Gorenstein ホモロジー代数入門

高橋　亮（名大多元数理）*

1　はじめに

Gorenstein ホモロジー代数は、特に近年さかんに研究がなされているホモロジー代数である。本稿では、Gorenstein ホモロジー代数についてその意義を中心に解説し、最後にその表現論的側面について述べる。非専門家の方々にもその雰囲気が伝わるように心掛けた内容になっているため、専門家の方々は適宜端折ってお読みいただければ幸いである。

2　Gorenstein 環

Gorenstein ホモロジー代数の動機付けやその目指すところを理解するためには、まず Gorenstein 環の重要性を知る必要がある。この節では、Gorenstein 環の諸性質を、例を用いながら説明する。定義や正確なステートメントを知りたい方は、[3, 8] 等を参照されたい。

さて、R を両側 Noether 環とする。この仮定だけでも後に出てくる Gorenstein 次元は定義可能であり理論の展開もある程度は可能であるが、本稿ではここにいくつかの仮定を設ける。まず、話を簡単にするため、R はある体上の代数（多元環）とする。そして、主な良い性質を導くために、R は可換環であることを仮定する。すると局所化、それに続いて完備化という操作が R やその上の加群・鎖複体に対して行うことができるようになるが、Gorenstein ホモロジー代数における多くの結果は局所化や完備化で保存されるので、R は完備局所環であるとしてよいだろう。こうすると、Cohen の完備局所環構造定理が適用でき、R は体上の形式的べき級数環を有限個の元で割った環

$$R \cong \frac{k[[x_1, \dots, x_n]]}{(f_1, \dots, f_m)}$$

と同型になる。この同型を通して R を右辺の剰余環と同一視すると、R のただ一つの極大イデアルは $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)R$ であり、R の剰余体は $R/\mathfrak{m} = k$ となる。R の

*E-mail: takahashi@math.nagoya-u.ac.jp

Krull 次元を d で表す。以下、R 上の加群は特に断らない限り有限生成加群を意味するものとする。

可換 Noether 環は、可換環論において前世紀初頭から実に多くの研究がなされてきた。その中で、いくつかの特に重要な可換 Noether 環のクラスが生まれた。Gorenstein 環もその一つであり、以下のようなヒエラルキーの中に属する。

$$
\begin{gathered}
\text{体} \Rightarrow \text{正則環} \Rightarrow \text{完全交差} \Rightarrow \\
\text{Gorenstein 環} \\
\Rightarrow \text{Cohen–Macaulay 環} \Rightarrow \text{Buchsbaum 環} \Rightarrow \text{FLC 環} \Rightarrow \cdots
\end{gathered}
$$

では、Gorenstein 環とは具体的にはどのような環なのか？となるわけだが、そのもっとも顕著な性質を一言で述べると、「対称性に満ちた環」であると言えるだろう。そのことを以下で説明[1]していく。

Hilbert 関数の対称性

(1) 体 k の標数を 3 とし、$G = C_3 \times C_3$ を位数 3 の巡回群の直積とする。このとき、R を k 上 G の群環とすると、変数変換により

$$
R \cong \frac{k[x, y]}{(x^3 - 1, y^3 - 1)} \cong \frac{k[x, y]}{(x^3, y^3)} \left(= \frac{k[[x, y]]}{(x^3, y^3)} \right)
$$

となる。この環は完全交差なので、Gorenstein 環である。変数 x, y の次数を 1 と定める。Hilbert 関数とは、各斉次成分の k ベクトル空間としての次元、つまり単項式の個数のことである。次数 $\ldots, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ に対しその単項式の集合は $\ldots, \emptyset, \{1\}, \{x, y\}, \{x^2, xy, y^2\}, \{x^2y, xy^2\}, \{x^2y^2\}, \emptyset, \ldots$ となるので、Hilbert 関数は

$$
\ldots, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, \ldots
$$

となり、3 のところを軸に左右対称になる。

(2) $R = k[[t^3, t^4]]$ を 1 変数形式的べき級数環 $k[[t]]$ の部分環[2]とする。この環は

$$
R \cong \frac{k[[x, y]]}{(x^4 - y^3)}
$$

により超曲面なので完全交差、特に Gorenstein 環である。R の k 上の生成元を書き出すと $1, t^3, t^4, t^6, t^7, t^8, \ldots$ となる。各整数 n に対し t^n が R の元であれば黒丸、そうでなければ白丸を置いて並べると、

