cong (\mathbb{Q}^\wedge_{f,(p)})^{\oplus 2} \ \curvearrowleft\ G_{F^+}$$

が太田雅己 [Oh83]、カラヨル [Ca86]、ワイルズ [Wil88]、テイラー [Ta89, Ta95] 等によって構成されています。即（すなわ）ち V_f は $p\mathfrak{N}$ の外で不分岐な半単純表現であって、$p\mathfrak{N}$ と互いに素な素イデアル $\mathfrak{l}$ に対して

$$\det(X \cdot \mathrm{id}_{V_f} - \mathrm{Frob}_\mathfrak{l} \mid V_f) = X^2 - C(\mathfrak{l}; f)X + \mathcal{N}\mathfrak{l}\varepsilon(\mathfrak{l})$$

が成り立つことで特徴付けられるものです。したがって G_{F^+} の作用で安定な $\mathcal{O}$-格子 $T_f \cong \mathcal{O}^{\oplus 2}$ を選ぶ毎（ごと）に、楕円保型形式の場合と全く同様にして T_f の円分変形 $\mathcal{T}_f^{\mathrm{cyc}}$ 及び $\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}$ が定義されます (但（ただ）し此処（ここ）では $\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\mathcal{O}}$ は岩澤代数 $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(F^+(\mu_{p^\infty})/F^+)]]$ を表しています。此（こ）の表記は $F^+ = \mathbb{Q}$ とおくと第 1 節の記法と整合的になっています)。$\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}$ のセルマー群は大域-局所制限射

$$H^1(F^+, \mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}) \to \prod_{\mathfrak{l}\nmid p\infty} H^1(I_\mathfrak{l}, \mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}) \times \prod_{\mathfrak{p}\mid p} H^1(I_\mathfrak{p}, \mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}/\mathrm{Fil}^+_\mathfrak{p}\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}})$$

の核として定義されます。此処（ここ）で $\mathrm{Fil}^+_\mathfrak{p}\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}$ は、p 上にある F^+ の各素イデアル $\mathfrak{p}$ に於（お）いて f の概通常性から誘導される $\underline{G_{F^+_\mathfrak{p}}\ \textbf{の表現としての}}$ V_f のフィルター付け $\mathrm{Fil}^+_\mathfrak{p}V_f \subset V_f$ から定義される $\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}$ のフィルトレーションです。

他方、解析サイドの主役である f に付随する (円分) p 進 L 関数に関しては、マニンによるヒルベルト・モジュラー多様体上のモジュラー表象を用いた先駆的な構成 [Ma76] を筆頭に多くの人々によって様々な構成がなされていますが、楕円尖点形式の場合と比較すると正規化の方法等に於（お）いてあまり統一的な見解が形成されていない様に思われます。本研究では落合理さんによってモジュラー表象の理論に基づいて構成された p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(f)$ を採用しました [Och12] (比較的同系統の構成

としてディミトロフ Mladen DIMITROV によるもの [Di13] があります)。$\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(f)$ の補間公式等については 付録 A を参照して下さい。

以上の準備の下で、ヒルベルト尖点形式の円分岩澤主予想は次の様に定式化されます (形式的には楕円尖点形式の場合と全く同じものとなります)。

<u>ヒルベルト尖点形式の (円分) 岩澤主予想</u>　$\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$ のイデアルとして以下の等号が成立する;

$$\mathrm{Char}_{\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}}^{\vee} = (\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(f))$$

楕円尖点形式の場合と異なり、ヒルベルト尖点形式の岩澤主予想に関してはまだ殆(ほとん)ど何も分かっていないのが現状である様に思われます。以下では、f が **虚数乗法を持つ** 場合に f の円分岩澤主予想を CM **体の多変数岩澤主予想** に帰着させて考察していきます。

§2.2　主定理と証明の概要

楕円保型形式の場合と同様に、重さ (κ_1, κ_2)、レベル $\mathfrak{N}$、Nebentypus ε の p 概通常 p 安定新形式 f が <u>虚数乗法を持つ</u> とは、此処(ここ)では p の上にある F^+ の素点が全て完全分解する様な F^+ の総虚二次拡大 F 及び F の p 通常 CM 型 Σ $(\subset I_F)$ が存在して、f が F 上定義された或(あ)る (A_0) 型量指標 η で無限型 $\sum_{\sigma\in\Sigma}(\kappa_{1,\sigma|_{F^+}}\sigma + \kappa_{2,\sigma|_{F^+}}\sigma\circ c)$ を持つもののテータ持ち上げ $\vartheta(\eta)$ の p 安定化 $\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}$ として表されることであると定義します。但(ただ)し c は二次拡大 $\mathrm{Gal}(F/F^+)$ の非自明な元 (即(すなわ)ち複素共役) を表すものとします。概通常性の条件を考えると、(A_0) 型量指標 η は各 Σ_p の元 $\mathfrak{P}$ に対して $\mathfrak{P}$ または $\mathfrak{P}^c$ で不分岐であることが要請されますが、以下では η は <u>Σ_p **に属する全ての素イデアルで不分岐である**</u> と仮定します (主定理に於(お)ける仮定 (ord))。

本稿の主定理は以下の通りです。

<u>**主定理**</u> (H.-落合 [HO13, Theorem D]). 虚数乗法を持つ p 概通常 p 安定新形式 f に対し、CM 体 F、p 通常 CM 型 Σ 並びに F 上の (A_0) 型量指標 $\eta\colon \mathbb{A}_F^{\times}/F^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$ を $f = \vartheta(\eta)^{p\text{-}st}$ となる様にとる。さらに以下を仮定する。

(ord) (A_0) 型量指標 η は Σ_p に属する全ての素イデアル $\mathfrak{P}$ で不分岐である。

(ntr) p の上にある全ての F の素イデアル $\mathfrak{p}$ 及び $a = 1, \ldots, p-1$ に対して、剰余ガロワ指標

$$\eta^{\mathrm{gal}}\omega^a|_{G_{F_\mathfrak{p}}} : G_{F_\mathfrak{p}} \to (\mathcal{O}/\varpi\mathcal{O})^{\times}$$

は自明な指標とはならない (但(ただ)し ω は法 p タイヒミュラー指標を、ϖ は $\mathcal{O}$ の一意化元を表すものとする)。

(IMC) F に対する $(d+1+\delta_{F,p})$-変数岩澤主予想が成立する (但(ただ)し $\delta_{F,p}$ は p に関する F のレオポルト欠損)。

(L) 尖点形式 f に付随する円分的 p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(f)$ は零元でない。

此(こ)のとき f に対する円分岩澤主予想が「μ 不変量の部分を除いて」成立する; 即(すなわ)ち等式 $\mathrm{Char}_{\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_f^{\mathrm{cyc}}}^{\vee} = (\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(f))$ が <u>$\Lambda_{+,\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}}^{\mathrm{cyc}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ に於(お)けるイデアルの等式</u> として成立する (但(ただ)し $\Lambda_{+,\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}}^{\mathrm{cyc}} = \Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}$)。

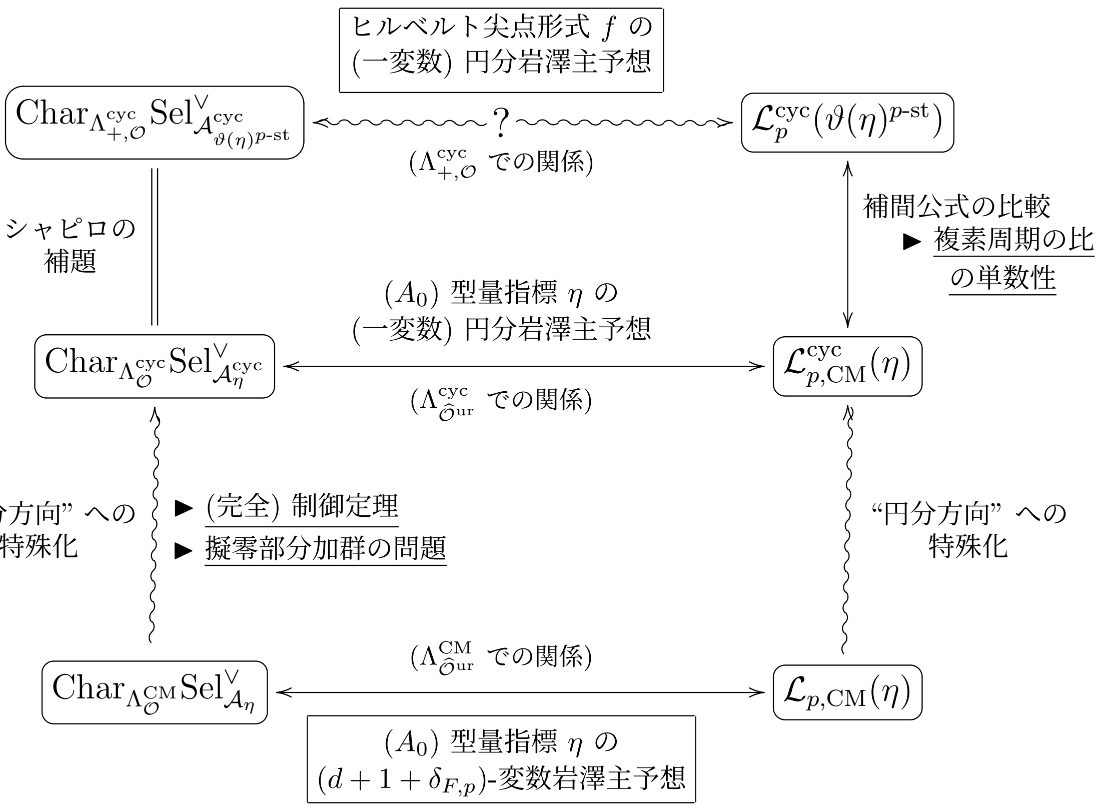

図 1　主定理の証明方針の概略

注意 5 (主定理の仮定について). 主定理の証明の概略を説明する前に、簡単に主定理の各仮定について説明を加えておきましょう。仮定 (ord) は既に説明した様に、$\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}$ が p 概通常となることから要請されるものです。仮定 (ntr) は或るガロワコホモロジー群の消滅を導出するために課されたもので、主に完全制御定理の証明の際に用いられます[*23]。主定理は CM 体 F の多変数岩澤主予想から f の円分岩澤主予想が導かれることを主張するものですので、仮定 (IMC) は最も本質的なものと言えます (此処での多変数岩澤主予想とは、後述の等式 (2.1) が成立することを主張するものです)。最後に仮定 (L) は、特性イデアルの特殊化の最終段階で仮定 (IMC) と共に用いられます。仮定 (L) は f に付随する L 関数の臨界点 $j=\kappa_1^*+1,\kappa_1^*+2,\ldots,\kappa_{2,*}$ が全て L 関数の絶対収束域に含まれない場合 (例えば重さ $(0,t)$ の場合) にのみ非自明な条件となっています。楕円保型形式の場合にはローリック David Ephraim Rohrlich による L 関数の中心値の非消滅性に関する定理 [Roh84, Roh89] から円分的 p 進 L 関数の非自明性が従います。ヒルベルト保型形式の場合にもローリックによる結果が幾つか知られていますが、楕円保型形式の場合程強い結果では無いため円分的 p 進 L 関数の非自明性が導出出来るまでには至っていません。 ■

主定理の証明は第 1.3 節での議論と完全に並行してなされますので、此処では簡単に解説するに留めましょう (図 1 に主定理の証明の概略を図示しました)。先ず代数サイドに関しては、$\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}$ に

[*23] 厳密な言い換えではありませんが、保型形式の言葉では此の仮定は大体「p 上の F^+ の素イデアル $\mathfrak{p}$ に於ける f のフーリエ係数 $C(\mathfrak{p};f)$ が p を法として 1 と合同とならない」といった類のことを表しています。

付随する G_{F^+} の 2 次元ガロワ表現 $V_{\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}}$ が矢張り G_F の 1 次元 $\mathcal{K}$-線型ガロワ表現 $\mathcal{K}(\eta^{\mathrm{gal}})$ の誘導表現 $\mathrm{Ind}_F^{F^+}\mathcal{K}(\eta^{\mathrm{gal}})$ と同型になりますので (但し $\mathcal{K}=\mathbb{Q}^\wedge_{f,(p)}$ とおきました)、シャピロの補題を用いた議論によって $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_{\vartheta(\eta)^{p\text{-}st}}}$ は (A_0) 型量指標 η に対するセルマー群

$$\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}}}=\mathrm{Ker}\left(H^1(F,\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}})\to\prod_{w\nmid\Sigma_p}H^1(I_w,\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}})\right)$$

