古典不変式論ハンドブック —明示的計算のための—

永井　保成

代数多様体上の半安定層のモジュライ空間について知りたいとき，特に，ある程度具体的な状況でモジュライ空間の詳しい情報を取り出したいとき，しばしばある種の GIT 商を明示的に計算することが役立つ場合がある[1]．この GIT 商の計算は，古典群 G の有限次元表現 V に対して V やその双対 $V^\vee$，また $\mathrm{End}(V)$ の直和として表される表現の上の (半) 不変式の環の生成系に関する問題に帰着させられることがしばしばある．

このような問題は，19 世紀後半から 20 世紀前半にかけて代数学の最も主要な題材のひとつであった**古典不変式論**の範疇に属するものである．この古き良き時代の代数学者たちは上のような不変式環の生成系を求める基本的な理論や手法を既に持っていたが，これを実際に計算することはごく簡単な場合を除き計算量の理由で非常に困難であった．今日では Gröbner 基底の理論を基礎とした計算機代数の発展によって，往年では不可能であったような不変式環の計算が別段の才覚や技巧に依らずともしばしば半自動的に実行可能になっている．

このような手法は既にいくつかの問題に対して適用されてきている．しかし，その潜在的な適用範囲の広さと比較すると，不変式環を計算機代数などに依って明示的に研究する際の基礎となる数学的背景や方法論について述べられた文献は多くない．本稿ではこの点について実用的観点から，参考文献を明らかにしつつ，基本的な考え方を簡単にまとめてみたい．簡単のため常に複素数体 $\mathbb{C}$ 上で議論するが，標数 0 の代数的閉体上で全く同様のことが成り立つ[2]．

なお，筆者はこの分野に足を踏み入れてから日がまだ浅く，以下に述べることの多くは既知の事柄，あるいはそのちょっとした翻案に過ぎないことを予めお断りし，読者の寛恕を乞うものである．文中に引用した参考文献はどれも有用であるが，筆者は [PV94] を最も参考にしている．興味を持たれた方はこれら造詣の深い専門家の手になる文献を参照されたい．

1　古典群の第 1 基本定理

G を古典群，V をその標準表現（例えば，$G = SL_n$ に対しては $V = \mathbb{C}^n$）とする．$\varphi \in V^\vee$ に対しては $T \in G$ は $\varphi \mapsto \varphi \circ T^{-1}$ で作用するので，$W = (V^\vee)^{\oplus p} \oplus V^{\oplus q}$ の成分に一斉に G を作用させせると，W も G の有理表現となる．W 上の多項式環 $\mathbb{C}[W] = \mathrm{Sym}^\bullet(W^\vee)$ には自然に G が作用するから，不変式環 $\mathbb{C}[W]^G$ を考えることができる．この環の生成系を与えるのが**第 1 基本定理** (first fundamental theorem; FFT) である．まず，一番基本的で，応用上も最も重要であると思われる $G = SL_n$ の場合を述べよう．

[1]個人的には，研究 [Nag10a, Nag10b] が古典不変式論を勉強し始めたきっかけだった．

[2]正標数では大きく事情が異なることが知られている．

定理 1 (SL_n **の第 1 基本定理：Weyl,** [Wey39] **Theorem (2.6.A),** [PV94] **§9.3)** $V = \mathbb{C}^n$ を SL_n の標準表現とする．$W = (V^\vee)^{\oplus p} \oplus V^{\oplus q}$ 上の不変式環 $\mathbb{C}[W]^{SL_n}$ は，W 上の座標を $(\varphi_1, \cdots, \varphi_p; v_1, \cdots, v_q) \in W$ とするとき，

(1) $\varphi_i v_j$ $(1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant q)$,

(2) $q \geqslant n$ ならば $\det(v_{j_1} \,|\, v_{j_2} \,|\, \cdots \,|\, v_{j_n})$ $(1 \leqslant j_1, \ldots, j_n \leqslant q)$,

(3) $p \geqslant n$ ならば $\det({}^t\varphi_{i_1} \,|\, \cdots \,|\, {}^t\varphi_{i_n})$ $(1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq p)$,