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\cdots & \circ & \circ & \bullet & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \circ & \bullet & \bullet & \cdots \\
 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 &
\end{array}
$$

[1] ここでは「Gorenstein 環ならばこのような対称性がある」という向きの implication ばかり述べるが、いずれについても、無仮定あるいは適当な弱い仮定のもとに逆も成立する。

[2] 厳密に言うとこの環 R は次数付き環ではないので Hilbert 関数は定義されない。ここでの議論は、正確には 1 変数多項式環 $k[t]$ の部分環 $k[t^3, t^4]$ という次数付き環に対して行っている。

となり、$2\frac{1}{2}$ のところを軸として黒丸と白丸が左右対称になる。

Betti 数の対称性

上の二例が完全交差だったので、ここでは完全交差でない Gorenstein 環の例

$$R = \frac{k[[x,y,z]]}{(x^2-y^2, x^2-z^2, xy, xz, yz)}$$

を考えよう。分子のべき級数環を S とおくと R は S 加群なので、R の S 加群としての自由分解が取れる。極小な自由分解は同型を除いて一意的に定まり、S は大域次元が有限なので極小自由分解は必ず有限で止まる。今の場合 S 加群 R の極小自由分解は

$$(0 \to S \to S^5 \to S^5 \to S \to 0)$$

となる。Betti 数とは、ここに現れる各自由 S 加群の階数のことである。すなわち、Betti 数は

$$0, 1, 5, 5, 1, 0$$

となり、二つの 5 の中間のところを軸として左右対称になる。

Bass 数の対称性

Bass 数は Betti 数の双対概念である。R の i 次 Bass 数 $\mu_i(R)$ は Ext 群 $\mathrm{Ext}^i_R(k,R)$ の k ベクトル空間としての次元で定義される。一般の R の Bass 数は、i を増やしていくと、最終的には指数関数的に増大[3]する。これに対し、R が Gorenstein 環のときは、

$$\mu_i(R) = \begin{cases} 1 & (i=d), \\ 0 & (i \neq d) \end{cases}$$

となり、Bass 数は Krull 次元番目のところを軸として左右対称になる。

局所双対定理

R が Gorenstein 環ならば、各 R 加群 M と整数 i に対して同型

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,R) \cong \mathrm{H}^{d-i}_{\mathfrak{m}}(M)^\vee$$

が成り立つ。ここで、右辺の $\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}$ は $\mathfrak{m}$ に関する局所コホモロジー、$(-)^\vee$ は Matlis 双対を表す。

Calabi–Yau 性

R が Gorenstein 環で孤立特異点をもつとき、R 上の極大 Cohen–Macaulay 加群 M, N と整数 i に対して同型

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,N) \cong \mathrm{Ext}^{(d-1)-i}_R(N,M)^\vee$$

[3]正確に述べると、最終的に指数関数的に増大する“ と思われている ”。きちんとそうわかっているのはまだ Golod 環や $\mathfrak{m}^3=0$ の環ぐらいのようである。

が成り立つ。

このように、Gorenstein 環はさまざまな対称性、双対性をみたす美しい環である。

3 Gorenstein 次元

さて、ここから Gorenstein ホモロジー代数の主役を担う Gorenstein 次元の話に入る。従来のホモロジー代数における基本的な不変量として、射影次元 pd、入射次元 id、平坦次元 fd などがあるが、これらは**ホモロジー次元**と総称される。いずれも加群（あるいは鎖複体）の同型類を自然数および $\pm\infty$ にあてがう関数である。ここでは射影次元だけ定義を思い出す。

定義 3.1. R 加群 M の**射影次元** $\mathrm{pd}_R M$ は、M の射影分解の長さの最短で定義される。正確に言うと、R 加群の完全列

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

で $P_0, \ldots, P_n$ が射影的[4]になるものが存在するような n の下限である。従って、有限で止まる射影分解が無い場合は射影次元は ∞ となる。一方、零加群の射影次元は $-\infty$ と定める。