と同一視されます ($\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_{\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}}$ や $\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}}$ 等は形式的には第 1.3 節で登場したものと全く同様にして定義出来ますので、此処では定義は省略します)。

続いて解析サイドについて考察します。第 1.3 節と同様に、$\widetilde{F}$ を F の全ての $\mathbb{Z}_p$-拡大の合成体とし、$\widetilde{F}_\infty=\widetilde{F}(\mu_p)$ と定義しましょう。大域類体論によって拡大 $\widetilde{F}/F$ のガロワ群は $\mathbb{Z}_p^{\oplus(d+1+\delta_{F,p})}$ という "大きな" ガロワ群となります。但し $\delta_{F,\delta}$ は p に関する F のレオポルト欠損を表すものとします[*24]。岩澤代数 $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(\widetilde{F}_\infty/F)]]$ を先の記号を踏襲して $\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}$ で表すことにします。(A_0) 型量指標 η と対応するガロワ指標 η^{gal} は、(η の導手を $\mathfrak{C}$ で表すことにすると) F の法 $\mathfrak{C}p^\infty$ の射類体 $F_{\mathfrak{C}p^\infty}$ のガロワ群 $\mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{C}p^\infty}/F)$ を経由します。一方で虚二次体の二変数 p 進 L 関数の構成を一般化する形でカッツ [Katz78] 並びに肥田、ティルウィン Jacques TILOUINE [HT93] によって **CM 体の** $(d+1+\delta_{F,p})$**-変数** p **進** L **関数** $\mathcal{L}_p(F)$ が岩澤代数 $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}[[\mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{C}p^\infty}/F)]]$ の元として構成されています (補間性質等については 付録 A をご覧下さい)。したがって矢張り η^{gal} での "捻り" 写像

$$\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}[[\mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{C}p^\infty}/F)]]\to\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}[[\mathrm{Gal}(\widetilde{F}_\infty/F)]]=:\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}}\ ;\ g\mapsto\eta^{\mathrm{gal}}(g)g|_{\widetilde{F}_\infty}$$

による $\mathcal{L}_p(F)$ の像として (A_0) 型量指標 η に付随する $(d+1+\delta_{F,p})$-変数 p 進 L 関数 $\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}(\eta)$ が得られ、其の特殊化写像による像として円分的 p 進 L 関数 $\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_{p,\mathrm{CM}}(\eta)$ が $\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}}=\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\mathcal{O}}\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}$ の元として構成されます ($F_{\mathfrak{C}p^\infty}$ が $\widetilde{F}_\infty$ を自然に含むことに注意して下さい)。

代数サイドでも $\mathcal{O}(\eta^{\mathrm{gal}})$ の係数環を $\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}$ まで拡大したガロワ表現 $\mathcal{T}_\eta$ (絶対ガロワ群 G_F は矢張り対角的に作用するものとします) 及び其の離散化 $\mathcal{A}_\eta$ を考えて、セルマー群 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}$ を $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}}}$ と全く同様に定義します。此のとき (A_0) **型量指標** η **の** $(d+1+\delta_{F,p})$**-変数岩澤主予想** $(d+1+\delta_{F,p})$*-variable* IWASAWA *main conjecture for the größencharacter* η *of type* (A_0) は等式

(2.1) $$\mathrm{Char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}}\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}_\eta}=(\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}(\eta))$$

が $\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}}=\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}\hat{\otimes}_{\mathcal{O}}\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}$ のイデアルの等式として成立することを主張しています (形式的には虚二次体の二変数岩澤主予想の式 (1.2) と全く同じであることに注意して下さい)。等式 (2.1) は CM 体の $(d+1+\delta_{F,p})$-変数岩澤主予想を "η^{gal} で捻ったもの" に他なりません。したがって、仮定 (IMC) の下で得られる等式 (2.1) の両辺を特殊化写像 $\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}}\twoheadrightarrow\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}}$ で写したものが

(2.2) $$\mathrm{Char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}}}=(\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_{p,\mathrm{CM}}(\eta))$$

となることが確認出来れば、左辺に現れるセルマー群は既に見た様に $\mathrm{Sel}^{\mathrm{cyc}}_{\mathcal{A}_{\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}}}$ と同型になりますので、後は p 進 L 関数 $\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_{p,\mathrm{CM}}(\eta)$ と $\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_p(\vartheta(\eta)^{p\text{-st}})$ が "本質的に一致する" ことを示せれば式 (2.2)

[*24] p の上の F にある素イデアル $\mathfrak{p}$ に於ける局所単数群 $\mathcal{O}^\times_{F_\mathfrak{p}}$ での大域単数群 $\mathfrak{r}_F^\times$ の位相的閉包を $\mathrm{Clos}_\mathfrak{p}(\mathfrak{r}_F^\times)$ で表すとき、レオポルト欠損 $\delta_{F,p}$ は自然な写像 $\mathfrak{r}_F^\times\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_p\to\prod_{\mathfrak{p}|p\mathfrak{r}_F}\mathrm{Clos}_\mathfrak{p}(\mathfrak{r}_F^\times)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ の核の $\mathbb{Q}_p$-次元として定義されます。此の量はレオポルト Heinrich-Wolfgang LEOPOLDT によって全ての代数体に対して 0 になると予想されています (レオポルト予想)。尚、此の予想は代数体の p 進レギュレーターの非自明性と同値な主張となっています。

から $\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}$ の円分岩澤主予想が導かれることになります。以上が主定理の証明の非常に大雑把な概要です。

さて、第 1.3 節の末尾でも指摘した様に、多変数岩澤主予想 (2.1) を特殊化して等式 (2.2) (或いは $\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}$ の円分岩澤主予想) を導出しようとする際には幾つかの乗り越えるべき壁が立ち塞がっていたのでした。具体的には以下に挙げた 2 つの課題です。

1) $(\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}))$ と $(\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}^{\mathrm{cyc}}(\eta))$ が実際に一致するか？　(解析サイドの問題)
2) 特殊化写像により本当に $\mathrm{Char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}}\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}^{\vee}$ は $\mathrm{Char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta^{\mathrm{cyc}}}^{\vee}$ に写るか？　(代数サイドの問題)

問題 1) に関しては **複素周期の比の p 進単数性の問題** が深く関わってきます。問題 2) はさらに以下の 2 つの問題に細分することが出来ます。

2-1)「セルマー群の特殊化」と「特殊化のセルマー群」は一致するか？　(制御定理の問題)
2-2)「特性イデアルの特殊化」と「特殊化の特性イデアル」は一致するか？　(擬零部分加群の問題)

何れも或る種の代数的概念と特殊化の操作との間の整合性に纏わる問題です。特に問題 2-2) に関しては **一般には両者は全く一致しない（！）** ことが知られていますので、かなり繊細な取り扱いが必要となってきます。

次節では上記の 3 つの問題について、其々もう少しずつ詳しく考察することに致しましょう。

注意 6 (CM 体の多変数岩澤主予想について). CM 体の $(d+1+\delta_{F,p})$-変数岩澤主予想、即ち仮定 (IMC) は、近年 謝銘倫 Ming-Lun Hsieh により所謂分枝指標 branch character に関する幾らかの仮定の下で成立することが証明されました [Hsi12]。其の手法はスキナーとウルバンの手法 [SU13] の直接的な一般化であり、ユニタリ群 $GU(2,1)$ 上の或る Λ-進アイゼンシュタイン級数に対して「アイゼンシュタイン合同式の手法」を実行したものです (謝の結果に先行して、$GU(2,1)$ の或る種のアイゼンシュタインイデアルと CM 体の岩澤加群の特性イデアルとの間の包含関係に関する ファビオ・メナルディ Fabio Mainardi の結果 [Mai08] があります)。第 1.2 節でも述べた様に、「アイゼンシュタイン合同式の手法」では一般に

(セルマー群のポントリャーギン双対の特性イデアル) $\subset$ (p 進 L 関数の生成する単項イデアル)

の方向の包含関係しか導出されません。[Hsi12] の主定理も上記の包含関係を証明したもので、此の結果と肥田晴三により若干の技術的仮定の下で証明された **反円分岩澤主予想** *anticyclotomic* Iwasawa *main conjecture* [HT94, Hi06b] を組み合わせることで、([Hsi12] の主定理の仮定と [Hi06b] の主定理の仮定が共に成り立つ範囲で) CM 体の $(d+1+\delta_{F,p})$-変数主予想が成り立つことが導出されます。尚、肥田による反円分岩澤主予想の証明は、藤原一宏 Kazuhiro Fujiwara [Fu06] や スキナー、ワイルズ [SW00, SW01] により構築された **総実代数体に対する「$R=\mathbb{T}$」定理** $R=\mathbb{T}$ *theorem for totally real number fields* に根差した非常に卓越したものです。

CM 体の反円分 $\mathbb{Z}_p^{\oplus d}$ 拡大は、或る意味で円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大とは「真逆」の方向の拡大であるため、虚数乗法を持つヒルベルト尖点形式の円分岩澤主予想への応用という観点からは肥田の結果 [Hi06b] のみでは不十分であり、円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大も含んだ形で 主予想の証明を拡張した謝の結果 [Hsi12] が本質的に重要となることは改めて強調しておきます。 ■

§3　主予想の特殊化に於ける技術的困難について

本節では、主定理の証明での鍵とも言える「多変数主予想の円分方向への特殊化」の過程で生ずる諸問題 (複素周期の比の p 進単数性、完全制御定理、擬零部分加群の自明性) についてより詳細に解説します。此れ等の問題は、何れも岩澤理論の研究 (特に異なる〈対象〉に対する岩澤主予想の比較) に於いて基本的かつ重要なものであると言えます。

§3.1　解析サイド — 複素周期の比の p 進単数性

解析サイドで問題となるのは前節の 問題 1)、即ち**二つの p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(\vartheta(\eta)^{p\text{-}st})$ と $\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}^{\mathrm{cyc}}(\eta)$ が本質的に一致するか** (より精確には $\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}} \cong \Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}}$ に於いて同じイデアルを生成するか) ですが、p 進 L 関数は補間公式により特徴付けられるものですので、p 進 L 関数が一致するか否かを調べるためには $\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(\vartheta(\eta)^{p\text{-}st})$ **と** $\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}^{\mathrm{cyc}}(\eta)$ **が満たす補間公式を比較** すれば良いわけです。より具体的には、$\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(\vartheta(\eta)^{p\text{-}\mathrm{st}})$ の補間公式に現れる指標 $\chi_{p,\mathrm{cyc}}^j\phi$ に対して $\chi_{p,\mathrm{cyc}}^j\phi(\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(\vartheta(\eta)^{p\text{-}\mathrm{st}}))$ の値と $\chi_{p,\mathrm{cyc}}^j\phi(\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}^{\mathrm{cyc}}(\eta))$ の値を比較することになります。$\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}^{\mathrm{cyc}}(\eta)$ は元々 F の多変数 p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p(F)$ から具体的に “η^{gal} での捻り” の特殊化として構成されていたわけですし、$\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(\vartheta(\eta)^{p\text{-}\mathrm{st}})$ と $\mathcal{L}_p(F)$ の補間公式は 付録 A で与えてありますので、(補間公式自体が複雑なため計算はやや繁雑になりますが) 極めて形式的な計算によって $\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(\vartheta(\eta)^{p\text{-}\mathrm{st}})$ の補間公式と $\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}^{\mathrm{cyc}}(\eta)$ の補間公式が殆ど一致することが確認出来ます。

ほぼ唯一形式的な計算で片付けられない部分が **複素周期** *complex periods* の箇所です。実際、$\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(\vartheta(\eta)^{p\text{-}\mathrm{st}})$ の補間公式で用いられる複素周期 $C^{\epsilon}_{\vartheta(\eta)^{p\text{-}\mathrm{st}},\infty}$ はモジュラー表象の理論に基づいて定義され、他方 $\mathcal{L}_p(F)$ の補間公式で用いられる複素周期 $\Omega_{\mathrm{CM},\infty}$ は虚数乗法論に基づいて定義されています。此の様に出自の全く異なる複素周期を比較することは一般には決して容易ではありません。