で生成される．

$v \in V$ を縦ベクトル $\varphi \in V^\vee$ を横ベクトルと見なすとき，対合 φv は不変式である．何となれば，$T \in G$ を $GL(V)$ を経由して行列の積で作用させると $(\varphi T^{-1})(Tv) = \varphi(T^{-1}T)v = \varphi v$．つまり φv は G がどんな代数群であっても不変式である．(2) および (3) が不変式であることは $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ から従う．よって，こちらも G がどんな代数群であっても V に $SL(V)$ を経由して作用すれば不変式である．定理の主要な主張は $V = \mathbb{C}^n$ が $G = SL_n$ の標準表現であるならば，これらの不変式だけで既に $\mathbb{C}[W]^{SL_n}$ が生成されてしまうという点である．また，この定理はそれ自身，$\mathbb{C}[W]^{SL_n}$ が有限生成であることをも主張していることに注意しよう．

偏極 (polarization) と**回復** (restitution) という操作によって，任意の不変式は多重線形な不変式に重複も含めて変数をいろいろと代入することで得られることがわかる（詳細は参考文献，例えば [PV94] §9.1，に譲る）ので，不変式を求める問題は多重線形代数や表現論の問題に置き換えて考えることができる．定理 1 の証明の主な部分は，W に成分の入れ替えで $GL_p \times GL_q$ が作用していることに注目してなされる．伝統的には **Capelli の恒等式**を用いて証明されたが [Wey39, KP96]，GL の表現論を用いた証明 [PV94] Theorem 9.1, はより見通しが良い．

$G = SO_n, Sp_{2n}$ の場合も同様の議論で第 1 基本定理が証明される．$G = SO_n$ の場合，標準表現 $V = \mathbb{C}^n$ には非退化な対称双一次形式 $\langle -, - \rangle$ が与えられており，V の双対空間は V 自身と同一視されることに注意しよう．

定理 2 (SO_n **の第 1 基本定理,** [PV94] **§9.3,** [KP96] **Theorem 10.2)** SO_n の標準表現 $V = \mathbb{C}^n$ に対して，不変式環 $\mathbb{C}[V^{\oplus p}]^{SO_n}$ は，座標 $(v_1, \cdots, v_p) \in V^{\oplus p}$ について，$\langle v_i, v_j \rangle$ および $\det(v_{j_1} \,|\, v_{j_2} \,|\, \cdots \,|\, v_{j_n})$ で生成される．

GL_n や O_n，Sp_{2n} の場合も全く同様であるが，これらの場合は det を含めなくてよいので不変式環の構造はより簡単であることに注意しよう．

2 Symbolic Method

古典不変式論では伝統的に古典群 G が標準表現で $V = \mathbb{C}^n$ に作用しているとき，n 変数の d 次斉次多項式に誘導される G の作用について，その係数に関する不変式を求める問題が盛んに研究された．これは，現代風に言えば $W = \mathrm{Sym}^d(V^\vee)$ への誘導表現に関

して不変式環 $\mathbb{C}[W]^G$ を求めることにあたる．このような問題意識が，古典不変式論者をして V の混合テンソル $T^{p,q}(V)$ を変数とするような不変式を求める問題へと向かわせた．このとき，安直であるが自然な方向性として，十分たくさん不変式を集めれば不変式環が生成されるだろう，という考え方ができる．このような方法によれば，§1 で既に現れた偏極の方法によって全く本質的な追加の議論を必要とせず不変式環の生成系が求められる．

$A_i \in T^{p_i,q_i}(V)$ $(i = 1,\dots,r)$ についての不変式 F を考えよう．偏極によって，これはより多くの変数の多重線形な不変式から得られることがわかるので，$F(A_1,\cdots,A_r)$ は各 A_i について線形であるとしてよい．すなわち，F は G-不変な多重線形写像 $F: T^{p_1,q_1}(V)\oplus\cdots\oplus T^{p_r,q_r}(V)\to\mathbb{C}$ である．しかし，テンソル積の普遍性からこれは，多重線形写像 $\hat{F}: V^{\oplus p_1+\cdots+p_r}\oplus(V^\vee)^{\oplus q_1+\cdots+q_r}\to\mathbb{C}$ であって，G-不変なものと 1 対 1 に対応する．よって，$\hat{F}$ は第 1 基本定理の与える不変式（**典型的基本不変式**; typical basic invariant）の積の線形結合で表される．$\hat{F}$ から F に戻るには $\hat{F}$ 自身をテンソルと見て $A_1,\cdots,A_r$ との完全縮約をとればよい．典型的基本不変式はどれもある種のテンソルの完全縮約とみなせる．例えば，φv $(\varphi\in V^\vee,\ v\in V)$ は $\varphi\otimes v\in(V^\vee)\otimes V$ の縮約であるし，行列式テンソル

$$\Delta = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)f_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes f_{\sigma(n)}\in T^{0,n}(V)$$

