古典的アルティン環と関連する話題

馬 場　良 始　(大阪教育大学)

一般向け講演として「古典的アルティン環と関連する話題」というタイトルで講演を行った．具体的には，古典的アルティン環である QF 環や中山環の構造や関連する問題を，原田環の研究を通して明らかにしたレクチャーノート，Y. Baba, K. Oshiro，Classical artinian rings and related topics，World Scientific，2009 の内容とその後の進展状況について解説した．以下，LN はこのレクチャーノートを表すこととする．

環 R は semi-perfect basic indecomposable ring，J または $J(R)$ は R の Jacobson radical，$p(R)$ は R の直交原始べき等元の完全集合とする．また, R-加群 M に対し，$S(M)$ は M の socle，$Rad(M)$ は M の Jacobson radical，そして $T(M) \overset{put}{:=} M/\,Rad(M)$ と表す.

<u>**定義**</u> **I.** $e, f \in p(R)$ に対し $S(eR_R) \cong T(fR_R)$ かつ $S({}_RRf) \cong T({}_RRe)$ が成り立つことを,

$$(eR, Rf) : i\text{-pair}$$

と表すことにする.

i-pair に関する次の Fuller による定理は非常に基本的な定理であり，アルティン環の構造を調べるとき，常にこの定理を念頭においておくことが必要である.

<u>**定理**</u> **1.** R : 片側アルティン環，$e \in p(R)$ に対し，次が成り立つ.

$$eR_R : \text{injective} \iff \exists f \in p(R) \ \text{ s.t. } \ (eR, Rf) : i\text{-pair}$$

1. QF 環と中山環

まず，古典的アルティン環である QF 環と中山環について簡単に述べておく.

<u>**定義**</u> **II.** R : アルティン環とし，$p(R) = \{e_1, \ldots, e_m\}$ とする.

- R : <u>**quasi-Frobenius 環**</u> (QF 環)

  $\overset{def.}{\iff}$ $\exists$ 置換 $\pi : \{e_1, \ldots, e_m\} \to \{e_1, \ldots, e_m\}$ s.t. $(e_iR, Re_{\pi(i)}) : i\text{-pair} \quad (\forall i = 1, \ldots, m)$

  そしてこのとき，この置換 π を <u>**中山置換**</u> とよぶ.

QF 環の主要な同値条件に次のようなものがある.

<u>**定理**</u> **2.** 環 R に対し，次は同値.

(a) R : QF 環

(b) (i) R : 右 (または左) アルティン　または　左 (または右) ネーター

(ii) R_R : injective もしくは ${}_RR$: injective

(d) R : 右 (または左) アルティン かつ ${}_RR_R$ は森田 duality を定める (i.e., R : 森田自己双対的)

(e) すべての projective 左 R-加群は injective

(f) すべての injective 左 R-加群は projective

また，もう１つの重要なアルティン環である中山環は，1940 年に中山正によって最初に研究されている．

定義 III． R : アルティン環，M : 右 R-加群とする．

- M : **単列的** $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ M の組成列はただ１つ
- R : **中山環** $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\forall e \in p(R)$ に対し，eR_R，${}_RRe$: 単列的

中山環の主要な同値条件として，次のようなものがある．

定理 3． R : アルティン環とする．

(a) R : 中山環

(b) すべての右 R-加群は, 単列的部分加群の直和で表される

(c) 有限生成直既約右 R-加群は単列的

2．原田環

原田環は 1978 年に原田学により最初に研究された．

定義 IV． R : 環，M : R-加群とする．

- M : **small** $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $M \ll E(M)$
- M : **non-small** $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ M : small ではない
- R : **左原田環** $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} (i) & R : \text{完全環} \\ (ii) & \text{任意の non-small 左 R-加群は, 零加群ではない injective 部分加群をもつ} \end{cases}$

原田環の研究はさまざまな角度から行われてきた．詳細は LN Chapter 3 参照．ここでは，その内部構造に関する部分のみを紹介する．

定理 4． 環 R に対し，次は同値．

(a) R : 左原田環

(b) (i) R : 左アルティン環
(ii) $\forall g \in p(R)$, $\exists e \in p(R)$, $\exists k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ s.t. $E(T({}_RRg)) \cong {}_RRe/S_k({}_RRe)$