それでも尚 $\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(\vartheta(\eta)^{p\text{-}\mathrm{st}})$ と $\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}^{\mathrm{cyc}}(\eta)$ が $\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}} \cong \Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}}$ に於いて同じイデアルを生成するであろうと予測するのは極めて尤もらしい様に思われます。此のことから以下のような『予想』(期待？) が自然と提起されます (予想の精確な形は [HO13, Conjecture 2.11] を参照して下さい)。

> <u>複素周期の比の p 進単数性についての『予想』</u>
>
> $C^{\epsilon}_{f,\infty}$ と $\Omega_{\mathrm{CM},\infty}$ (の適当な冪乗) の比は p 進単数であろう。

楕円保型形式の場合には落合理とカルティーク・プラザンナ Kartik PRASANNA が対応する『予想』が成り立つことを、楕円尖点形式の L 関数の特殊値の所謂 「法 p 非消滅性」定理と、虚数乗法を持つ楕円曲線のモジュラー曲線によるパラメータ付け modular parametrisation の整モデルを用いて示しています ([OP13, Theorem 6.1] 参照)。此れらの理論は何れも一般のヒルベルト保型形式及びヒルベルト・モジュラー多様体へ拡張することは現時点では難しいと思われるため、上記の『予想』は楕円保型形式の場合以外にはなかなか手が出せない状態にあるのが現状です。主定理の主張に於いて「μ 不変量の部分を除いて」と言う形で μ 不変量の部分の不定性が現れてしまっているのは、上記の『予想』が現時点で未解決であることに起因しています。

§3.2　代数サイド — 完全制御定理と擬零部分加群の自明性

代数サイドの問題はもう少し微妙な様相を呈しています。非常に安易に考えると、$\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}_\eta}$ の特性イデアルの特殊化と $\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_{\vartheta(\eta)^{p\text{-}st}}}$ の特性イデアルが一致することは以下の手順に従って確認されるであろうと期待されます:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}_\eta})\otimes_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}}\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\mathcal{O}} &= (\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}_\eta})\otimes_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}}\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}} \\
&\overset{\text{問題 2-2)}}{=} \mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}}(\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}_\eta}/\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}_\eta}) \\
&\overset{(*)}{=} \mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}])^\vee \\
&\overset{\text{問題 2-1)}}{=} \mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]})^\vee \\
&\overset{(**)}{=} \mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_\eta} \overset{(***)}{=} \mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{+,\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}_{\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}}}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

但し自然な全射写像 $\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}} \twoheadrightarrow \Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\mathcal{O}}$ の核を $\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}$ とおいています。また、$\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}$ 加群 M に対して $M[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]$ で M の最大 $\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}$-捩れ部分加群を表すこととします。

式 (3.1) に於ける数ある等号のうち、最初の等号は単に $\Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\mathcal{O}}$ を定義通り $\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}$ の $\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}$ による商として書き直しただけのものです。また、等号 $(*)$ はポントリャーギン双対が誘導する自然な同型写像 $\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}_\eta}/\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}_\eta} \cong (\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}])^\vee$ から導かれるもの、等号 $(**)$ は $\mathcal{A}_\eta$ 及び $\mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_\eta$ の定義から明らかに成り立つ等式 $\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}] = \mathcal{A}^{\mathrm{cyc}}_\eta$ に由来するもの、そして等号 $(***)$ は前節で説明したシャピロの補題に基づくセルマー群の同一視によるものです。

残る二つの等号が問題となる箇所で、其々非常に尤もらしく見える等号ですが、実は岩澤理論の代数サイドの議論に於ける基本的かつ重要な問題が密接に関わって来る部分となっています (式 (3.1) の 2 番目の等号と 4 番目の等号が其々前節の 問題 2-2) 及び 2-1) と関わって来ます)。以下、各々の等号を正当化するために考察すべき問題についてもう少し詳しく見てゆくことにしましょう。

§3.2.1　問題 2-1) について—セルマー群の完全制御定理

先ずは式 (3.1) の 4 番目の等号

$$\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}])^\vee = \mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]})^\vee$$

について見てみましょう。此の特性イデアル間の等号が示唆することは、“大きな” 係数環 $\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}$ を持つガロワ表現 $\mathcal{A}_\eta$ に対して、**先にセルマー群をとって** ($\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}$) **から特殊化したもの** ($\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}[\mathfrak{A}_\eta]$) と **先に特殊化して** ($\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]$) **からセルマー群をとったもの** ($\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]}$) が **“大体” 等しい** ということに他なりませんので、まさに前節の 問題 2-1) が密接に関わってくる箇所となります。

ところで、ガロワ表現の自然な単射 $\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}] \hookrightarrow \mathcal{A}_\eta$ によってガロワコホモロジー群の間の射 $H^1(F, \mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]) \to H^1(F, \mathcal{A}_\eta)[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]$ が誘導されますが、此の射の $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]}$ への制限はセルマー群の間の射

$$\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]} \xrightarrow{(\sharp)} \mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]$$

を誘導することが比較的容易に確認出来ます。したがって、此の **自然な写像** ($\sharp$) **が同型であれば** 所望の特性イデアル間の等式が得られることとなります。自然な射 ($\sharp$) が同型であるという主張は屢々

完全制御定理 *exact control theorem* と呼ばれています[*25]。

ガロワ表現 $\mathcal{A}_\eta$ に関しては、若干の仮定の下で完全制御定理が従います:

> **定理** ([HO13, Theorem B.]). 仮定 (ord), (ntr) の下で、完全制御定理
> $$\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]$$
> が成立する。

証明は、基本的には図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]} \arrow[r] \arrow[d, "(\sharp)"'] & H^1(F, \mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]) \arrow[r] \arrow[d, "(\star)"'] & \prod_{w \nmid \Sigma_p} H^1(I_w, \mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]) \arrow[d, "(\star\star)"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}] \arrow[r] & H^1(F, \mathcal{A}_\eta)[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}] \arrow[r] & \prod_{w \nmid \Sigma_p} H^1(I_w, \mathcal{A}_\eta)[\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}]
\end{tikzcd}$$

に対して所謂〈蛇の補題〉を適用し、写像 $(\star)$ の同型性と写像 $(\star\star)$ の単射性を示すことで $(\sharp)$ の同型性を証明するという極めて正統的なホモロジー代数の議論に基づいて行われます[*26]。写像 $(\star)$ 及び $(\star\star)$ の核に現れるコホモロジー群の消滅を導出するために仮定 (ntr) が課されています。

完全制御定理によって、式 (3.1) の 4 番目の等号が正当化されることとなります。

§3.2.2　問題 2-2) について—擬零部分加群の自明性

続いて考察する式 (3.1) の 2 番目の等号

$$(\mathrm{Char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}} \mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}^\vee) \otimes_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}} \Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}/\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}} = \mathrm{Char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}/\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}} \mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}^\vee/\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}} \mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}^\vee \tag{3.2}$$

は、要するに **特性イデアルをとる操作** と **特殊化をとる操作** との間の <u>**可換性**</u> (或いは **底変換に対する整合性** *base change compatibility*) を主張しており、まさに前節の 問題 2-2) の答えが肯定的であることを示唆していることに他なりません。底変換に対する整合性は可換環論や代数幾何学に於いて非常に基本的かつ自然な性質であるため、上記の等式も一見すると自然に成り立つべき等式の様に感じてしまいがちですが、此処で問題となるのは **特性イデアルに関しては底変換に対する整合性が一般的には <u>全く</u> 成立しない（！）** ということです (つまり 問題 2-2) の答えは一般には否となります)。此のことを理解するためには、先ず特性イデアルが如何にして定義されていたかに立ち返る必要があります。

以下では当面の間 $\mathcal{R}$ を完備かつネーターな正則局所整域とします[*27]。有限生成 $\mathcal{R}$-加群の準同型 $f \colon M \to M'$ が **擬同型** *pseudoisomorphism* であるとは、f の核と余核が其々 擬零加群となることでした。有限生成 $\mathcal{R}$-加群の構造定理から、任意の有限生成捩れ $\mathcal{R}$-加群 M は $\bigoplus_{j=1}^r \mathcal{R}/(f_j^{e_j})$ の形の加群と擬同型になります。但し各 f_j は $\mathcal{R}$ の既約元であり、e_j は自然数 (1 以上の整数) を表すも

[*25] 特性イデアルが一致することだけならば、『自然な射 $(\sharp)$ がポントリャーギン双対に誘導する写像が <u>擬同型</u>』というより弱い主張 (此の主張を **制御定理** *control theorem* と呼び習わしています) からも従います。擬同型については第 3.2.2 節で簡単に解説しているので、参考になさって下さい。

[*26] 実際には、短完全系列 $0 \longrightarrow \mathcal{A}_\eta[x] \longrightarrow \mathcal{A}_\eta \xrightarrow{\times x} \mathcal{A}_\eta \longrightarrow 0$ に付随する超完全系列を用いて $(\star)$ 及び $(\star\star)$ に相当する写像の核を明示的に記述するため ($\mathcal{A}_\eta$ が可除加群であることに注意して下さい)、[HO13] では $\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}$ の正則列 $(x_1, \ldots, x_{d+\delta_{F,p}})$ を選んで逐次的に完全制御定理を証明する戦略をとっています。

[*27] $\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}$ は形式的冪級数環の直積と同型な半局所環であったため、特性イデアルの議論を展開する際にはタイヒミュラー指標 ω^a $(a = 1, \ldots, p-1)$ で指標分解して、各指標成分毎に考察する必要が生じます。

のとします。此のとき、有限生成捩れ $\mathcal{R}$-加群 M の **特性イデアル** *characteristic ideal* $\mathrm{Char}_{\mathcal{R}}(M)$ は $\prod_{j=1}^{r} f_j^{e_j}$ で生成される $\mathcal{R}$ の単項イデアルとして定義されるのでした。

ところで有限生成 $\mathcal{R}$-加群 N に対し、N に付随する任意の素イデアル[*28]の高さが 2 以上であるとき、N は**擬零加群** *pseudonull module* であると言うのでした。以上のことを踏まえれば、次の様にして特性イデアルの底変換に対する整合性が成り立たない例が簡単に構成出来てしまいます。

例. 環 $\mathcal{R}$ を二変数形式的冪級数環 $\mathbb{Z}_p[[X,Y]]$ とし、加群 M として

$$M = \mathbb{Z}_p[[X,Y]]/(X) \oplus \mathbb{Z}_p[[X,Y]]/(X,Y) \quad (\cong \mathbb{Z}_p[[Y]] \oplus \mathbb{Z}_p)$$

を考えます。此処で $N = \mathbb{Z}_p[[X,Y]]/(X,Y)$ は M の擬零部分加群となっています。定義から M の特性イデアルは (擬零部分加群 $N = \mathbb{Z}_p[[X,Y]]/(X,Y)$ の部分を無視して) $\mathrm{Char}_{\mathcal{R}} M = (X)$ となります。特に $\mathcal{R}/(Y) \cong \mathbb{Z}_p[[X]]$ のイデアルとして $(\mathrm{Char}_{\mathcal{R}} M) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}/(Y) = (X)$ が成り立ちます。

他方、明らかに $M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}/(Y) \cong \mathbb{Z}[[X]]/(X) \oplus \mathbb{Z}_p[[X]]/(X)$ が成り立ちますので、$\mathcal{R}/(Y)$-加群 $M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}/(Y)$ の特性イデアルは $\mathrm{Char}_{\mathcal{R}/(Y)}(M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}/(Y)) = (X^2)$ と計算出来ます。したがって

$$(\mathrm{Char}_{\mathcal{R}} M) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}/(Y) = (X) \neq (X^2) = \mathrm{Char}_{\mathcal{R}/(Y)}(M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}/(Y))$$

となり、M に関しては「特性イデアルの特殊化」と「特殊化の特性イデアル」が一致していないことが確認出来ます。 □

上記の例では明らかに M の **擬零部分加群** $N = \mathbb{Z}_p[[X,Y]]/(X,Y)$ が問題を引き起こしています。つまり、特殊化する前は N は擬零加群として特性イデアルに全く関与していなかったのにも拘らず、特殊化した後では $N \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}/(Y) \cong \mathbb{Z}_p[[X]]/(X)$ が最早擬零加群ではなくなり、特性イデアルに影響してしまっていることが特性イデアルの底変換に対する整合性を崩す要因となっていたわけです。したがって、斯様な **非自明な擬零部分加群が存在しなければ** 特性イデアルと底変換が可換になるのではないかという推測が自然に提起されます。此の推測が或る意味で正しいことを主張するのが次の補題です。