（$f_1,\cdots,f_n$ は基底 $e_1,\cdots e_n\in V$ の双対基底）に対して $\Delta\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_n$ の完全縮約を考えると縮約の取り方に依らず $\pm\det(v_1\mid\dots\mid v_n)$ と一致する．1 次形式を並べたものの行列式も双対基底に関する行列式テンソル $\Delta^\vee\in T^{n,0}(V)$ との縮約である．以上の考察から，次の定理が得られた．

定理 3 ([PV94] **Theorem 9.3)** $V=\mathbb{C}^n$ を SL_n の標準表現とし，$W = T^{p_1,q_1}(V)\oplus\cdots\oplus T^{p_r,q_r}(V)$ とおく．$A_1,\cdots,A_\nu$ を $T^{p_i,q_i}(V)$ の座標を表すテンソルの中から（重複を許して）選んで，

$$\tau = \Delta^p\otimes(\Delta^\vee)^q\otimes A_1\otimes\cdots\otimes A_\nu \tag{♠}$$

が (N,N)-型のテンソルになるような全ての可能性に関してその完全縮約として得られる多項式の集合 $\mathcal{S}\subset\mathbb{C}[W]$ は不変式環 $\mathbb{C}[W]^{SL_n}$ を生成する．

テンソル τ の完全縮約の取り方は一般に幾通りもあるので，上の定理においてはひとつのテンソル τ からいくつもの不変式が得られることに注意しよう．また，簡単な考察により Δ と $\Delta^\vee$ の両方が含まれるテンソルの完全縮約はより次数が小さいテンソルの添字の付け替えの線形結合として表されるので上記の τ としては Δ か $\Delta^\vee$ かどちらか一方が含まれる場合のみを考えれば十分である（[PV94] Theorem 9.3 直下の叙述参照）．

SO_n の不変式を考えるのであれば，非退化対称双 1 次形式に対応する $(0,2)$-テンソル g およびその双対 $g^\vee\in T^{2,0}(V)$ を含めれば同じ定理が成り立つ．

3　ベクトルと 1 次形式，行列に関する不変式

Symbolic method の基本定理（定理 3）の適用例として $W = (V^\vee)^{\oplus p} \oplus \mathrm{End}(V)^{\oplus q} \oplus V^{\oplus r}$ の場合，すなわち，いくつかの $(1,0), (0,1), (1,1)$-テンソルに関する不変式について考えよう．これは特殊な例と見えるかもしれないが，代数幾何におけるモジュライ空間の研究ではしばしばこのような W について不変式環 $\mathbb{C}[W]^{SL(V)}$ の計算が役に立つ（このことについては後で触れる）．

簡単のため，まずは $W = \mathrm{End}(V)^{\oplus p}$ の場合を考えよう．この場合，考えるべき (N,N)-型テンソル (♠) は

$$\tau = A_1 \otimes \cdots \otimes A_m$$

の形，ただし，$A_1, \cdots, A_m$ は W の各 $\mathrm{End}(V)$ 成分の座標を表す行列から重複をゆるして選んだもの，となる．$A_k \in T^{1,1}(V)$ と見なすときこれは共変と反変の添字を 1 つずつ持っている : $(A_k)^{i_k}_{j_k}$．いま A_1 の共変添字 i_1 に注目する．τ の完全縮約においては，i_1 はどれかの反変添字 j_k と縮約されているはずであるので，番号を付け替えてこれを j_2 とする．次に A_2 の共変添字 i_2 をとってこれが縮約される反変添字が j_3... というふうにたどっていく．τ の完全縮約を考えているので，この操作は有限回で終わり，最後の共変添字 i_ν は反変添字 j_1 に縮約されて終わるはずである．このとき，縮約してできるスカラーは $\mathrm{tr}(A_1 \ldots A_\nu)$ に他ならない．従って，τ の完全縮約は A_i たちの積のトレースの積になることがわかり，定理 3 を適用することで，次が得られる．