(a') (i) 右零化イデアルの集合に ACC が成り立つ
(ii) すべての non-cosmall 右 R-加群は, 零加群ではない projective 直和因子をもつ

(b') (i) R : 右アルティン環
(ii) $\forall g \in p(R)$, $\exists e \in p(R)$, $\exists k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ s.t. $gR_R \cong eJ_R^k$ かつ $E(gR_R) \cong eR_R$

さらに，R が左原田環であるとき，次の (1), (2) が成り立つ．

(1) $\{e_i\} = p(R)$ とし，${}_RRe_i$ が injective あるようなその部分集合の代表集合 $\{e_i\}_{i=1}^m$ を考えると，各 $i = 1, \ldots, m$ に対し，$k_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ を，$\{\, Re_i/S_j({}_RRe_i) \,\}_{i=1, j=0}^{m \quad k_i}$ が直既約 injective 左 R-加群の代表集合となるようにとれる．

(2) $\{e_i\} = p(R)$ とし，e_iR_R が injective あるようなその部分集合の代表集合 $\{e_i\}_{i=1}^m$ を考えると，各 $i = 1, \ldots, m$ に対し，$n(i) \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ を，$\{\, e_iJ^j \,\}_{i=1, j=0}^{m \quad n(i)}$ が直既約 projective 右 R-加群の代表集合となるようにとれる．

定義 V.

- R を左原田環とするとき，定理 4 (2) から，R の直交原始べき等元の完全集合 $\{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ \ n(i)}$ を，次の 2 つの条件をみたすように取れることが分かる．
  (1) $e_{i1}R_R$: injective $(\forall i = 1, \ldots, m)$
  (2) $e_{ij}R_R \cong e_{i,j-1}J_R$ $(\forall i = 1, \ldots, m,\ \ \forall j = 2, \ldots, n(i))$

  これを **左 well-indexed 集合** とよぶ．

さらに原田環は次のような構造をもつことも知られている．

定理 5. 任意の左原田環 R は，QF 環（R の **frame QF 部分環** とよばれ $F(R)$ で表される）から作られるある拡大環の剰余環（$F(R)$ の **ブロック拡大上階段型剰余環** とよぶ）と環同型．(詳細は LN Chapter 4 参照.)

実際にどのようにして作られるかを，簡単な例で説明する．

例 6. R は左原田環で，その左 well-indexed 集合は $\{e_{11}, e_{21}, e_{31}, e_{41}, e_{42}, e_{43}\}$ であり，

$$(e_{11}R, Re_{41}),\ (e_{21}R, Re_{42}),\ (e_{31}R, Re_{43}),\ (e_{41}R,\ Re_{21}) : i\text{-pair}$$

とする．そして，

$$Q_i := e_{i1}Re_{i1},\quad J_i := J(Q_i),\ A_{ij} := e_{i1}Re_{j1}\quad (\,i \neq j \in \{1, 2, 3, 4\}\,)$$

とおく．このとき，

$$Q_1 \cong Q_2 \cong Q_3 :\ (\text{局所})\ \text{QF 環}$$

となり，そして，

$$P' := \left(\begin{array}{ccc|ccc} Q_1 & Q_1 & Q_1 & A_{14} & A_{14} & A_{14} \\ J_1 & Q_1 & Q_1 & A_{14} & A_{14} & A_{14} \\ J_1 & J_1 & Q_1 & A_{14} & A_{14} & A_{14} \\ \hline A_{41} & A_{41} & A_{41} & Q_4 & Q_4 & Q_4 \\ A_{41} & A_{41} & A_{41} & J_4 & Q_4 & Q_4 \\ A_{41} & A_{41} & A_{41} & J_4 & J_4 & Q_4 \end{array}\right),\quad X' := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & S(A_{14}) & S(A_{14}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(A_{14}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & S(A_{41}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(A_{41}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(A_{41}) & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

とおくと，

$$R \cong P'/X'$$

であることが分かる．しかも，

$$F(R) := \begin{pmatrix} Q_1 & A_{14} \\ A_{41} & Q_4 \end{pmatrix} :\ \text{frame QF 部分環}$$

は QF 環であり，R は $F(R)$ のブロック拡大上階段型剰余環として表されたことになる．

3. 中山環の構造

既に述べたように，中山環は原田環である．したがって，原田環の構造理論をそのまま適用することができる．

定義 VI.