射影次元に関する歴史上もっとも striking な結果は、次の正則局所環のホモロジカルな特徴付けだろう。

定理 3.2 (Auslander–Buchsbaum–Serre (1956))**.** 以下の三条件は同値である。

(1) R は正則環

(2) 任意の R 加群 M に対して $\mathrm{pd}_R M < \infty$

(3) $\mathrm{pd}_R k < \infty$

この定理により、「正則局所環の素イデアルによる局所化はまた正則局所環になるだろう」という Krull の予想が肯定的に解決した。また、この定理は、剰余体に対する各種のホモロジー次元の有限性によって環を特徴付けよ、という新たな問題意識を生むものでもあった。さらに、個々の加群のホモロジー次元の有限性を調べることを促す結果でもあった。実際、射影次元が有限の加群は、正則環上の加群とよく似た振る舞いをする。

[4]我々の状況では、射影加群は自由加群に他ならない。

例 3.3. 射影次元が有限な R 加群 M に対し、不等式

$$\operatorname{depth}_R M + \dim_R N \leq \operatorname{depth}_R R + \dim_R(M \otimes_R N)$$

が成り立つ[5]。この不等式は、M の射影次元の有限性を外すと反例がある。実際、超曲面

$$R = \frac{k[[x,y,z,w]]}{(xy - zw)}$$

上で加群 $M = R/(x,z)$ と $N = R/(y,w)$ を考えると、

$$\operatorname{depth}_R M + \dim_R N = 2 + 2 = 4 > 3 = 3 + 0 = \operatorname{depth}_R R + \dim_R(M \otimes_R N)$$

となる[6]。

Auslander [1] は、射影次元の定義における射影加群の役割を全反射加群に担わせることで、Gorenstein 次元を定義した。

定義 3.4 (Auslander (1967)). M を R 加群とする。$(-)^* = \operatorname{Hom}_R(-, R)$ とおく。

(1) M は次の三条件をみたすとき、**全反射的**であるという。

  (a) 自然な写像 $M \to M^{**}$ が同型
  (b) 任意の $i > 0$ に対して $\operatorname{Ext}_R^i(M, R) = 0$
  (c) 任意の $i > 0$ に対して $\operatorname{Ext}_R^i(M^*, R) = 0$

(2) M の **Gorenstein 次元** $\operatorname{G-dim}_R M$ を、R 加群の完全列

$$0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0$$

で $G_0, \ldots, G_n$ が全反射的になるものが存在するような n の下限で定義する。従って、このような完全列が無い場合は Gorenstein 次元は ∞ となる。一方、零加群の Gorenstein 次元は $-\infty$ と定める。

全反射加群は、Gorenstein 環上では極大 Cohen–Macaulay 加群に他ならない[7]。自由加群は明らかに全反射的なので、任意の R 加群 M に対して不等式

$$\operatorname{G-dim}_R M \leq \operatorname{pd}_R M$$

が（有限性を含めて）成り立つことが定義よりすぐにわかる。

Auslander と Bridger [2] は、Gorenstein 次元を用いた Gorenstein 環の特徴付けを与えた。

[5] Peskine–Szpiro の交差定理の帰結である。

[6] 他にも、射影次元が有限な加群がみたし、そうでないと反例がある結果として、Auslander の零因子定理がある。

[7] Cohen–Macaulay 環上でも全反射加群は極大 Cohen–Macaulay 加群になるが、Gorenstein 環でない限り全反射的でない極大 Cohen–Macaulay 加群が存在する。

定理 3.5 (Auslander–Bridger (1969)). 以下の三条件は同値である。

(1) R は Gorenstein 環

(2) 任意の R 加群 M に対して $\operatorname{G-dim}_R M < \infty$

(3) $\operatorname{G-dim}_R k < \infty$

表題の **Gorenstein ホモロジー代数**とは、Gorestein 次元およびそれに関連するホモロジー次元の研究の総称である。Gorenstein 次元は“ 定義の仕方 ”が射影次元とよく似ていた（定義 3.4(2) を定義 3.1 と見比べよ）が、定理 3.5 を定理 3.2 と見比べてみるとわかるように、両者の次元の持つ“ 性質 ”にも類似がある。このような類似は他にも多々見られるため、Gorenstein ホモロジー代数の研究者は次のような思想を持つこととなる。