補題 ([Och05, Lemma 3.1])**.** 完備かつネーターな正則局所整域 $\mathcal{R}$ 上の有限生成捩れ加群 M 及び $\mathcal{R}$ の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{P}$ に対して、M が非自明な擬零部分加群を持たず、さらに $\mathfrak{P}$ が M の特性イデアル $\mathrm{Char}_{\mathcal{R}} M$ と互いに素であると仮定する。此のとき M の特性イデアル $\mathrm{Char}_{\mathcal{R}} M$ は $\mathfrak{P}$ での特殊化と可換である: 即ち $(\mathrm{Char}_{\mathcal{R}} M) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}/\mathfrak{P} = \mathrm{Char}_{\mathcal{R}/\mathfrak{P}}(M/\mathfrak{P}M)$ が成立する。

証明の概略. 先ず $\mathcal{R}$ が正則局所整域なので、$\mathfrak{P} = (\Pi)$ は単項イデアルとなることに注意しましょう。構造定理に拠り擬同型 $f\colon M \to \prod_{j=1}^{r} \mathcal{R}/(f_j^{e_j})(=: E)$ が存在しますが、M は非自明な擬零部分加群を持たないので f は単射となります。f の余核の擬零加群を Z で表すこととして、次の図式を

[*28] $\mathcal{R}$-加群 N の或る非零元 x の零化域 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{R}}(x)$ として表される $\mathcal{R}$ の素イデアルを N **に付随する素イデアル** prime ideal associated to N と呼ぶのでした。

考えます。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\times\Pi"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\times\Pi"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\times\Pi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

此処で、Π は $\mathrm{Char}_{\mathcal{R}} M$ と互いに素 (即ち E の各直和因子の分母に現れる既約元と互いに素) であることから、中央の縦の写像が単射となることに注意すると、〈蛇の補題〉から完全系列

$$0 \longrightarrow Z[\mathfrak{P}] \longrightarrow M/\mathfrak{P}M \longrightarrow E/\mathfrak{P}E \longrightarrow Z/\mathfrak{P}Z \longrightarrow 0$$

が得られます。すると特性イデアルの乗法性から

$$(\mathrm{Char}_{\mathcal{R}/\mathfrak{P}} Z[\mathfrak{P}])^{-1}(\mathrm{Char}_{\mathcal{R}/\mathfrak{P}} M/\mathfrak{P}M)(\mathrm{Char}_{\mathcal{R}/\mathfrak{P}} E/\mathfrak{P}E)^{-1}(\mathrm{Char}_{\mathcal{R}/\mathfrak{P}} Z/\mathfrak{P}Z) = (1)$$

が成り立ちます。直接計算により簡単に

$$\mathrm{Char}_{\mathcal{R}/\mathfrak{P}}(E/\mathfrak{P}E) = \left(\prod_{j=1}^{r} f_j^{e_j} \mod \mathfrak{P} \right) = (\mathrm{Char}_{\mathcal{R}} M) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}/\mathfrak{P}$$

が確認出来ますので、後は $\mathrm{Char}_{\mathcal{R}/\mathfrak{P}} Z[\mathfrak{P}] = \mathrm{Char}_{\mathcal{R}/\mathfrak{P}} Z/\mathfrak{P}Z$ を示せば題意は従いますが、此れは簡単な可換環論の議論により証明出来ます (詳細は [Och05, Lemma 3.1] の証明をご覧下さい)。 □

ところで、有限生成捩れ $\mathcal{R}$-加群 M が非自明な擬零部分加群を持たないことは、M のポントリャーギン双対 $M^{\vee}$ が $\mathcal{R}$-加群として **概可除** *almost divisible* であること[*29]と同値となります (証明は [Gr12, Proposition 2.4] を参照して下さい)。つまりセルマー群のポントリャーギン双対 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}^{\vee}$ が非自明な擬零部分加群を持たないことは、セルマー群 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}$ 自身の概可除性と同値となります。セルマー群の概可除性 (或いは岩澤加群の擬零部分加群の自明性) は、岩澤健吉 Kenkichi Iwasawa やラルフ・グリーンバーグ Ralph Greenberg による研究 [Gr78] を筆頭に岩澤理論の創設初期から様々な人によって盛んに調べられてきた古典的な問題ですが、近年グリーンバーグが一般的なガロワ表現の変形に付随するセルマー群が概可除となるための十分条件を与えました [Gr06, Gr12]。彼の判定法の詳細は 付録 A で紹介しています。

此処までの議論からも伺える様に、等式 (3.2) を証明する際の鍵の一つはグリーンバーグの判定法を適用してセルマー群 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}$ の概可除性を示すことにありますが、上記の補題が示唆する様にセルマー群の概可除性が保障しているのは特性イデアルと **高さ 1 の素イデアルでの特殊化** との可換性であり、$\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}$ の様な高さが大きい (精確には高さ $d+\delta_{F,p}$ の) 素イデアルでの特殊化との可換性はセルマー群の概可除性から直ちには導出されないことには注意しなければなりません。其のことを考慮しつつ、[HO13] では **特殊化した後のセルマー群も概可除となる様に、特殊化する方向を選びながら "一変数ずつ" 特殊化する** という方針をとっています[*30] (実際には各タイヒミュラー指標 ω^a 成分毎に議論します)。

先ず、我々が考察している状況ではグリーンバーグの判定法の数々の仮定のうち、$(\mathrm{LEO}_{\mathcal{A}_\eta})$ と $(\mathrm{SUR}_{\mathcal{A}_\eta,\mathcal{L}})$ 以外の条件は常に 殆 ど自明な理由で成立することが確認出来るので、実質的に考察しな

[*29] 離散 $\mathcal{R}$-加群 $\mathcal{A}$ が **概可除** *almost divisible* であるとは、$\mathcal{R}$ の既約元 θ が存在して、高さが 1 で θ と互いに素となる様な $\mathcal{R}$ の任意の素イデアル $\mathfrak{P}$ に対して $\mathfrak{P}\mathcal{A} = \mathcal{A}$ が成立することを意味します。

[*30] 「無限個の $\mathbb{Z}_p$-拡大の中から、有限個の〈悪い〉$\mathbb{Z}_p$-拡大を避けながら特殊化する方向を選んでゆく」というアイデア自体は、既に代数体の岩澤加群の捩れ性や擬零部分加群の自明性について論じたグリーンバーグの古典的論文 [Gr78] の中にも何度も現れていました。

ければならない条件は $(\mathrm{LEO}_{\mathcal{A}_\eta})$ と $(\mathrm{SUR}_{\mathcal{A}_\eta,\mathcal{L}})$ の 2 つだけであることに注意しておきましょう。

■**ステップ 1.** $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta}$ **の概可除性:** オイラー標数公式等を用いた計算により、条件 $(\mathrm{LEO}_{\mathcal{A}_\eta})$ 及び $(\mathrm{SUR}_{\mathcal{A}_\eta,\mathcal{L}})$ (または付録 A で述べられている条件 $(\mathrm{CRK}_{\mathcal{A}_\eta,\mathcal{L}})$) が共に成立することは、大体 $F_{\mathfrak{C}p^\infty}$ の Σ_p **の外不分岐な最大副** p **アーベル拡大** M_{Σ_p} のガロワ群 $X_{\Sigma_p} = \mathrm{Gal}(M_\Sigma/F_{\mathfrak{C}p^\infty})$ が $\mathcal{O}[[\mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{C}p^\infty}/F)]]$-加群として捩れ加群であることと同値であることが証明出来ます。後者の条件は、肥田とティルウィンにより $F_{\mathfrak{C}p^\infty}/F$ が所謂(いわゆる) Σ-**レオポルト条件** Σ-Leopoldt *condition* と呼ばれる弱レオポルト予想と類似の条件を満たすことと同値であることが示されています ([HT94, Theorem 1.2.2 (ii)] 参照)。拡大 $F_{\mathfrak{C}p^\infty}/F$ は円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大という弱レオポルト予想 (さらには Σ-レオポルト条件) を満たす拡大を含むことから、古典的な議論により $F_{\mathfrak{C}p^\infty}/F$ 自体も Σ-レオポルト条件を満たすことが従います (例えば [Gr78] や [HT94, Theorem 1.2.2 (iii)] を参照して下さい)。

尚(なお)、F が虚二次体の場合には X_{Σ_p} の捩れ性及び X_{Σ_p} が非自明な擬零部分加群を持たないことは、既(すで)にペラン-リウ Bernadette Perrin-Riou が [PR81] に於(お)いて、グリーンバーグによる岩澤加群についての結果 [Gr78] とワンテンベルジェ Jean-Pierre Wintenberger による局所単数群の射影極限の構造定理 [Win80] を用いて証明していました。

■**ステップ 2.** **逐次的特殊化:** ガロワ群 $\mathrm{Gal}(\widetilde{F}_\infty/F(\mu_{p^\infty}))$ の元からなる集合 $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_{j-1}\}$ が以下を満たす様にとられていると仮定します:

- 元の列 $(\gamma_1-1,\ldots,\gamma_{j-1}-1)$ は $\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}$ に於(お)ける正則列。
- ($\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{j-1}]$ を $\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}/\mathfrak{A}_{j-1}$-加群と見做(みな)したときに) 条件 $(\mathrm{LEO}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{j-1}]})$ 及び $(\mathrm{SUR}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{j-1}],\mathcal{L}})$ が成立。特にセルマー群 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{j-1}]}$ は $\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}/\mathfrak{A}_{j-1}$-加群として概可除。

但(ただ)し $\mathfrak{A}_{j-1}=(\gamma_1-1,\ldots,\gamma_{j-1}-1)$ とし、$\mathfrak{A}_0=(0)$ とおいています。

此(こ)のとき、有限個を除く $\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}/\mathfrak{A}_{j-1}$ の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{P}$ に対して $(\mathrm{LEO}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{j-1}][\mathfrak{P}]})$ 及び $(\mathrm{SUR}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{j-1}][\mathfrak{P}],\mathcal{L}})$ が成立することを用いると (詳細は [Gr06, Gr12] を参照して下さい)、$j \le d+\delta_{F,p}-1$ ならば $\mathrm{Gal}(\widetilde{F}_\infty/F(\mu_{p^\infty}))$ の元 γ_j で

- 元の列 $(\gamma_1-1,\ldots,\gamma_{j-1}-1,\gamma_j-1)$ は $\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}$ に於(お)ける正則列。
- 条件 $(\mathrm{LEO}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_j]})$ 及び $(\mathrm{SUR}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_j],\mathcal{L}})$ が成立。
- $\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}/\mathfrak{A}_{j-1}$ の元として γ_j-1 は $\mathrm{Char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}/\mathfrak{A}_{j-1}}\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{j-1}]}$ を割らない。

の 3 条件を満たすものを巧く選ぶことが出来ます。但(ただ)し $\mathfrak{A}_j=(\gamma_1-1,\ldots,\gamma_j-1)$ とおいています。鍵となる事実は、自然な全射 $\mathrm{Gal}(\widetilde{F}_\infty/F)/\langle\gamma_1,\ldots,\gamma_{j-1}\rangle \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F)$ の核が ($j\le d+\delta_{F,p}-1$ の場合には) 階数が 2 以上の 自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群となり、γ_j の選び方にかなりの自由度が生じるため、γ_j を「有限個の悪い元」を除いた中から選ぶことが出来るということです。特に先の補題から

$$\begin{aligned}(\mathrm{Char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}/\mathfrak{A}_{j-1}}\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{j-1}]})\otimes_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}/\mathfrak{A}_{j-1}}\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}/\mathfrak{A}_j &= \mathrm{Char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}/\mathfrak{A}_j}(\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{j-1}]}[\gamma_j-1])^\vee \\ &= \mathrm{Char}_{\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}/\mathfrak{A}_j}\mathrm{Sel}^\vee_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_j]}\end{aligned}$$

が成り立ちます (最後の等号は完全制御定理の帰結です)。此(こ)の手順は j が $d+\delta_{F,p}-1$ に到達する迄(まで)繰り返すことが出来ます。

■**ステップ 3.** **最終段階:** 最後に $\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}}/\mathfrak{A}_{d+\delta_{F,p}-1}$-係数から $\Lambda_{\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$-係数 への特殊化について考察します。ステップ 2. の結果から $\mathrm{Sel}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{d+\delta_{F,p}-1}]}$ は概可除となりますが、ステップ 2. での議論とは