- R : 中山環のとき，その frame QF 部分環 $F(R)$ は中山環である．よって **frame 中山 QF 部分環** とよぶ．

定理 7. 任意の中山環 R は，その frame 中山 QF 部分環 $F(R)$ 上のあるブロック拡大上階段型剰余環と環同型．

よって，中山環の構造は中山 QF 環の構造を調べればよいことになる．

定義 VII.

- Q : 環とする．もし，

$$\left\{\begin{array}{l}\exists c \in Q \\ \exists \sigma \in \mathrm{Aut}(Q)\end{array}\right\} \ \text{s.t.} \ \left\{\begin{array}{l}\sigma(c) = c \\ \sigma(q)\, c = cq \quad (\forall q \in Q\,)\end{array}\right\}$$

であるとき，c, σ を使って，m 次行列環 $\begin{pmatrix} Q & \cdots & Q \\ \vdots & & \vdots \\ Q & \cdots & Q \end{pmatrix}$ の乗法だけを，$\forall(x_{ij})$，(y_{ij}) に対し，

$$(x_{ij})(y_{ij}) = (z_{ij}), \quad z_{ij} = \left\{\begin{array}{ll} \sum_{i>k} x_{ik}\, \sigma(y_{kj})\, c + \sum_{i\le k\le j} x_{ik}\, y_{kj} + \sum_{k>j} x_{ik}\, y_{kj}\, c & (\,i \le j \text{ のとき}\,) \\ \sum_{k\le j} x_{ik}\, \sigma(y_{kj}) + \sum_{i>k>j} x_{ik}\, \sigma(y_{kj})\, c + \sum_{i\le k} x_{ik}\, y_{kj} & (\,i > j \text{ のとき}\,) \end{array}\right.$$

と定義したものに変更して得られる環を **skew-matrix 環** とよび，$(\,Q\,)_{\sigma,c,m}$ で表す．

注意 8. $m = 2, 3$ のときの skew-matrix 環の積は次の通りである．

- $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}\, y_{11} + \underline{x_{12}\, y_{21}\, c} & x_{11}\, y_{12} + x_{12}\, y_{22} \\ \underline{\underline{x_{21}\, \sigma(y_{11})}} + x_{22}\, y_{21} & x_{21}\, \sigma(y_{12})\, c + x_{22}\, y_{22} \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} x_{11}\, y_{11} + \underline{x_{12}\, y_{21}\, c} + \underline{x_{13}\, y_{31}\, c} & x_{11}\, y_{12} + x_{12}\, y_{22} + \underline{x_{13}\, y_{32}\, c} \\ \underline{\underline{x_{21}\, \sigma(y_{11})}} + x_{22}\, y_{21} + x_{23}\, y_{31} & x_{21}\, \sigma(y_{12})\, c + x_{22}\, y_{22} + \underline{x_{23}\, y_{32}\, c} \\ \underline{\underline{x_{31}\, \sigma(y_{11})}} + x_{32}\, \sigma(y_{21})\, c + x_{33}\, y_{31} & \underline{\underline{x_{31}\, \sigma(y_{12})}} + \underline{\underline{x_{32}\, \sigma(y_{22})}} + x_{33}\, y_{32} \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{c} x_{11}\, y_{13} + x_{12}\, y_{23} + x_{13}\, y_{33} x_{21}\, \sigma(y_{13})\, c + x_{22}\, y_{23} + x_{23}\, y_{33} \\ x_{31}\, \sigma(y_{13})\, c + x_{32}\, \sigma(y_{23})\, c + x_{33}\, y_{33} \end{array} \right)$$

中山 QF 環は次の構造をもっている．

定理 9.