思想 3.6. 従来のホモロジー代数におけるあらゆる結果は、Gorenstein ホモロジー代数において対応する類似（以下 **Gorenstein 類似**と呼ぶ）を持つはずである！

Gorenstein 類似の例を以下で二つ与える（定理 3.7, 3.8 と定理 3.9, 3.10）。

定理 3.7 (Auslander–Buchsbaum formula (1957)). 射影次元が有限な R 加群 M に対して、等式

$$\operatorname{pd}_R M = \operatorname{depth}_R R - \operatorname{depth}_R M$$

が成り立つ。

この公式を用いることで、射影次元は簡単に求められる。この定理の Gorenstein 類似は Auslander と Bridger によって示されている。

定理 3.8 (Auslander–Bridger formula (1969)). Gorenstein 次元が有限な R 加群 M に対して、等式

$$\operatorname{G-dim}_R M = \operatorname{depth}_R R - \operatorname{depth}_R M$$

が成り立つ。特に、$\operatorname{pd}_R M < \infty$ ならば $\operatorname{pd}_R M = \operatorname{G-dim}_R M$ である。

射影次元と局所化には次のような関係がある。

定理 3.9. R 加群 M と R の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して

$$\operatorname{pd}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \leq \operatorname{pd}_R M$$

が成り立つ。

この不等式は、射影次元は小さければ小さいほど良い加群であるということと、局所化すると環や加群は良くなるという性質を反映している。これの Gorenstein 類似もやはり成り立つことが知られている。

定理 3.10. R 加群 M と R の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して

$$\text{G-dim}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \leq \text{G-dim}_R M$$

が成り立つ。

ここまで見てきたことからわかるように、Gorenstein ホモロジー代数における Gorenstein 次元は、その定義および性質双方において、従来のホモロジー代数における射影次元の役割を果たしている。しかし、両者の間にはただ一つ相違点がある。すなわち、射影次元は無限生成加群に対してもそのまま定義されるが、Gorenstein 次元はそれと異なり有限生成加群に対してしか定義されない[8]ということである。1990 年代、Enochs と Jenda [7] はこれを無限生成加群にも定義できるように改良し、**Gorenstein 射影次元** Gpd と名付けた。そして、同様に入射次元、平坦次元に対してもそれぞれ **Gorenstein 入射次元** Gid、**Gorenstein 平坦次元** Gfd が定義されている。これらの詳細については本稿では述べないが、やはり多くの Gorenstein 類似が成り立つことが知られている一方、まだ示されていない Gorenstein 類似も多々あり、現在もさかんに研究されている。

4 全反射加群の表現論

最後に、Gorenstein ホモロジー代数の表現論的側面について述べる。次の定理は **Cohen–Macaulay 近似定理**と呼ばれる著名な結果である。

定理 4.1 (Auslander–Buchweitz (1989))**.** Gorenstein 次元が有限な任意の R 加群 M に対して、R 加群の短完全列

$$0 \to Y \to X \to M \to 0$$

で X が全反射的、Y が有限射影次元になるものが存在する。

射影次元が有限な加群の構造は比較的よくわかっている[9]のでそこを無視することにすると、Gorenstein 次元が有限な加群の理解は全反射加群の理解に帰着する、ということをこの定理は言っている。こうして、全反射加群全体のなす圏の構造を調べる研究、すなわち全反射加群の表現論が生まれる。そして、まずは有限次元多元環の表現論における有限表現型の概念の全反射版を考察することになる。

定義 4.2. 直既約な全反射 R 加群の同型類が有限個しかないとき、R は**有限全反射表現型**をもつという。

[8]もちろん、定義 3.4 をそのまま無限生成加群に適用しても論理的な問題は生じないが、理論の展開はうまくいかない。

[9]例えば Buchsbaum–Eisenbud の定理により自由分解の複体としての構造（微分写像の表現行列の情報）がある程度わかる。また、ホモロジカル予想関連の一連の定理（[9] を参照されたい）も、射影次元が有限の加群の情報を多々与える。

