行列分解と超曲面上のコーエン・マコーレー加群について

荒谷　督司

1. イントロダクション

この講演を通して S を正則局所環、$\mathfrak{n}$ を極大イデアル、$k = S/\mathfrak{n}$ を標数 0 の代数的閉体とする。また、$0 \neq f \in \mathfrak{n}$ を固定し、$R = S/(f)$ とする。

f の行列分解と R 上の極大コーエン・マコーレー加群の対応は 1980 年に Eisenbud [6] によって与えられた。現在では、超曲面が単純特異点を持つことと有限 CM 表現型であることが同値であることはよく知られているが、このことは、1 次元のときには Greuel-Knörrer [8]、2 次元のときには Artin-Verdier [2]、Auslander [3]、Esnault [7] によって調べられている。一般次元において単純特異点を持つならば有限 CM 表現型であることは、Knörrer [9] が周期性を用いて帰納的に証明している。逆に有限 CM 表現型であるならば単純特異点を持つことは、Buchweitz-Greuel-Schreyer [4] によって示されている。Eisenbud の対応はこれらの証明をはじめ多くの結果に多大な影響を与えている。

本講演において、2 章では行列分解の定義を与える。3 章では極大コーエン・マコーレー加群について復習をする。4 章では行列分解と極大コーエン・マコーレー加群との対応を与える。5 章では、これらの応用として、可算 CM 表現型の超曲面に関する最近の結果を紹介する。

2. 行列分解

この章では行列分解の定義をはじめ、行列分解に関する記号を導入する。

定義 1. S の元を成分に持つ同じサイズの正方行列 A, B に対し、(A, B) が f の**行列分解 (martix factorization)** であるとは、 $AB = BA = fE$ をみたすことである。ここで、E は単位行列である。

行列分解の例をいくつか挙げる。

例 2. (1) $(1, f)$ や $(f, 1)$ は（自明な）行列分解である。

(2) $\left(\begin{pmatrix} x & y^i \\ y^{n+1-i} & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & -y^i \\ -y^{n+1-i} & x \end{pmatrix}\right)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ は $x^2 - y^{n+1} \in k[[x, y]]$ の行列分解である。

(3) $\left(\begin{pmatrix} x & y^i \\ 0 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & -y^i \\ 0 & x \end{pmatrix}\right)$ $(i \geq 1)$ や (x, x) は $x^2 \in k[[x, y]]$ の行列分解である。

$\mathrm{MF}_S(f)$ を f の行列分解のなす圏とする。すなわち、対象は f の行列分解であり、射 $(\alpha, \beta) : (A, B) \to (A', B')$ とは、A, B を n 次正方行列、A', B' を n' 次正方行列とするとき、以下の図式が可換であることである。

$$\begin{array}{ccccc}
S^n & \xrightarrow{A} & S^n & \xrightarrow{B} & S^n \\
\alpha\big\downarrow & & \beta\big\downarrow & & \big\downarrow\alpha \\
S^{n'} & \xrightarrow[A']{} & S^{n'} & \xrightarrow[B']{} & S^{n'}
\end{array}$$

また、(A,B) と (A',B') が同型であるとは、行列分解の射 (α,β) で、 α, β がともに S-加群として同型であるものが存在することである。このとき $(A,B)\cong(A',B')$ と表す。

$\mathrm{MF}_S(f)$ は、$(A,B)\oplus(A',B')=\left(\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A'\end{pmatrix},\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & B'\end{pmatrix}\right)$ により加法圏である。

注意 3. $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ のとき、$(1,f)$ が (A,B) の直和因子でないための必要十分条件は、任意の i,j に対し a_{ij} が単元でないことである。同様に $(f,1)$ が (A,B) の直和因子でないための必要十分条件は、任意の i,j に対し b_{ij} が単元でないことである。

$\mathrm{MF}_S(f)$ 上に次のように 2 種類の同値関係を定義する。$(A,B),(A',B')\in\mathrm{MF}_S(f)$ に対し、

(1) $(A,B)\sim(A',B') \iff (A,B)\oplus(1,f)^s\cong(A',B')\oplus(1,f)^{s'}$ for some s,s'
(2) $(A,B)\approx(A',B') \iff (A,B)\oplus(1,f)^s\oplus(f,1)^t\cong(A',B')\oplus(1,f)^{s'}\oplus(f,1)^{t'}$ for some s,s',t,t'

さらに、$\mathcal{M}(f)=\mathrm{MF}_S(f)/\sim$, $\underline{\mathcal{M}}(f)=\mathrm{MF}_S(f)/\approx$ と定める。

3. 極大コーエン・マコーレー加群

この章では $R=S/(f)$ 上の極大コーエン・マコーレー加群について復習をする。

$\mathrm{mod}\,R$ を有限生成 R-加群のなす圏とし、$\mathrm{CM}(R)$ を極大コーエン・マコーレー 加群のなす部分圏とする。

定義 4. 有限生成 R-加群 X が**極大コーエン·マコーレー加群 (Maximal Cohen-Macaulay module)** であるとは depth $X=\dim R$ をみたすことである。