異なり今回は $\gamma_{d+\delta_{F,p}}$ として自然な全射 $\mathrm{Gal}(\widetilde{F}_\infty/F)/\langle\gamma_1,\ldots,\gamma_{d+\delta_{F,p}-1}\rangle \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F)$ の核 ($\cong \mathbb{Z}_p$) の位相的生成元をとるしか選択肢が無く、$\gamma_{d+\delta_{F,p}}$ の取り方に全く自由度がありません。特に此の様にして選んだ $(\gamma_{d+\delta_{F,p}}-1)$ が特性イデアル $\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{A}_{d+\delta_{F,p}-1}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{d+\delta_{F,p}-1}]}$ と互いに素となるかが先天的には分からず、したがって先の補題が適用出来る状況かどうかも分からない状況になっています。

此の状況を打破するために仮定 (IMC) と (L) を用います。先ず (IMC) により等式

$$\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}_\eta} = (\mathcal{L}_{p,\mathrm{CM}}(\eta))$$

が成り立っていますので、此の等式を自然な全射 $\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}} \twoheadrightarrow \Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}}$ で写したものを考えますと、或る $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}$ の商体の零でない元 a を用いて

$$(\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{A}_{d+\delta_{F,p}-1}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{d+\delta_{F,p}-1}]}) \otimes_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{A}_{d+\delta_{F,p}-1}} \Lambda^{\mathrm{cyc}}_{\mathcal{O}} = (a\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_p(\vartheta(\eta)^{p\text{-st}})) \tag{3.3}$$

と書き表すことが出来ます (左辺に関しては ステップ 2. での計算結果を、右辺に関しては第 3.1 節での解析サイドの計算結果を用いて式変形してあります)。此処で $(\gamma_{d+\delta_{F,p}}-1)$ が特性イデアル $\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{A}_{d+\delta_{F,p}-1}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{d+\delta_{F,p}-1}]}$ を割り切っていると仮定すると、等式 (3.3) の左辺は定義より自明なイデアル (0) となり、右辺が非自明なイデアルであることを主張する (L) と矛盾してしまいます。斯くして $\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{A}_{d+\delta_{F,p}-1}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}_\eta[\mathfrak{A}_{d+\delta_{F,p}-1}]}$ 及び $(\gamma_{d+\delta_{F,p}}-1)$ に対しても補題を適用することが出来、最終的に所望の等式 (3.1) が導かれます。以上を纏めると次の様になります。

定理 (cf. [HO13, Section 3.4])**.** 仮定 (ord), (ntr), (IMC), (L) の下で、等式 (3.1)

$$(\mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}_\eta}) \otimes_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}} \Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}} = \mathrm{Char}_{\Lambda^{\mathrm{CM}}_{\mathcal{O}}/\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}_\eta}/\mathfrak{A}_{\mathrm{cyc}}\mathrm{Sel}^{\vee}_{\mathcal{A}_\eta}$$

が成立する。

CM 体の多変数岩澤主予想 (IMC) を用いない純代数的な手法で (3.1) が導けるかどうかについては当然考察の余地が残っていると思いますが、我々の印象としては、解析サイドの結果を全く使わずに特性イデアルの特殊化に関する結果を導くのは現段階では難しいのではないかと感じております。

§ 付録 A　参考資料

付録として、本稿第 2 節に於いて説明を割愛した諸概念 (ヒルベルト保型形式、CM 体の基礎事項等) について簡単に解説します。本節は主に講演時に配布したレジュメの内容を纏めたものとなっています。以下では本稿の本文と同様に、F^+ は p **上の素点が全て不分岐な** d 次総実代数体とします。

■（アデール的）ヒルベルト尖点形式　以下ではヒルベルト尖点形式の定義を紹介します。ヒルベルト保型形式の扱い方に関しては、ポワンカレ上半平面の直積 $\mathfrak{h}^{I_{F^+}}$ 上或る種の保型性を満たす関数の組 (ベクトル) として扱う流儀もありますが (例えば [Sh78] 等を参照)、此処では記述を簡潔にするためにアデール的な表記を用いてヒルベルト保型形式を導入することにします。

I_{F^+} を F^+ の $\overline{\mathbb{Q}}$ への相異なる d 個の埋め込みの成す集合とし、I_{F^+} を自由基底とする自由アーベル群を $\mathbb{Z}[I_{F^+}]$ で表します。$\mathbb{Z}[I_{F^+}] \times \mathbb{Z}[I_{F^+}]$ の元 (κ_1,κ_2) で、各 $\tau \in I_{F^+}$ に対し $\kappa_{1,\tau} < \kappa_{2,\tau}$ が成り立ち、さらに和 $\kappa_{1,\tau}+\kappa_{2,\tau}$ が τ に依らない一定値 $[\kappa] \geq 1$ をとる様なものを考えます (但し $\kappa_i = \sum_{\tau\in I_{F^+}}\kappa_{i,\tau}\tau$ と表しました)。斯様な組 (κ_1,κ_2) はヒルベルト尖点形式の重さとして現れます (肥田の二桁重さの表記 double-digit weight convention [Hi06a] と呼ばれます)。さらに $\mathbb{Z}[I_{F^+}]$ の

元 $\mathtt{t} = \sum_{\tau \in I_{F^+}} \tau$ を定義しておきます。

ヒルベルト尖点形式のレベルとして F^+ の整イデアル $\mathfrak{N}$ をとり、Nebentypus として法 $\mathfrak{N}$ の (A_0) 型量指標 $\varepsilon\colon \mathbb{A}_{F^+}^\times/F^{+,\times} \to \mathbb{C}^\times$ で無限型が $\kappa_1+\kappa_2-\mathtt{t}$ のもの、即(すなわ)ちアルキメデス素点成分への制限が $\varepsilon_\infty(x_\infty) = x_\infty^{-(\kappa_1+\kappa_2-\mathtt{t})} := \prod_{\tau \in I_{F^+}} x_\tau^{-\kappa_{1,\tau}-\kappa_{2,\tau}+1}$ を満たすものを考えます (以下、此(こ)の様に多重指数を用いた表記を断り無く多用します)。ε_f で ε の有限部分を表すこととしましょう。続いて合同部分群 $\Gamma_0(N)$ の類似として、$GL_2(\mathfrak{r}_{F^+} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}})$ の部分群 $\hat{\Gamma}_0(\mathfrak{N})$ を

$$\hat{\Gamma}_0(\mathfrak{N}) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ c_\gamma & d_\gamma \end{pmatrix} \in GL_2(\mathfrak{r}_{F^+} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}) \,\middle|\, c_\gamma \in \mathfrak{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}} \right\}$$

で定義します (但(ただ)し $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$)。此処(ここ)で、$GL_2(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+ \cong GL_2(\mathbb{R})_+^{I_{F^+}}$ ($GL_2(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ の単位元を含む連結成分) はポワンカレ上半平面 $\mathfrak{h}$ の $d = \sharp I_{F^+}$ 個の直積 $\mathfrak{h}^{I_{F^+}}$ に成分毎(ごと)のメービウス変換で作用することに注意して、 $\mathbf{i} = (\sqrt{-1}, \ldots, \sqrt{-1})$ に関する $GL_2(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+$ の等方化部分群を $C_{\mathbf{i}}$ で表すことにします。任意の $GL_2(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+$ の元 γ 及び $\mathfrak{h}^{I_{F^+}}$ の元 $z = (z_\tau)_{\tau \in I_{F^+}}$ に対して **保型因子** *factor of automorphy* を $J_{\kappa_1,\kappa_2}(\gamma, z) = (\det \gamma)^{\kappa_1-\mathtt{t}}(c_\gamma z + d_\gamma)^{\kappa_2-\kappa_1+\mathtt{t}}$ で定義します。

以上の設定の下で **重さ** (κ_1, κ_2), **レベル** $\mathfrak{N}$, *Nebentypus* ε **のヒルベルト尖点形式** は、関数 $f\colon GL_2(\mathbb{A}_{F^+}) \to \mathbb{C}$ で以下の 3 条件を満たすものとして定義されます。

(CF1) (保型性)
各 $\alpha \in GL_2(F^+), \xi \in Z(GL_2(\mathbb{A}_{F^+}))$ (スカラー行列), $u = u_f u_\infty \in \hat{\Gamma}_0(\mathfrak{N}) C_{\mathbf{i}}$ に対して

$$f(\alpha x u \xi) = \varepsilon(\xi)\varepsilon_f(u_f) f(x) J_{\kappa_1,\kappa_2}(u_\infty, \mathbf{i})^{-1}$$

が成立する。此処(ここ)で、$\mathfrak{r}_{F^+} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}$ の元 a の $\prod_{\mathfrak{l} \mid \mathfrak{N}} \mathfrak{r}_{F^+,\mathfrak{l}}$ への射影を $a_{\mathfrak{N}}$ で表すとき、$\hat{\Gamma}_0(\mathfrak{N})$ の元 γ に対して $\varepsilon_f(\gamma)$ は $\varepsilon_f(\gamma) = \varepsilon_f((a_\gamma)_{\mathfrak{N}})$ で定義されるものとする。

(CF2) (正則性)
各 $z \in \mathfrak{h}^{I_{F^+}}$ に対して $GL_2(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+$ の元 $u_\infty^{(z)}$ を $u_\infty^{(z)}(\mathbf{i}) = z$ を満たす様に選ぶとき、

$$f_g\colon \mathfrak{h}^{I_{F^+}} \to \mathbb{C}\ ;\ z \mapsto f(g u_\infty^{(z)}) J_{\kappa_1,\kappa_2}(u_\infty^{(z)}, \mathbf{i})$$

は全ての $g \in GL_2(\mathbb{A}_{F^+}^f)$ に対して正則関数を定める[*31]。

(CF3) (尖点性)
各 $x \in GL_2(\mathbb{A}_{F^+}^f)$ に対して $\displaystyle\int_{\mathbb{A}_{F^+}/F^+} f\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x\right) du = 0$ が成立する (但(ただ)し du は $\mathbb{A}_{F^+}/F^+$ の適当なハール測度とする)。

重さ (κ_1, κ_2), レベル $\mathfrak{N}$, Nebentypus ε のヒルベルト尖点形式のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を $S_{\kappa_1,\kappa_2}(\mathfrak{N}, \varepsilon; \mathbb{C})$ と表記することにしましょう。此(こ)の空間は $\kappa_1 + \kappa_2$ が $\mathtt{t}$ の整数倍であって、ε の無限型が $\kappa_1 + \kappa_2 - \mathtt{t}$ となる場合以外には自明な空間 $\{0\}$ となることが簡単な計算から従います。

ヒルベルト尖点形式 $f \in S_{\kappa_1,\kappa_2}(\mathfrak{N}, \varepsilon; \mathbb{C})$ は各 $x \in \mathbb{A}_{F^+}$ 及び $y \in \mathbb{A}_{F^+}^\times$ に対して (アデール的) フーリエ級数展開

$$f\left(\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = |y|_{\mathbb{A}_{F^+}} \sum_{\xi \in F_+^{+,\times}} C(\xi y \mathfrak{d}; f)(\xi y_\infty)^{-\kappa_1} e_{\mathbb{A}_{F^+}^\infty}(\sqrt{-1}\xi y_\infty) e_{\mathbb{A}_{F^+}}(\xi x)$$

を持つことが知られています ([Sh78, (2.18)], [Hi06a, Proposition 2.26] 等を参照)。但(ただ)し $\mathfrak{d}$ は F^+

[*31] 関数 f_g が $u_\infty^{(z)}$ によらず定まることは保型性 (CF1) から直(ただ)ちに従います。

の絶対共役差積を表し、$F_+^{+,\times}$ は F^+ の総正な非零元全体のなす加法的モノイドを表すものとします。また、$e_{\mathbb{A}_{F^+}}$ はアデール類群 $\mathbb{A}_{F^+}/F^+$ 上の標準的加法指標とします。実際には $C(-;f)$ は F^+ の整イデアル上定義された複素数値関数となり、此(こ)れを f **のフーリエ係数** と呼びます。