定理 4 (**[PV94], §9.5 Example 1**)　$W = \mathrm{End}(V)^{\oplus p}$ とし，その座標を $(A_1, \ldots, A_p)$ とするとき，不変式環 $\mathbb{C}[W]^{SL(V)}$ は A_i たちの重複を許した任意の順列 $\omega(A_1, \ldots, A_p)$（これを $A_1, \ldots, A_p$ の**語** (word) とも呼ぶ）の跡 $\mathrm{tr}(\omega(A_1, \ldots, A_p))$ で生成される．

次に，$W = \mathrm{End}(V)^{\oplus p} \oplus V^{\oplus q}$ の場合を考えよう．このとき，考えるべき (N,N)-型テンソル (♠) は

$$\tau = \Delta^k \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_l \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_m$$

の形となる．ただし，$N = nk + l = l + m$, $(n = \dim V)$ である．v_1 に注目して τ の完全縮約で v_1 の共変添字が縮約される反変添字を探す．それが Δ に属していればそれ以上やることはない．もしどれかの行列，たとえば，A_1 に属していたならば，その A_1 の共変添字をとってそれと縮約される反変添字を探す．これを繰り返すと，いつかは行列の共変添字が Δ の反変添字に縮約されて終わるはずである．従って，τ の完全縮約は $\det(\omega_1 v_1 | \ldots | \omega_n v_n)$ の形の行列式（と A_i たちの積のトレース）の積となる，ただし ω_j はそれぞれが $A_1, \cdots, A_l$ の中からいくつか選んだ行列の積である．

W が V 上の 1 次形式を含む場合，すなわち $W = (V^\vee)^{\oplus p} \oplus \mathrm{End}(V)^{\oplus q} \oplus V^{\oplus r}$ の場合も同様に議論することで定理 3 から次が得られる．

定理 5　$W = (V^\vee)^{\oplus p} \oplus \mathrm{End}(V)^{\oplus q} \oplus V^{\oplus r}$ の座標を $(\varphi_1, \cdots, \varphi_p; A_1, \cdots, A_q; v_1, \cdots, v_r)$ で表すとき，不変式環 $\mathbb{C}[W]^{SL(V)}$ は

$$(1)\ \mathrm{tr}(\omega_0), \qquad (2)\ \varphi_j\omega_0 v_i, \qquad (3)\ \det(\omega_1 v_{i_1} \mid \cdots \mid \omega_n v_{i_1}), \qquad (4)\ \det\begin{pmatrix} \varphi_{j_1}\omega_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \varphi_{j_n}\omega_n \end{pmatrix}$$

で生成される，ただし，$i, i_1, \cdots, i_n \in \{1, \cdots, r\}$, $j, j_1, \cdots, j_n \in \{1, \cdots, p\}$, であり ω_α は $A_1, \cdots, A_q$ の任意の語である[3].

この定理が半安定層のモジュライ空間とどう結びついているかを，0 次元部分スキームの Hilbert スキームを例にとって説明しよう．S を準射影代数多様体とするとき，0 次元の部分スキーム $Z \subset S$ のなすモジュライ空間を考える．$\ell(Z) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_Z$ とし，$\mathrm{Hilb}^n(S) = \{Z \subset S \mid \dim Z = 0,\ \ell(Z) = n\}$ とするとこれもまた準射影代数多様体となる (Grothendieck)．Hilbert スキームは元来 Grassmann 多様体への関手の埋め込みを用いて構成されたが，$S = \mathbb{C}^n$ 上の 0 次元部分スキームの場合には GIT による扱いやすい記述がある [Nak99]．ここでは簡単のため $S = \mathbb{C}^2$ とする．$Z \subset S = \mathbb{C}^2$ を $\ell(Z) = n$ の 0 次元部分スキームとすると，$\mathcal{O}_Z$ は n 次元の複素ベクトル空間であるから同型 $\varphi : V = \mathbb{C}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Z$ を固定しよう．さらに，$\mathcal{O}_Z$ には，付加的な構造がある．まず，これは $\mathbb{C}[x, y]$-加群である．よって $\mathbb{C}$-準同型写像 $A : \mathbb{C}[x, y] \to \mathrm{End}(V)$ があって，$A_x = A(x), A_y = A(y)$ とおくと，$[A_x, A_y] = 0$ である．さらに，$\mathcal{O}_Z$ 自身が $\mathbb{C}$-代数であるから 1 をもつ．これはただのベクトル空間と見た $V = \mathcal{O}_Z$ のベクトル $v \in V$ を定めていて，$\mathcal{O}_Z = \mathbb{C}[A_x, A_y] \cdot v$ となる．このように，$\mathcal{O}_Z$ は φ を通して $V = \mathbb{C}^n$ 上の組 $(v;\ A_x, A_y) \in V \oplus \mathrm{End}(V)^{\oplus 2}$ を決める．逆に $\mathbb{C}[A_x, A_y] \cdot v = V$ となるならば，組 $(v;\ A_x, A_y)$ は $\mathbb{C}^2$ 上の 0 次元部分スキーム Z で $\ell(Z) = n$ となるものを定めることがわかる．V の基底変換すなわち $GL(V)$ の作用は $(v;\ A_x, A_y)$ を別の組に移すが，この作用で移りあう組は同じ部分スキーム Z を定める．つまり（少なくとも集合論的には）$Y_0 = \{(v;\ A_x, A_y) \in V \oplus \mathrm{End}(V)^{\oplus 2} \mid [A_x, A_y] = 0,\ \mathbb{C}[A_x, A_y] \cdot v = V\}$ に対して