(1) 中山 QF 環は，その中山置換が恒等置換ではない場合，局所中山 QF 環上の skew-matrix 環の剰余環として表される．

(2) 中山 QF 環 R は，その中山置換が恒等置換である場合，$R/S(R_R)$ が局所中山 QF 環上の skew-matrix 環として表される．

(具体的には，$R/S(R_R)$ はその Kupisch series を $e_m R, \ldots, e_1 R$ とするとき，その中山置換は $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_m \\ e_m & e_1 & \cdots & e_1 \end{pmatrix}$ である．よって (1) から，局所中山 QF 環上の skew-matrix 環で表される.)

(3) R : 代数閉体 K 上の中山 QF 多元環は，その中山置換が恒等置換である場合，R は skew-matrix 環 $(\,Q\,)_{id_Q,c,n}$ で表される．

(ここで，$d \in \mathbf{N}$ を $J(Q)^d \neq 0$，$J(Q)^{d+1} = 0$ ととるとき，Q は $Q = K[x]/(x^{d+1})$ と決定される．)

例 10. R : 中山 QF 環で，$p(R) = \{e_1, e_2, e_3\}$ s.t. e_3R, e_2R, e_1R : Kupisch series (i.e., $T(e_3R_R) \cong T(e_2J_R)$，$T(e_2R_R) \cong T(e_1J_R)$，$T(e_1R_R) \cong T(e_3J_R)$) とする．$Q := e_1Re_1$ とおく．

(1) R の中山置換が $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_3 & e_1 & e_2 \end{pmatrix}$ であるとき,

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists c \in J(Q) \\ \exists \sigma \in \mathrm{Aut}(Q) \end{array} \right\} \text{ s.t. } \left\{ \begin{array}{l} cQ = J(Q) \\ \sigma(c) = c \\ \sigma(q)c = cq \quad (\,\forall q \in Q\,) \end{array} \right\}$$

であり，そして $R \cong \begin{pmatrix} Q & Q & Q \\ Q & Q & Q \\ Q & Q & Q \end{pmatrix}_{\sigma,c,3}$ が分かる．

(2) R の中山置換が $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_3 & e_1 \end{pmatrix}$ であったならば，$T := \begin{pmatrix} Q & Q & Q \\ Q & Q & Q \\ Q & Q & Q \end{pmatrix}_{\sigma,c,3}$ とおくとき,

$$R \cong T/S(T_T) = \begin{pmatrix} Q & Q & Q \\ Q & Q & Q \\ Q & Q & Q \end{pmatrix}_{\sigma,c,3} \Big/ \begin{pmatrix} 0 & 0 & S(Q) \\ S(Q) & 0 & 0 \\ 0 & S(Q) & 0 \end{pmatrix} \text{ が分かる.}$$

以上の考察から，左原田環の研究は局所 QF 環の詳細な研究が必要であり，中山環の研究は局所中山 QF 環の詳細な研究が必要であることが分かった．LN Chapter 10 で局所 QF 環の構造研究の成果が一部が紹介されているが，現在も引き続きこの研究が続けられている．

4. Faith 予想

Faith 予想と呼ばれる，QF 環に関する有名な問題がある．この問題は Osofsky の結果

$$R : \text{QF 環} \iff R : \text{右完全環かつ } R_R,\ {}_RR : \text{injective}$$

の条件の self-injective 性を片側に置き換えられないか？というものである．Faith は "Algebra II" の中で R が semiprimary であっても不可能であろうという否定的な予想を行っている．

(Faith 予想.) R : semiprimary ring with R_R injective とする．このとき, R は必ずしも QF とは限らない．

この問題は R が局所環かつ $J^3 = 0$ であっても未解決であり，現在もなおこの環に関する研究が続けられている．ちなみに，Faith 予想の解決に有益と思われる，次のような同値性が証明されており，この方面から解決法を探る試みも続けられている．

定理 11. 次は同値.