$\phi\colon \mathbb{A}_{F^+}^\times/F^{+,\times} \to \mathbb{C}^\times$ を導手が $p^\infty\mathfrak{r}_{F^+}$ を割り切る様な位数有限の量指標とするとき、f に付随する L 関数 (の ϕ による捻(ひね)り) はディリクレ級数 $L(s;f,\phi)=\sum_{(0)\neq\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{r}_{F^+}} C(\mathfrak{a};f)\phi(\mathfrak{a})\mathcal{N}\mathfrak{a}^{-s}$ (の複素数平面 $\mathbb{C}$ への有理型接続) として定義されます。此(こ)のとき

$$\{L(j;f,\phi)\mid \kappa_1^*+1\leq j\leq \kappa_{2,*},\ \phi \text{ は導手が } p^\infty\mathfrak{r}_{F^+} \text{ を割り切る位数有限の量指標}\}$$

はドリーニュの意味での臨界値の集合となっています (但(ただ)し κ_1^*, $\kappa_{2,*}$ は其々(それぞれ) $\max_{\tau\in I_{F^+}}\kappa_{1,\tau}$, $\min_{\tau\in I_{F^+}}\kappa_{2,\tau}$ を表しています)。

■ヒルベルト尖点形式の p 進 L 関数　此処(ここ)ではヒルベルト尖点形式に付随する p 進 L 関数を落合理さんの定式化 [Och12] に従って紹介します。以下では f は p **概通常** p **安定新形式** であると仮定します。此処(ここ)で、p 上にある F^+ の素イデアル $\mathfrak{p}$ に於(お)いて f が <u>概通常</u> nearly ordinary at $\mathfrak{p}$ であるとは、正規化されたヘッケ作用素 $T_{0,\mathfrak{p}}:=\{\mathfrak{p}^{\kappa_1}\}^{-1}T_\mathfrak{p}$ の f に関する固有値が p 進単数になることを意味しています (ヘッケ作用素の正規化についての詳細は [Hi88, Section 3] や [Hi06a] 等を参照して下さい)。全ての p 上の素点で f が概通常であるとき f は p 概通常であると称することにします。p 安定新形式とは、楕円保型形式の場合と同様に三宅敏恒の意味での尖点的ヒルベルト原始形式に p 安定化を施(ほどこ)して得られるヒルベルト保型形式のことですが、詳細は割愛させていただきます (あまり適当な文献が見当たらないので [HO13, Section 2.2.2] で或(あ)る程度具体的に解説しました)。

p 概通常 p 安定新形式 f に付随する (円分的) p 進 L 関数は、岩澤代数 $\Lambda_{+,\mathcal{O}}^{\mathrm{cyc}}$ の元 $\mathcal{L}_p^{\mathrm{cyc}}(f)$ で、$\kappa_1^*+1\leq j\leq\kappa_{2,*}$ を満たす任意の自然数 j 及び $\mathrm{Gal}(F^+(\mu_{p^\infty})/F^+)$ の任意の位数有限指標 ϕ に対して以下の補間公式を満たすものとして (f に付随するガロワ表現の剰余表現に関する幾つかの技術的な仮定の下で) 構成されています。

$$\begin{aligned}&\chi_{\mathrm{cyc}}^j\phi(\mathcal{L}_p(f))\\&\quad=G(\phi^{-1})\prod_{\tau\in I_{F^+}}\frac{\Gamma(j-\kappa_{1,\tau})}{\Gamma(\kappa_1^*+1-\kappa_{1,\tau})}\prod_{\mathfrak{p}\mid p}A_\mathfrak{p}(j;f,\phi)\frac{L(j;f,\phi)}{(-2\pi\sqrt{-1})^{j(d-\kappa_1^*-1)}C_{f,\infty}^{\epsilon_{\phi,j}}}\end{aligned}$$

但(ただ)し $\chi_{p,\mathrm{cyc}}\colon\mathrm{Gal}(F^+(\mu_{p^\infty})/F^+)\to\mathbb{Z}_p^\times$ は p 進円分指標であり、$G(\phi^{-1})$ は ϕ^{-1} に対するガウス和を、$C_{f,\infty}^\epsilon\in\mathbb{C}^\times$ (但(ただ)し $\epsilon\in\{\pm1\}^{I_{F^+}}$) は (モジュラー表象) 周期と呼ばれる複素数を表しています。また、狭義射類群 $\mathrm{Cl}_{F^+}^+(p^\infty\mathfrak{r}_{F^+})$ のアルキメデス成分への ϕ の制限 $\phi_\infty=(\phi_\tau)_{\tau\in I_{F^+}}$ を $\{\pm1\}^{I_{F^+}}$ 上の指標と見做(みな)したときに、ϕ の符号 $\mathrm{sgn}(\phi)$ を $\mathrm{sgn}(\phi)=(\phi_\tau(-1))_{\tau\in I_{F^+}}$ $(\in\{\pm1\}^{I_{F^+}})$ で定義し、$\epsilon_{\phi,j}=(-1)^{j-\kappa_1^*-1}\mathrm{sgn}(\phi)$ と定めます。さらに p 上の素イデアル $\mathfrak{p}$ での「$\mathfrak{p}$ 進補正項」$A_\mathfrak{p}(f;\phi,j)$ は、$\alpha_\mathfrak{p}(f)$ を二次方程式 $X^2-C(\mathfrak{p};f)X+\varepsilon(\mathfrak{p})\mathcal{N}\mathfrak{p}=0$ の根のうち "$\mathfrak{p}$ 概通常" であるものとしたときに

$$A_\mathfrak{p}(j;f,\phi)=\begin{cases}1-\dfrac{\phi^{-1}(\mathrm{Frob}_\mathfrak{p})\mathcal{N}\mathfrak{p}^{j-1}}{\alpha_\mathfrak{p}(f)} & \mathfrak{p}\text{ が }\phi\text{ の導手 }\mathfrak{c}(\phi)\text{ と素であるとき,}\\[2ex]\left(\dfrac{\mathcal{N}\mathfrak{p}^{j-1}}{\alpha_\mathfrak{p}(f)}\right)^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{c}(\phi))} & \mathfrak{p}\text{ が }\phi\text{ の導手 }\mathfrak{c}(\phi)\text{ を割り切るとき}\end{cases}$$

で定義されるものです。

上記で詳細を省略した $G(\phi^{-1})$ 及び $C^{\epsilon}_{f,\infty}$ 等に関しては [HO13, Section 2.2] を参照して下さい (特にモジュラー表象周期 $C^{\epsilon}_{f,\infty}$ に関しては、楕円保型形式の場合と同様に V_f の $\mathcal{O}$-格子 T_f の選び方を反映した定義を採用する必要があるため (注意 2 参照)、定義の際に [Och12] での構成よりも若干込み入った議論を展開する必要があります)。最後に、$\mathcal{L}^{\mathrm{cyc}}_p(f)$ が満たす上記の補間公式が第 1 節で紹介した楕円保型形式の場合のアミース、ヴェリュ、ヴィシク等の p 進 L 関数と同じタイプの補間公式となっていることを注記しておきます。

■虚数乗法を持つヒルベルト尖点形式　続いて虚数乗法を持つヒルベルト尖点形式の概念を導入します。其のために先ずは CM 体の基本用語について解説しましょう。引き続き F^+ は p **上の素イデアルが全て不分岐な** d 次総実代数体であるとし、F は F^+ を最大総実部分体として含む CM **体**、即ち F^+ の総虚二次拡大であるとします。また c でガロワ群 $\mathrm{Gal}(F/F^+)$ の生成元 (即ち複素共役) を表すこととします。さらに

> **(ord)** p 上の F^+ の素点は全て F で完全分解する

と仮定します (此の条件は p 通常性の条件と呼ばれます)。F に関しても、其の相異なる $2d$ 個の $\overline{\mathbb{Q}}$ への埋め込みの成す集合を I_F で表すことにしましょう。I_F の部分集合 Σ が F の p **通常** CM **型**であるとは、Σ が以下の 2 条件

$$\Sigma \sqcup \Sigma^c = I_F \quad \text{かつ} \quad \Sigma_p \sqcup \Sigma_p^c = \{p \text{ 上の } F \text{ の素イデアル}\}$$

を満たすことでした。但し、Σ の各元 σ について埋め込み $F \xrightarrow{\sigma} \overline{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\iota_p} \overline{\mathbb{Q}}_p$ が誘導する p 上の F の素イデアルが成す集合を Σ_p で表しています。仮定 (ord) によって p 通常 CM 型は常に存在し、其の個数は $2^{\sharp\{p \text{ 上の } F^+ \text{ の素イデアル}\}}$ となることが従います。以下、制限写像が誘導する全単射 $\Sigma \xrightarrow{\sim} I_{F^+}; \sigma \mapsto \sigma|_{F^+}$ を介して Σ と I_{F^+} を同一視します。さらに F の無限素点の集合と Σ を同一視しておきます。また、二次拡大 F/F^+ に付随する二次指標を ν_{F/F^+}、相対判別式を $\mathfrak{D}_{F/F^+}$ で表すこととします。

さて、$\eta \colon \mathbb{A}_F^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$ を 導手 $\mathfrak{C}$ が Σ_p と素な F 上の (A_0) 型量指標とし、其の無限型 μ が $\sum_{\sigma\in\Sigma}(\mu_\sigma\sigma + \mu_{\sigma\circ c}\sigma\circ c)$ で与えられているとします (即ち $x_\infty = (x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \in (F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^\times \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^\times)^\Sigma$ に対して $\eta_\infty(x_\infty) = x_\infty^{-\mu} := \prod_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma^{-\mu_\sigma}\bar{x}_\sigma^{-\mu_{\sigma\circ c}}$ が成立するとします)。此のとき $\mu_\sigma + \mu_{\sigma\circ c}$ は $\sigma \in \Sigma$ に依らず一定値 $-w$ をとることが知られています。本稿の本文と同様に、大域類体論を介して η と対応する F の絶対ガロア群の連続指標を $\eta^{\mathrm{gal}} \colon G_F \to \mathcal{O}^\times_{\mathbb{Q}_p}$ で表しましょう。

さらに此処で η の無限型が Σ-**許容的**、即ち各 Σ の元 σ に対して不等式 $\mu_\sigma < \mu_{\sigma\circ c}$ が成り立つと仮定します。すると、$\mathbb{Z}[I_{F^+}]$ の元 $\kappa_{1,\eta}$ 及び $\kappa_{2,\eta}$ を $\kappa_{1,\eta} = \sum_{\sigma\in\Sigma}\mu_\sigma\sigma|_{F^+}$, $\kappa_{2,\eta} = \sum_{\sigma\in\Sigma}\mu_{\sigma\circ c}\sigma|_{F^+}$ で其々定義するとき、重さ $(\kappa_{1,\eta}, \kappa_{2,\eta})$、レベル $\mathfrak{D}_{F/F^+}\mathcal{N}_{F/F^+}(\mathfrak{C})$、Nebentypus $\nu_{F/F^+}\eta|_{\mathbb{A}^\times_{F^+}}|\cdot|_{\mathbb{A}_{F^+}}$ の尖点的ヒルベルト原始形式 $\vartheta(\eta)$ で、素イデアル $\mathfrak{l}$ でのフーリエ係数が

$$C(\mathfrak{l};\vartheta(\eta)) = \begin{cases} 0 & \mathfrak{l} \text{ が } F \text{ で惰性する場合}, \\ \eta(\mathfrak{L}) + \eta(\mathfrak{L}^c) & \mathfrak{l} \text{ が } F \text{ に於いて } \mathfrak{l} = \mathfrak{L}\mathfrak{L}^c \text{ と分解する場合} \end{cases}$$

となるものが存在することが知られており、(A_0) 型量指標 η の **テータ持ち上げ** *theta lifting* と呼ばれています (例えば [Hi06a, Theorem 2.72] 及び其処で挙げられている参考文献を参照して下さ

い)。逆に此の様な性質を持つ尖点的ヒルベルト原始形式は全て CM 体の (A_0) 型量指標のテータ持ち上げとして表されることも知られています。此の様に、適当な F^+ の総虚二次拡大 F 上定義された (A_0) 型量指標のテータ持ち上げとして表される尖点的ヒルベルト原始形式を **虚数乗法を持つ尖点形式** と呼ぶことにします*32。仮定 (ord) 及び導手 $\mathfrak{C}$ が Σ_p と互いに素という条件によって、テータ持ち上げ $\vartheta(\eta)$ は p 概通常形式となることが容易に分かります。$\vartheta(\eta)$ の p 安定化 $\vartheta(\eta)^{p\text{-st}}$ が本稿の第 2 節及び第 3 節で主要な役割を演じる p 概通常 p 安定新形式となります。