次の定理は可換環の表現論における主定理と呼ぶべきものである（詳細については [10] を参照）。

定理 4.3 (Herzog (1978), Buchweitz–Greuel–Schreyer (1987), Knörrer (1987))**.** k を標数 0 の代数閉体とする。このとき、有限全反射表現型をもつ Gorenstein 環 R は**単純特異点**に他ならない。すなわち、$R \cong k[[x_0, \dots, x_d]]/(f)$ で、f は

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1^{n+1} + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (A_n)\ (n \geq 1) \\ x_0^2 x_1 + x_1^{n-1} + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (D_n)\ (n \geq 4) \\ x_0^3 + x_1^4 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (E_6) \\ x_0^3 + x_0 x_1^3 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (E_7) \\ x_0^3 + x_1^5 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 & (E_8) \end{cases}$$

のいずれかになる。さらに、すべての直既約全反射 R 加群の同型類が Auslander–Reiten 箙を用いて分類される。

この定理で、仮定の Gorenstein 性は本質的に不要であることがわかっている [6]。

定理 4.4 (Christensen–Piepmeyer–Striuli–T (2008))**.** k を標数 0 の代数閉体とする。自由でない全反射 R 加群が存在すると仮定する[10]。このとき、R が有限全反射表現型をもつならば、R は単純特異点である。

この定理により、R が Gorenstein でないときは、全反射加群が一つでも存在すれば直既約全反射 R 加群の同型類が無限個存在することがわかる。こうして、有限次元多元環の表現論における Brauer–Thrall の第一・第二予想[11]の全反射版は成り立つのか？という問題が自然に生じる。この問題に関しては最近 [4, 5] において部分的解決がなされ、今後の進展が期待されている。

参考文献

[1] M. Auslander, Anneaux de Gorenstein, et torsion en algèbre commutative, Séminaire d'Algèbre Commutative dirigé par Pierre Samuel, 1966/67, Texte rédigé, d'après des exposés de Maurice Auslander, Marquerite Mangeney, Christian Peskine et Lucien Szpiro, École Normale Supérieure de Jeunes Filles, *Secrétariat mathématique, Paris*, 1967.

[10] この仮定は本質的である。例えば、R が $\mathfrak{m}^2 = 0$ をみたす非 Gorenstein 環の場合は全反射加群は自由加群のみとなる。

[11] 無限表現型の有限次元多元環には、基礎体上の次元が任意に高い直既約加群が存在する（第一）、基礎体が無限体ならそれは無限個存在する（第二）という予想。第一予想は完全に解決していて、第二予想も基礎体が代数閉体なら解決済みである。

[2] M. Auslander; M. Bridger, Stable module theory, *Mem. Amer. Math. Soc.* **94** (1969).

[3] W. Bruns; J. Herzog, Cohen–Macaulay rings, revised edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 39, *Cambridge University Press, Cambridge*, 1998.

[4] O. Celikbas; M. Gheibi; R. Takahashi, Brauer–Thrall for totally reflexive modules over local rings of higher dimension, Preprint (2012).

[5] L. W. Christensen; D. A. Jorgensen; H. Rahmati; J. Striuli; R. Wiegand, Brauer-Thrall for totally reflexive modules, *J. Algebra* **350** (2012), 340–373.

[6] L. W. Christensen; G. Piepmeyer; J. Striuli; R. Takahashi, Finite Gorenstein representation type implies simple singularity, *Adv. Math.* **218** (2008), no. 4, 1012–1026.

[7] E. E. Enochs; O. M. G. Jenda, Gorenstein injective and projective modules, *Math. Z.* **220** (1995), no. 4, 611–633.

[8] H. Matsumura, Commutative ring theory, second edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8, *Cambridge University Press, Cambridge*, 1989.

[9] 高木 俊輔; 高橋 亮, 可換環論の発展—ホモロジカル予想を中心として—, 第 54 回代数学シンポジウム報告集 (2010), 31–46.

[10] Y. Yoshino, Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings, London Mathematical Society Lecture Note Series, 146, *Cambridge University Press, Cambridge*, 1990.