$$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \cong Y_0/GL(V)$$

となる．これを代数多様体の同型にするために GIT を用いる．$\chi = \det : GL(V) \to \mathbb{C}^*$ を行列式写像とすると，χ は $V \oplus \mathrm{End}(V)^{\oplus 2}$ 上の $GL(V)$-直線束を定めるのでこの偏極によって GIT 商をとると $Y = \{(v;\ A_x, A_y) \in V \oplus \mathrm{End}(V)^{\oplus 2} \mid [A_x, A_y] = 0\}$ に対して

$$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \cong Y /\!/_{\chi} GL(V)$$

が得られる．ここで，Y の座標環 $A(Y)$ に対して

$$A(Y)^{GL(V),\chi^n} = \{f \in A(Y)^{SL(V)} \mid g(f) = \chi(g)^n \cdot f \quad (\forall g \in GL(V))\}$$

[3] この定理は上の記述からもわかるように symbolic method の簡単な応用であるから古くから専門家には知られていたと思われるが，この通りの主張が述べられている文献はほとんどない．最近，[Pro07] の 11.8.1 の Exercise にこのステートメントがあることを見つけたが，証明付きで述べられている文献を筆者は知らない．

とおくとき，$Y/\!/_{\chi} GL(V) = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{n\le 0} A(Y)^{GL(V),\chi^n}\right)$で定義される[4]．いま，$\chi = \det$でありYの各成分にスカラー行列は正のウエイトで作用することから，Projの中の直和は$A(Y)^{SL(V)}$に同型であり，これは$\mathbb{C}[V\oplus \mathrm{End}(V)^{\oplus 2}]^{SL(V)}$の剰余環として書けるので，$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^n)$の定義方程式はベクトルと行列に関する不変式の環を求めることに帰着され，(原理的には）定理5が適用できる．ここではより計算しやすい例として**Briançon多様体**を考えよう．いま，$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$は$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^2) \cong \mathrm{Spec}\, A(Y)^{GL(V)}$上射影的である．$\gamma : \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \to \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$はZに対してその基本サイクル$\gamma(Z) = \sum_{p\in\mathbb{C}^2} \mathrm{mult}_p(Z)\cdot p$を対応させる射であり，双有理射になる．そこで，n番目のBriançon多様体B_nを

$$B_n = (\gamma^{-1}(n\cdot 0))_{red} \quad (0\in\mathbb{C}^2\text{は原点})$$

で定義する．$Z\in B_n$であればZの台は$0\in\mathbb{C}^2$であるからO_Zは長さがnの局所アルティン$\mathbb{C}$-代数になり，組$(v; A_x, A_y) \in Y$がこれに対応するには$A_x^i A_y^{n-i} = 0\,(i = 0, \dots, n)$なるベキ零条件を満たすことが必要十分である．よって，$Y_n = \{(v; A_x, A_y) \in Y \mid A_x^i A_y^{n-i} = 0\,(i = 0, \dots, n)\}$と定めるとこれはYの閉部分スキームであり，

$$B_n = Y_n/\!/_{\chi} GL(V) = \mathrm{Proj}\, A(Y_n)^{SL(V)}$$

となる．いま，定理5を使えばnが比較的小さいときのB_nの斉次座標環，すなわち，不変式環$A(Y_n)^{SL(V)}$の生成系（と関係式）が具体的に求められる．ここでは，$n = 3$の場合を考えよう．