■CM 体の p 進 L 関数　此処ではカッツ [Katz78]、肥田、ティルウィン [HT93] によって構成された CM 体の p 進 L 関数について解説します。総実代数体 F^+ 及び CM 体 F は此れ迄通りとし、Σ を p 通常 CM 型とします。$\mathfrak{d}=\mathfrak{d}_{F^+}$ で F^+ の絶対共役差積を表すこととします。$\mathfrak{C}$ を F の整イデアルとし、分解 $\mathfrak{C}=\mathfrak{F}\mathfrak{F}_c\mathfrak{l}$ を一つ選んで固定します (但し $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_c$ は F^+ 上分裂する素イデアルの積、$\mathfrak{l}$ は F^+ 上惰性する素イデアルの積で、$\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}_c$ は互いに素かつ $\mathfrak{F}_c^c \supseteq \mathfrak{F}$ を満たすものとします)。

さて、$F^\times$ の元 δ で 2 条件

(1_δ) δ は純虚数 (つまり $\delta^c=-\delta$) かつ各 Σ の元 σ に対して $\mathrm{Im}(\sigma(\delta))$ は正;

(2_δ) ある $p\mathfrak{C}\mathfrak{C}^c$ と素な F^+ の分数イデアル $\mathfrak{c}$ が存在して、$\langle u,v\rangle_\delta=(uv^c-u^cv)/2\delta$ で定義される $\mathfrak{r}_F$ 上の交代形式が同型 $\mathfrak{r}_F\wedge_{\mathfrak{r}_{F^+}}\mathfrak{r}_F \xrightarrow{\sim} \mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}$ を誘導する (即ち $\mathfrak{c}$-偏極を誘導する)

を満たすものを一つ選びます。此のとき p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p(F)$ は $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}}[[\mathrm{Gal}(F_{\mathfrak{C}p^\infty}/F)]]$ の元として構成され、補間性質

$$\frac{\lambda^{\mathrm{gal}}(\mathcal{L}_p(F))}{\Omega_{\mathrm{CM},p}^{w\mathsf{t}+2\mathsf{r}}}=(\mathfrak{r}_F^\times:\mathfrak{r}_{F^+}^\times)W_p(\lambda)\frac{(-1)^{wd}(2\pi)^{|\mathsf{r}|}\prod_{\sigma\in\Sigma}\Gamma(k+r_\sigma)}{\sqrt{|D_{F^+}|}\prod_{\sigma\in\Sigma}\mathrm{Im}(\sigma(2\delta))^{r_\sigma}}$$
$$\times\prod_{\mathfrak{L}|\mathfrak{C}}(1-\lambda(\mathfrak{L}))\prod_{\mathfrak{P}\in\Sigma_p}\{(1-\lambda(\mathfrak{P}^c))(1-\check{\lambda}(\mathfrak{P}^c))\}\frac{L(0;\lambda)}{\Omega_{\mathrm{CM},\infty}^{w\mathsf{t}+2\mathsf{r}}}$$

によって特徴付けられます (補間性質の等式の中では多重指数 $\mathsf{r}=\sum_{\sigma\in\Sigma}r_\sigma\sigma$ を用いた表記を使用しています)。但し $\lambda\colon \mathbb{A}_F^\times/F^\times\to\mathbb{C}^\times$ は導手が $\mathfrak{C}p^\infty$ を割るような (A_0) 型量指標で以下の 2 条件を満たすものを任意に動くものとします。

(i) λ の導手は $\mathfrak{F}$ の全ての素因子で割り切れる;

(ii) λ の無限型を $-w\mathsf{t}-\sum_{\sigma\in\Sigma}r_\sigma(\sigma-\sigma\circ c)$ (但し $\mathsf{t}=\sum_{\sigma\in\Sigma}\sigma$) と表したとき、$w$ 及び各 r_σ が

$$(w\geq 1 \text{ かつ } r_\sigma\geq 0\quad {}^\forall\sigma\in\Sigma)\quad\text{または}\quad(w\leq 1 \text{ かつ } w+r_\sigma-1\geq 0\quad {}^\forall\sigma\in\Sigma)$$

を満たす。

また、$\check{\lambda}$ は λ の双対指標 (即ち任意の F のイデール x に対して $\lambda(x)\check{\lambda}(x^c)=|x|_{\mathbb{A}_F}$ を満たす指標) を表しています。さらに、各 Σ_p の元 $\mathfrak{P}$ に対して局所体 $F_\mathfrak{P}$ の一意化元を $\varpi_\mathfrak{P}$、λ の導手に於ける $\mathfrak{P}$ の指数を $e(\mathfrak{P})$、$F_\mathfrak{P}$ 上の標準的な加法指標を $e_\mathfrak{P}$ で表すとき、局所因子 $W_p(\lambda)$ は

$$W_p(\lambda)=\prod_{\mathfrak{P}\in\Sigma_p}\mathcal{N}\mathfrak{P}^{-e(\mathfrak{P})}\lambda_\mathfrak{P}(\varpi_\mathfrak{P}^{-e(\mathfrak{P})})\sum_{x\in(\mathfrak{r}_F/\mathfrak{P}^{e(\mathfrak{P})})^\times}\lambda_\mathfrak{P}(x)e_\mathfrak{P}(\varpi_\mathfrak{P}^{-e(\mathfrak{P})}(2\delta)_\mathfrak{P}^{-1}x)$$

で定義されます (但し $(2\delta)_\mathfrak{P}^{-1}$ は $(2\delta)^{-1}$ の $F_\mathfrak{P}$ での像とします)。

*32 此のとき、殆ど全ての素イデアル $\mathfrak{l}$ に対して $C(\mathfrak{l};\vartheta(\eta))=\nu_{F/F^+}(\mathfrak{l})C(\mathfrak{l};\vartheta(\eta))$ が成立することが確認出来ます。此の性質が「虚数乗法を持つ」という呼称の根拠となっています。

$(\Omega_{\mathrm{CM},\infty}, \Omega_{\mathrm{CM},p}) \in (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} F^{+})^{\times} \times (\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{ur}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{r}_{F^{+}})^{\times}$ は其々カッツの 複素 / p 進 CM 周期 と呼ばれる超越数で、矢張り「$\mathfrak{r}_F$ で虚数乗法を持つヒルベルト-ブルメンタール・アーベル多様体の周期積分」の様なものとして表される量です。両者の〈比〉は周期の定義で用いられる微分形式の選び方によらず一定となります (詳細は [Katz78] 及び [HT93] を参照して下さい)。

尚、p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p(F)$ は厳密には上記の (1_δ), (2_δ) を満たす元 δ の取り方に依存しますが、δ を取り替えた際の影響は全て明示的に書き下せて、特に $\mathcal{L}_p(F)$ が生成するイデアルには影響を与えないため、岩澤主予想の観点からは δ の選び方はあまり深刻な問題とはなりません。

■グリーンバーグの概可除性判定法 付録の締め括りとしてグリーンバーグによるセルマー群の概可除性判定法 [Gr12, Proposition 4.1.1] を紹介します。以下では K を一般の代数体とし、p 上の素点及び無限素点を全て含む K の素点の有限集合 S を固定して考えます。K_S/K で S の外不分岐な K の最大ガロワ拡大を表すことにしましょう。

標数 p の有限体を剰余体に持つ標数 0 の完備局所ネーター正則整域 $\mathcal{R}$ に対し、$\mathcal{R}^\vee$ で其のポントリャーギン双対 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(\mathcal{R}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ を表すことにします。$\mathcal{T}$ を $\mathrm{Gal}(\mathsf{K}_S/\mathsf{K})$ の連続作用を持つ $\mathcal{R}$ 上の有限階数の自由加群とし、$\mathcal{D}$ を $\mathcal{T}$ の離散化、即ち離散的 $\mathcal{R}$-加群 $\mathcal{T} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}^\vee$ で第一成分に $\mathrm{Gal}(\mathsf{K}_S/\mathsf{K})$ が作用するものとします。さらに $\mathcal{T}^*$ で $\mathcal{D}$ のクンマー双対 (或いはカルティエ双対) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cts}}(\mathcal{D}, \mu_{p^\infty})$ を表すこととします*33。

離散的 $\mathcal{R}$-加群 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{R}$ **上概可除** *almost $\mathcal{R}$-divisible* であるとは、$\mathcal{R}$ の既約元 θ が存在して、高さが 1 で θ と互いに素となるような任意の $\mathcal{R}$ の素イデアル $\mathfrak{P}$ に対して $\mathfrak{P}\mathcal{A} = \mathcal{A}$ が成り立つこととします。すると $\mathcal{A}$ が $\mathcal{R}$ 上概可除であることと $\mathcal{A}$ のポントリャーギン双対 $\mathcal{A}^\vee$ が非自明な擬零加群を持たないことは同値となります ([Gr06, Proposition 2.4] 参照)。

S に属する各素点 v に対して局所ガロワコホモロジー群 $H^1(\mathsf{K}_v, \mathcal{D})$ の部分 $\mathcal{R}$-加群 $L(\mathsf{K}_v, \mathcal{D})$ を固定します。$L(\mathsf{K}_v, \mathcal{D})$ は局所条件と呼ばれます。局所条件 $\{L(\mathsf{K}_v, \mathcal{D})\}_{v \in S}$ の指定の仕方を $\mathcal{L}$ で表すとき、$\mathcal{L}$-セルマー群 $\mathrm{Sel}_{\mathcal{L}}(\mathsf{K}, \mathcal{D})$ は大域-局所制限写像

$$\phi_{\mathcal{L}} \colon H^1(\mathsf{K}_S/\mathsf{K}, \mathcal{D}) \to \prod_{v \in S} \frac{H^1(\mathsf{K}_v, \mathcal{D})}{L(\mathsf{K}_v, \mathcal{D})}$$

の核として定義されます。

以上の準備の下で、$\mathcal{R}$ 及び $\mathcal{D}$ に関する次の条件を考察します。

($\mathbf{RFX}_{\mathcal{R}}$) $\mathcal{R}$ は反射的 reflexive、即ち $\mathcal{R}$ の商体 $\mathrm{Frac}(\mathcal{R})$ の中で等式 $\mathcal{R} = \bigcap_{\mathfrak{P}\colon \text{高さ 1 の素イデアル}} \mathcal{R}_{\mathfrak{P}}$ が成立する;

($\mathbf{LOC}^{(1)}_{\mathcal{D},S}$) S に属する或る有限素点 v_0 に対して、D_{v_0} での $\mathcal{T}^*$ の固定部分 $(\mathcal{T}^*)^{D_{v_0}}$ は $\{0\}$;

($\mathbf{LOC}^{(2)}_{\mathcal{D},S}$) S に属する全ての素点 v に対して $\mathcal{T}^*/(\mathcal{T}^*)^{D_v}$ は反射的、即ち $\mathcal{T}^*/(\mathcal{T}^*)^{D_v} \otimes_{\mathcal{R}} \mathrm{Frac}(\mathcal{R})$ の中で等式 $\mathcal{T}^*/(\mathcal{T}^*)^{D_v} = \bigcap_{\mathfrak{P}\colon \text{高さ 1 の素イデアル}} (\mathcal{T}^*/(\mathcal{T}^*)^{D_v})_{\mathfrak{P}}$ が成立する;

($\mathbf{LEO}_{\mathcal{D}}$) $Ш^2(\mathsf{K}, S, \mathcal{D}) := \ker\left[H^2(\mathsf{K}_S/\mathsf{K}, \mathcal{D}) \to \prod_{v \in S} H^2(\mathsf{K}_v, \mathcal{D})\right]$ のポントリャーギン双対が捩れ $\mathcal{R}$-加群;

($\mathbf{SUR}_{\mathcal{D},\mathcal{L}}$) 大域-局所制限射像 $\phi_{\mathcal{L}}$ が全射。

此のとき、グリーンバーグの概可除性判定法は次で与えられます。

*33 $\mathrm{Gal}(\mathsf{K}_S/\mathsf{K})$ の元 g の $\mathcal{T}^*$ への作用は $(gf)(x) = gf(g^{-1}x)$ で与えられるものとします。