今、S は正則なので特にコーエン・マコーレーである。よって depth $S=\dim S$ である。また、S の大域次元は有限であるので任意の有限生成 S-加群 M の射影次元は有限である。Auslander-Buchsbaum formula により $\text{Proj-dim}_S\,M=\text{depth }S-\text{depth }M$ であることに注意すると、極大コーエン・マコーレー R-加群とは、S-加群として射影次元が $(\dim S-\dim R=)1$ であるような R-加群として特徴づけることができる。

R は Gorenstein 環でもあるので、R-加群 R は $\mathrm{CM}(R)$ 上では入射対象となる。すなわち、$\mathrm{CM}(R)$ はフロベニウス圏となる。よってその安定圏 $\underline{\mathrm{CM}}(R)$ は三角圏の構造を持つ。ここで $\underline{\mathrm{CM}}(R)$ とは以下のようなものである。

$\underline{\mathrm{CM}}(R)$ の対象は $\mathrm{CM}(R)$ のものと等しい。任意の $X,Y\in\underline{\mathrm{CM}}(R)$ に対し、

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(X,Y)=\mathrm{Hom}_R(X,Y)/\{f\in\mathrm{Hom}_R(X,Y)\mid f\text{ は自由加群を経由する}\}$$

と定める。

$\underline{\mathrm{CM}}(R)$ の三角圏の構造は以下の通りである。

$X,Y,Z\in\underline{\mathrm{CM}}(R)$ に対し、$X\to Y\to Z\to\Sigma X$ が $\underline{\mathrm{CM}}(R)$ 内で完全三角であるとは、$0\to X\to Y\oplus R^n\to Z\to 0$ $(\exists n)$ が $\mathrm{CM}(R)$ 内で完全列であることである。ここで Σ はシフト関手であり、$\Sigma X=\Omega^{-1}X$ である。

4. 行列分解と極大コーエン・マコーレー加群の対応

この章では f の行列分解と極大コーエン・マコーレー R-加群との間の関係を与える。まず行列分解から極大コーエン・マコーレー加群への対応を見ていく。

(A, B) を f の行列分解とし、$X = \mathrm{Cok}\,(S^n \xrightarrow{A} S^n)$ とする。このとき、以下の可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "fE"'] & S^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "fE"] \arrow[dl, "B"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
S^n \arrow[r, "A"'] & S^n \arrow[r, "\pi"'] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

f は S 上非零因子であり、$BA = fE$ より A が単射であることがわかる。よって、$\text{Proj-dim}_S X = 1$ である。また、$fX = f\pi S^n = \pi fES^n = \pi ABS^n = 0$ なので X は R-加群である。したがって、X は極大コーエン・マコーレー R-加群である。このつくり方から $F : \mathrm{MF}_S(f) \to \mathrm{CM}(R)$ を $F(A, B) = \mathrm{Cok}\ A$ と定めると F は関手となる。さらに、$F(1, f) = 0$ であることから、 $(A, B) \sim (A', B')$ ならば $F(A, B) \cong F(A', B')$ であることがわかる。したがって、 F は $\overline{F} : \mathcal{M}(f) \to \mathrm{CM}(R)$ を導く。

逆に X を極大コーエン・マコーレー加群とする。X の S-自由分解から以下の可換図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "fE"'] & S^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "fE"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S^n \arrow[r, "A"'] & S^n \arrow[r, "\pi"'] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

今、X は R-加群なので X における f 倍写像は零写像であることに注意をする。よって、$\pi fE = f\pi = 0$ となるから真ん中の fE は A を経由する。したがって、$AB = fE$ をみたす $B : S^n \to S^n$ が存在する。さらに、$ABA = fEA = AfE$ であり、A は単射なので $BA = fE$ をみたす。よって、(A, B) は f の行列分解である。ここで、A (よって B も) は、X の射影分解の取り方に依存することに注意が必要である。しかし、X の極小自由分解によって得られた行列分解を (A_0, B_0) とすると $(A, B) \sim (A_0, B_0)$ であるから、この対応により $G : \mathrm{CM}(R) \to \mathcal{M}(f)$ が導かれる。さらに $G\overline{F}$, $\overline{F}G$ はそれぞれ恒等変換と同型であるから、$\mathcal{M}(f)$ と $\mathrm{CM}(R)$ は圏同値である。また、$F(f, 1) = R$ であることから $\underline{\mathcal{M}}(f)$ と $\underline{\mathrm{CM}}(R)$ が圏同値であることも導かれる。

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 \arrow[d] & \\
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & X \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "fE"'] & S^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "fE"] \arrow[dl, "B"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f=0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S^n \arrow[r, "A"'] \arrow[d] & S^n \arrow[r, "\pi"'] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& R^n & R^n & X \arrow[d] & \\
& & & 0 &
\end{tikzcd}$$