まず，作用素A_x, A_yは可換であるから，その語ωとしてはA_x, A_yの単項式のみを考えれば良く，$A_x^3 = A_x^2 A_y = A_x A_y^2 = A_y^3 = 0$であるから，

$$\omega = A_x^i A_x^j \quad (i + j \le 2) \tag{$\heartsuit$}$$

を考えればよい．これらは全てベキ零であるから$\mathrm{tr}(\omega) = 0$となり，不変式環$A(Y_3)^{SL(V)}$は$\det(v \mid \omega_1 v \mid \omega_2 v)$の形の不変式で生成される．(♡)によってこの生成系は有限である．計算機代数を用いてこれらの間の関係式を計算することで，不変式環$A(Y_3)^{SL(V)}$は

$$\begin{aligned}&\xi_1 = \det(v \mid A_x v \mid A_y v),\quad \xi_2 = \det(v \mid A_x v \mid A_x^2 v),\quad \xi_3 = \det(v \mid A_x v \mid A_x A_y v),\\ &\xi_4 = \det(v \mid A_x v \mid A_y^2 v),\quad \xi_5 = \det(v \mid A_y v \mid A_y^2 v)\end{aligned} \tag{$\diamondsuit$}$$

の5つで生成され，これらの間の関係式は

$$\xi_2\xi_4 - \xi_3^2 = \xi_2\xi_5 - \xi_3\xi_4 = \xi_3\xi_5 - \xi_4^2 = 0$$

で与えられることが確かめられる．この方程式はdeterminantal equation

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\xi_2 & \xi_3 & \xi_4\\ \xi_3 & \xi_4 & \xi_5\end{pmatrix} \le 1$$

[4] $(v; A_x, A_y) \in Y$がGITの意味でχ-安定であることと$\mathbb{C}[A_x, A_y]\cdot v = V$は同値である．すなわち$Y_0$はYのχ-安定点全体に一致している．

に他ならならないので，結局 $B_3 = \mathrm{Proj}\, A(Y_3)^{SL(V)}$ は twisted cubic curve 上の cone であることがわかった．

4　第 2 基本定理と有限性

前節の定理 5 からもわかるように，symbolic method の難点はそれの与える不変式環の生成系が一般には無限集合になってしまうということである．Briançon 多様体の場合はベキ零条件 (♡) によって有限の生成集合に限ることができたが，このような都合の良い事態は一般には期待できない．一方で，有名な Hilbert の有限生成性定理によって，古典群 G に対してはどんな G-不変式環も有限生成になることが知られている．従って，symbolic method の与える生成系は無限であっても，実際はその有限部分集合があってそれでもって不変式環は生成される．計算機代数を応用して不変式環を具体的に計算するという立場からは，実用上，ある種の明示的な（あるいは effective な）生成系の bound を知ることが望ましい．しかし，この問題は経験上とても難しいことが知られていて，定理 3 のような一般的な状況で bound を得ることはほぼ絶望的である[5]．生成系の bound を得る問題は，与えられた生成系の間の関係式を求める問題（第 2 基本定理）とも関連しているがこれもまた難しい問題である．しかし，ベクトルと一次形式および行列に関する不変式の場合は多重線形代数によって得られる関係式によって有用な結論を得ることができる場合がある．本節ではこの点に関していくつかの例を通して説明する．

いま，A, B, C を 2 次正方行列とする．このとき，$\det B = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(B)^2 - \mathrm{tr}(B^2))$（対称式についての Newton の関係式）であり，Cayley–Hamilton の定理は

$$B^2 - \mathrm{tr}(B)\cdot B + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(B)^2 - \mathrm{tr}(B^2))\cdot I_2 = O$$

となる．これは B の成分の 2 次式であるから，これを多重線形化することで

$$(BC + CB) - (\mathrm{tr}(B)C + \mathrm{tr}(C)B) + (\mathrm{tr}(B)\,\mathrm{tr}(C) - \mathrm{tr}(BC))\cdot I_2 = O$$