定理 ([Gr12, Theorem 4.1.1])**.** 標数 p の有限体を剰余体に持つ標数 0 の完備局所ネーター正則整域 $\mathcal{R}$ 及び $\mathrm{Gal}(\mathsf{K}_S/\mathsf{K})$ の連続作用を持つ $\mathcal{R}$ 上の有限階数の自由加群 $\mathcal{T}$ が条件 $(\mathrm{RFX}_{\mathcal{R}})$, $(\mathrm{LOC}^{(1)}_{\mathcal{D},S})$, $(\mathrm{LOC}^{(2)}_{\mathcal{D},S})$, $(\mathrm{LEO}_{\mathcal{D}})$, $(\mathrm{SUR}_{\mathcal{D},\mathcal{L}})$ を全て満たし、さらに局所条件 $\prod_{v\in S} L(\mathsf{K}_v,\mathcal{D})$ が $\mathcal{R}$ 上概可除であるならば、$\mathrm{Sel}_{\mathcal{L}}(\mathsf{K},\mathcal{D})$ も $\mathcal{R}$ 上概可除となる。

尚、大域-局所制限射像の全射性 $(\mathrm{SUR}_{\mathcal{D},\mathcal{L}})$ に関しては、$\mathcal{D}$ が条件

$(\mathbf{CRK}_{\mathcal{D},\mathcal{L}})$ $\mathcal{R}$-余階数の等式

$$\mathrm{corank}_{\mathcal{R}} H^1(\mathsf{K}_S/\mathsf{K},\mathcal{D}) = \mathrm{corank}_{\mathcal{R}}\mathrm{Sel}_{\mathcal{L}}(\mathsf{K},\mathcal{D}) + \mathrm{corank}_{\mathcal{R}}\left(\prod_{v\in S} H^1(\mathsf{K}_v,\mathcal{D})/L(\mathsf{K}_v,\mathcal{D})\right)$$

が成立する (但し離散的 $\mathcal{R}$-加群 M の余階数 $\mathrm{corank}_{\mathcal{R}}(M)$ とは、M のポントリャーギン双対の $\mathcal{R}$-階数 $\mathrm{rank}_{\mathcal{R}}(M^\vee)$ を指すものとする)

及び若干の補助的な条件を満たせば成立することが矢張りグリーンバーグにより知られており ([Gr10, Proposition 3.2.1] 参照)、本稿第 3.2.2 節のステップ 1. では此れを用いています。

尚、$\mathsf{K}_\infty/\mathsf{K}$ を K の (任意の) $\mathbb{Z}_p$-拡大とし、$\mathcal{R}=\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathsf{K}_\infty/\mathsf{K})]]$ とおくとき、$\mathcal{T}$ として階数 1 の自由 $\mathcal{R}$-加群で G_{K} の元 g が $g|_{\mathsf{K}_\infty}$ 倍で作用するもの (即ち自明な表現 $\mathbb{Z}_p$ の $\mathbb{Z}_p$-拡大 $\mathsf{K}_\infty/\mathsf{K}$ に沿った変形) を考えると、$H^2(\mathsf{K},\mathcal{D})\cong H^2(\mathsf{K}_\infty,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ が消滅することと $\mathbb{Z}_p$-拡大 $\mathsf{K}_\infty/\mathsf{K}$ に対して**弱レオポルト予想** *weak* LEOPOLDT *conjecture* が成立することは同値となります。したがって条件 $(\mathrm{LEO}_{\mathcal{D}})$ は、自明な表現の変形の場合ですら (弱レオポルト予想よりは緩い条件ではあるものの) 弱レオポルト予想と密接に関係する非常に非自明な条件となっており、実際 [Gr06] では条件 $(\mathrm{LEO}_{\mathcal{D}})$ の成立の可否についても具体例に則して論じられています。本稿第 3.2.2 節のステップ 1. での議論からも $(\mathrm{LEO}_{\mathcal{D}})$ と弱レオポルト予想との関係が窺い知れるのではないかと存じます。

参考文献

[AV75] Yvette AMICE and Jacques VÉLU, *Distributions p-adiques asociées aux séries de Hecke*, in: *Journées arithmétiques de Bordeaux*, Astérisque, Vol. **24/25**, Société Mathématique de France, 119–131 (1975).

[Ca86] Henri CARAYOL, *Sur les représentations p-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (4) **19**, 409–468 (1986).

[dS87] Ehud DE SHALIT, *Iwasawa theory of elliptic curves with complex multiplication*, Perspectives in Mathematics, Vol. **3**, Academic Press (1987).

[De79] Pierre René DELIGNE, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, in: *Automorphic forms, representations, and L-functions* (Part 2), Proc. Sympos. Pure Math., **33**, Providence, R.I., Amer. Math. Soc., 313–346 (1979).

[Di13] Mladen Dimitrov, *Automorphic symbols, p-adic L-functions and ordinary cohomology of Hilbert modular varieties*, Amer. J. Math., **135**, no. 4 (2013).

[Fu06] Kazuhiro FUJIWARA, *Deformation rings and Hecke algebras in the totally real case*, preprint available at `arXiv:math/0602606v2[math.NT]` (2006).

[Gr78] Ralph GREENBERG, *On the structure of certain Galois groups*, Invent. Math., **47**, no. 1, 85–99 (1978).

[Gr06] Ralph GREENBERG, *On the structure of certain Galois cohomology groups*, Doc. Math. Extra Vol., (4) *John H. Coates Sixtieth' Birthday*, 335–391 (2006).

[Gr10] Ralph Greenberg, *Surjectivity of the global-to-local map defining a Selmer group*, Kyoto J. of Math., Vol. **50**, No. 4, 853–888 (2010).

[Gr12] Ralph Greenberg, *On the structure of Selmer groups*, preprint available at his webpage `http://www.math.washington.edu/~greenber/research.html` (2013).

[Hi88] Haruzo Hida, *On p-adic Hecke algebras for $GL(2)$ over totally real fields*, Ann. of Math., **128**, 295–384 (1988).

[Hi06a] Haruzo Hida, *Hilbert modular forms and Iwasawa theory*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press (2006).

[Hi06b] Haruzo Hida, *Anticyclotomic main conjectures*, Doc. Math. Extra Volume: John H. Coates' Sixtieth Birthday, 465–532 (2006).

[Hsi12] Ming-Lun Hsieh, *Eisenstein congruence on unitary groups and Iwasawa main conjecture for CM fields*, preprint submitted for publication, available at `http://www.math.ntu.edu.tw/~mlhsieh/research.htm` (2012).

[HO13] Takashi Hara and Tadashi Ochiai, *The cyclotomic Iwasawa main conjecture for Hilbert cuspforms with complex multiplication*, preprint (2013).

[HT93] Haruzo Hida and Jacques Tilouine, *Anticyclotomic Katz p-adic L-functions and congruence modules*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **26**, no. 2, 189–259 (1993).

[HT94] Haruzo Hida and Jaques Tilouine, *On the anticyclotomic main conjecture for CM fields*, Invent. Math., **117**, no. 1, 89–147 (1994).

[Kato99] Kazuya Kato, *Euler systems, Iwasawa theory, and Selmer groups*, Kodai Math. J., **22**, no. 3, 313–372 (1999).

[Kato04] Kazuya Kato, *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, in: *Cohomologies p-adiques et applications arithmetiques* III, Astérisque **295**, 117–290 (2004).

[Katz76] Nicholas Michael Katz, *p-adic interpolation of real analytic Eisenstein series*, Ann. of Math., **104**, 459–571 (1976).

[Katz78] Nicholas Michael Katz, *p-adic L-functions for CM fields*, Invent. Math., **49**, 199–297 (1978).

[Ma73] Yuri Ivanovič Manin, *Periods of cuspforms, and p-adic Hecke L-series*, Math. USSR-Sb., **21**, 371–393 (1973).

[Ma74] Yuri Ivanovič Manin, *The values of p-adic Hecke series at integer points of the critical strips*, Math. USSR-Sb., **22**, 631–637 (1974).

[Ma76] Yuri Ivanovič Manin, *Non-Archimedean integration and p-adic Jacquet-Langlands L-functions*, Uspehi Mat. Nauk., **31**, 5–54 (1976).

[Mai08] Fabio Mainardi, *On the main conjecture for CM fields*, Amer. J. Math., **130**, no. 2, 499–538 (2008).

[MSD74] Barry Mazur and Peter Swinnerton-Dyer, *Arithmetic of Weil curves*, Invent. Math. **25**, 1–61 (1974).

[MTT86] Barry Mazur, John Tate and Jeremy Teitelbaum, *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math., **84**, 1–48 (1986).

[MW84] Barry Mazur and Andrew John Wiles, *Class fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$*, Invent. Math., **76**, 179–330 (1984).

[Och05] Tadashi Ochiai, *Euler system for Galois deformations*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **55**, no. 1, 113–146 (2005).

[Och12] Tadashi Ochiai, *Several variable p-adic L-functions for Hida families of Hilbert modular forms*, Doc. Math., **17**, 807–849 (2012).

[Oh83] Masami Ohta, *On the zeta function of an abelian scheme over the Shimura curve*, Jpn. J. Math., **9**, 1–26 (1983).

[OP13] Tadashi Ochiai and Kartik Prasanna, *Two-variable Iwasawa theory for Hida families with complex multiplication*, preprint (2013).

[PR81] Bernadette Perrin-Riou, *Groupe de Selmer d'une courbe elliptique à multiplication com-*

plexe, Compositio Math., **43**, no. 3, 387–417 (1981).

[PR98] Bernadette PERRIN-RIOU, *Systèmes d'Euler p-adiques et théorie d'Iwasawa*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **48** (5), 1231–1307 (1998).

[Ri77] Kenneth Alan RIBET, *Galois representations attached to eigenforms with nebentypus*, in: *Modular functions of one variable*: V (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976), pp. 17–51, Lecture Notes in Math., Vol. **601**, Springer, Berlin, 1977.

[Roh84] David Ephreim ROHRLICH, *On L-functions of elliptic curves and cyclotomic towers*, Invent. Math., **75** (1984), no. 3, 409–423.

[Roh89] David Ephreim ROHRLICH, *L-functions and division towers*, Math. Ann., **281** (1988), no. 4, 611–632.

[Ru91a] Karl RUBIN, *The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields*, Invent. Math., **103**, 25–68 (1991).

[Ru91b] Karl RUBIN, *The one-variable main conjecture for elliptic curves with complex multiplication*, in: *L-functions and arithmetic* (Durham, 1989) London Math. Soc. Lecture Note Ser., **153**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 353–371 (1991).

[Ru00] Karl RUBIN, *Euler systems*, Annals of Mathematics Studies, vol. 147, Pronceton: Princeton University Press (2000).

[Ser98] Jean-Pierre SERRE, *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves*, Research Notes in Mathematics, **7**, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA (1998).

[Sh71] Goro SHIMURA, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Kanô Memorial Lectures, No. 1, Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11, Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, N.J. (1971).

[Sh78] Goro SHIMURA, *The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. J., **45**, Number 3, 637–679 (1978).

[SU13] Christopher SKINNER and Eric URBAN, *The Main Conjecture for $GL(2)$*, to appear in Invent. Math. (2013).

[SW00] Christopher McLean SKINNER and Andrew John WILES, *Residually reducible representations and modular forms*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **89**, 5–126 (2000).

[SW01] Christopher McLean SKINNER and Andrew John WILES, *Nearly ordinary deformations of irreducible residual representations*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **10**, no. 1, 185–215 (2001).

[Ta89] Richard TAYLOR, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, Invent. Math., **98**, 265–280 (1989).

[Ta95] Richard TAYLOR, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*: II, in: *Elliptic curves, modular forms and Fermat's last theorem*, Ser. Number Theory, I, Int. Press, Cambridge, MA, 185–191 (1995).

[Vi76] Mikhail Markovič VIŠIK, *Non-archimedian measures connected with Dirichlet series*, Math. USSR Sb. **28**, 216–228 (1976).

[VM74] Mikhail Markovič VIŠIK and Yuri Ivanovič MANIN, *p-adic Hecke series for quadratic imaginary fields*, Math. Sb. **95**, 357–383 (1974, Russian), Math. USSR Sb. **24**, no. 3, 345–371 (1974, English translation).

[Wil88] Andrew John WILES, *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math., **94**, 529–573 (1988).

[Wil90] Andrew John WILES, *The Iwasawa conjecture for totally real fields*, Ann. of Math., **131**, 493–540 (1990).

[Win80] Jean Pierre WINTENBERGER, *Structure galoisienne de limites projectives d'unités locales*, Compositio Math., **42**, no. 1, 89–103 (1980).