上の可換図式に蛇の補題を用いると $0 \to X \to R^n \xrightarrow{\overline{A}} R^n \to X \to 0$ が得られる。このことから $\Omega^2 X \cong X$ であることがわかる。さらに、連結射から

$$\ldots \xrightarrow{\overline{B}} R^n \xrightarrow{\overline{A}} R^n \xrightarrow{\overline{B}} R^n \xrightarrow{\overline{A}} R^n \to X \to 0$$

が X の R-自由分解であることがわかる。すなわち、R 上の極大コーエン・マコーレー加群は周期 2 の自由分解を持つ。

5. 応用

R を 可算 CM 表現型の超曲面であるとすると、R は $k[[x, y, z_2, z_3 \ldots, z_d]]/(f)$ に同型であることが知られている。ここで、f は以下のどちらかある。

$$\begin{array}{ll} x^2 + z_2^2 + z_3^2 + \cdots + z_d^2 & (A_\infty) \\ x^2 y + z_2^2 + z_3^2 + \cdots + z_d^2 & (D_\infty) \end{array}$$

$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとし、$\mathcal{P} = \{X \in \mathrm{CM}(R) | X_\mathfrak{p} \text{は} R_\mathfrak{p}\text{-自由加群} (\mathfrak{m} \neq \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R)\}$ とする。Schreyer [10] は $\mathcal{P}$ の Auslander-Reiten quiver を求めている。Araya, Iima, Takahashi [1] は $\mathcal{P}$ に属さない直既約極大コーエン・マコーレー加群を決定し、さらにそれらと $\mathcal{P}$ に属する加群との関係について調べた。

定理 5. R を可算 *CM* 表現型の超曲面とする。このとき、直既約極大コーエン・マコーレー加群 X で以下の条件をみたすものが存在する。

(1) $\mathcal{P}$ に属さない直既約極大コーエン・マコーレー加群は同型を除いて $X, \Omega X$ だけである。

(2) 任意の $M \in \mathcal{P}$ に対し、$\underline{\mathrm{CM}}(R)$ 内での完全三角 $L \to M \to N \to \Sigma L$ で、$L, N \in \{X, \Omega X\}$ となるものが存在する。

証明は以下の手順で行っている。1, 2 次元の場合、 Buchweitz, Greuel, Schreyer [4] および Burban, Drozd [5] による行列分解を用いた分類に従って具体的に示している。

高次元化は Knörrer [9] による周期性を用いている。ここで、Knörrer の周期性とは以下のことである。

定理 6 (Knörrer の周期性)**.** S を正則局所環とし、$R = S/(f)$ を超曲面とする。$R^{\sharp} = S[[u,v]]/(f+uv)$ とするとき、$\underline{\mathrm{CM}}(R)$ と $\underline{\mathrm{CM}}(R^{\sharp})$ は三角圏として圏同値である。

ここで、Knörrer の周期性による対応は以下の通りである。

$$\underline{\mathrm{CM}}(R) \ni (A,B) \mapsto \left(\begin{pmatrix} A & uE \\ vE & -B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & uE \\ vE & -A \end{pmatrix} \right) \in \underline{\mathrm{CM}}(R^{\sharp})$$

このように f の行列分解は超曲面上の極大コーエン・マコーレー加群を調べる際に重要な役割を果たすことがわかる。

References

[1] Tokuji Araya; Kei-ichiro Iima; Ryo Takahashi, *On the structure of Cohen-Macaulay modules over hypersurfaces of countable Cohen-Macaulay representation type.* J. Algebra **361** (2012), 213–224.

[2] M. Artin; J.-L. Verdier, *Reflexive modules over rational double points.* Math. Ann. **270** (1985), no. 1, 79–82.

[3] Maurice Auslander, *Rational singularities and almost split sequences.* Trans. Amer. Math. Soc. **293** (1986), no. 2, 511–531.

[4] R.-O. Buchweitz; G.-M. Greuel; F.-O. Schreyer, *Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities. II.* Invent. Math. **88** (1987), no. 1, 165–182.

[5] I. Burban; Y. Drozd, *Maximal Cohen-Macaulay modules over surface singularities.* Trends in representation theory of algebras and related topics, 101–166, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008. http://arXiv.org/abs/0803.0117.

[6] D. Eisenbud, *Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations,* Trans. Amer. Math. Soc. **260** (1980) 35–64.

[7] H. Esnault, *Reflexive modules on quotient surface singularities.* J. Reine Angew. Math. **362** (1985), 63–71.

[8] G.-M. Greuel; H. Knörrer, *Einfache Kurvensingularitäten und torsionsfreie Moduln.* (German) Math. Ann. **270** (1985), no. 3, 417–425.

[9] H. Knörrer, *Cohen-Macaulay modules on hypersurface singularities. I.* Invent. Math. **88** (1987), no. 1, 153–164.

[10] F.-O. Schreyer, *Finite and countable CM-representation type,* Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985), 9–34, Lecture Notes in Math., 1273, Springer, Berlin, 1987.

700-0005 岡山県岡山市北区理大町 1-1
岡山理科大学理学部基礎理学科

E-mail address: `araya@das.ous.ac.jp`