(a) $\exists R$: 局所 semiprimary 環 s.t. $\left\{ \begin{array}{l} J^3 = 0 \\ R_R : \text{ injective. しかし } R \text{ は QF 環ではない.} \end{array} \right\}$

(b) 次の 2 つの条件をみたす斜体 D と (D, D)-両側空間 V が存在する．

(i) $\dim V_D = \infty$

(ii) ${}_DV_D \cong {}_DV_D^*$ ((D, D)-同型) (ただし，$V^* := \mathrm{Hom}_D(V_D, D_D)$)

5. 森田自己双対性

定義 VIII. R : 環とする．

- R : **(森田) 自己双対的** $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ $\exists U : (R,R)$-両側加群 s.t. U は森田 duality を定める.
  (つまり, ${}_RU_R$: faithfully balanced かつ ${}_RU$, U_R : injective cogenerators)

1980 年代, 中山環は自己双対的であるのかどうかが Mano, Hacck, Dischinger-Müller 等によって研究され, 結局 Waschbusch が, 既に 1968 年に Amdal and Ringdal が肯定的に解決していたことを述べ, そのアイディアを用いた証明を紹介することにより一件落着した. そして, 左原田環も森田自己双対的であるかが次に研究され, その手掛かり与えると思われる次の定理が得られた.

定義 IX. R : QF 環とし, $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_m \\ e_{\sigma(1)} & e_{\sigma(2)} & \cdots & e_{\sigma(m)} \end{pmatrix}$: R の中山置換とする.

- 環自己同型 $\varphi : R \to R$ s.t. $\varphi(e_i) = e_{\sigma(i)}$ $(\forall i = 1, \ldots, m)$ が存在するとき, これを R の **中山自己同型** とよぶ.

定理 12. 左原田環 R に対して, 次は同値.

(a) $F(R)$: 中山自己同型をもつ

(b) $F(R)$ のブロック拡大上階段型剰余環として得られる左原田環はすべて森田自己双対的 (よってもちろん R も森田自己双対的)

したがって, すべての QF 環が中山自己同型を持つことが示されれば, 左原田環は森田自己双対的であることが分かるが, 小池寿俊により中山自己同型をもたない QF 環の例が与えられ, 原田環は森田自己双対的であるかという問題は否定的に解決された.

しかし, 中山 QF 環に関しては, 次のような結果が得られている.

定理 13. 中山 QF 環は中山自己同型をもつ. (したがって, すべての中山環は森田自己双対的 (Waschbusch のものより明快な別証明が得られた).)

また, 局所 QF 環上の skew-matrix 環については, 次のようなことが成り立つ.

定理 14. 局所 QF 環上の skew-matrix 環は, 中山自己同型をもつ QF 環.

したがって, 森田自己双対性をもつ環の例は, 次の (1) のような明らかなものだけでなく, skew-matrix 環を使って次の (2), (3) のようなものも具体的に作ることができる. (注. ある種の局所 QF 環の具体的な構成法は LN Chapter 10 に記述されている.)

(1) 局所 QF 環はいつも中山自己同型 1 (: 恒等写像) をもつ. よって, $F(R)$ が局所環になる左原田環はすべて森田自己双対的. つまり, Q を局所 QF 環とするとき, Q のブロック拡大上階段型剰余環, 例えば
$$\begin{pmatrix} Q & Q \\ J(Q) & Q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q & Q/S(Q) \\ J(Q) & Q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q & Q/S(Q) \\ J(Q) & Q/S(Q) \end{pmatrix}$$
のようなものはすべて森田自己双対的.

(2) Q : 局所 QF 環 $(J(Q) \neq 0)$ とするとき, $c = 0$, $\sigma = 1_Q$: 恒等写像とする skew-matrix 環を作ることができ, 定理 14 より, これは中山自己同型をもつ QF 環. しかも, もし Q が $J(Q)^2 = 0$ なる中山 QF 環であっても, これは中山環にはならない. したがって, この skew-matrix 環のブロック拡大上階段型剰余環として得られる左原田環はすべて「森田自己双対的な, しかし中山環ではない左原田環」になる.

(3) Q が可換局所 QF 環で $\left\{ \begin{array}{l} J(Q)^2 \neq 0 \\ J(Q)^3 = 0 \end{array} \right\}$ とするとき, $J(Q)^2_Q$, ${}_QJ(Q)^2$ は simple. よって, $0 \neq c \in J(Q)^2$ とし, $\sigma = 1_Q$: 恒等写像とするとき, この c, σ で skew-matrix 環 $\begin{pmatrix} Q & Q \\ Q & Q \end{pmatrix}_{c,\,1_Q,\,2}$ が作れる. しかもこれは中山環ではない. ゆえに, (2) と同様のことがこの skew-matrix 環についても成り立つ.