が得られる．両辺に A を左から掛けて全体のトレースを取ると

$$\mathrm{tr}(ABC) + \mathrm{tr}(ACB) - \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(BC) - \mathrm{tr}(B)\,\mathrm{tr}(CA) - \mathrm{tr}(C)\,\mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)\,\mathrm{tr}(C) = 0 \quad (\diamond)$$

が得られる．たとえば，$A, B, C \in \mathfrak{sl}_2$ であれば，$\mathrm{tr}(ABC) = -\mathrm{tr}(ACB)$ が得られるので，不変式環 $\mathbb{C}[\mathfrak{sl}_2^{\oplus r}]^{SL_2}$ の生成系 $\{\mathrm{tr}(\omega)\}$ の語 ω としては，行列の単項式のみを考えればよいことがわかる．

より一般に，$\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ の元の間の非自明な関係式が Cayley–Hamilton の定理の多重線形化によって得られる．これを Cayley–Hamilton identity と呼ぶことにすると，次の定理が成り立つ．

[5] これこそが Hilbert による不変式環の有限生成性定理の証明が画期的であった所以である，

定理 6 (Procesi [Pro76], 行列の不変式の第 2 基本定理) $\mathbb{C}[\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\oplus r}]^{SL_n}$ の定理 4 による生成系の間の関係式は Cayley–Hamilton identity に $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\oplus r}$ の変数行列を様々に代入したものたちによって生成される．

この関係式は，行列の不変式の生成系の次数の bound にも応用できる．いま，不変式環 $\mathbb{C}[\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\oplus r}]^{SL_n}$ の定理 4 のトレースによる生成系に関して，d 文字以下の語 ω に関する $\mathrm{tr}(\omega)$ が不変式環を生成するような d の最小値を $\delta(n,r)$ とおく．このとき，例えば，$\delta(2,r)=3$ が次のようにしてわかる．3 文字以下の語のトレースが生成するイデアルを I とすれば，Cayley–Hamilton identity ($\diamond$) を繰り返し用いることで

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}((AB)CD) \equiv -\mathrm{tr}(A(BD)C) \equiv \mathrm{tr}((AC)BD) \equiv -\mathrm{tr}(ACDB) \pmod{I},\\
&\mathrm{tr}(A(BC)D) \equiv -\mathrm{tr}(A(DB)C) \equiv \mathrm{tr}(ACDB) \pmod{I}
\end{aligned}$$

となり，$\mathrm{tr}(ABCD)\equiv 0$ がわかる．このことから，4 文字以上の語のトレースは 3 文字以下の語のトレースの生成するイデアルに含まれてしまうことがわかる．[For87] によれば Dubnov がこれと $\delta(3,r)=6$ を示している．一般の n に対しては $\delta(n,r)\leqslant n^2$ (Procesi [Pro76]) や $\delta(n,r)\geqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$ (Kuzmin, [For87] 参照) が知られている．より強く $\delta(n,r)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ が期待されているようであるが，筆者の知る限り $n\geqslant 4$ では未解決のようである．

行列だけでなく，ベクトルや一次形式を含むような古典不変式環でも多重線形代数的な関係式がある．例えば，行列式についての初等的な関係式として

$$\begin{aligned}
&\det(Av_1 \mid Av_2 \mid \cdots \mid Av_n) = \det(A)\det(v_1 \mid \cdots \mid v_n),\\
&\det(Av_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n) + \det(v_1 \mid Av_2 \mid \cdots \mid v_n) + \det(v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid Av_n) = 0
\end{aligned}$$

等がある．これらを用いれば，例えば次の命題を証明することはたやすい（証明は読者に任せる）．

命題 1 不変式環 $\mathbb{C}[\mathfrak{sl}_2{}^{\oplus 3}\oplus\mathbb{C}^2]^{SL_2}$ はその座標を行列 $(A,B,C)\in\mathfrak{sl}_2{}^{\oplus 3}$ およびベクトル $v\in\mathbb{C}^2$ で表すとき，

- $\omega = A^2, B^2, C^2, AB, BC, CA, ABC$ についての $\mathrm{tr}(\omega)$
- $\omega = A, B, C, AB, BC, CA, ABC$ についての $\det(v \mid \omega v)$

で生成される．

この議論の流れから次の問題が自然と持ち上がる（この問題に対する一般的な結果を筆者はひとつも知らない）．

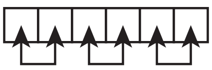
問題 det の関係式を用いてベクトル，一次形式と行列に関する不変式の生成系の次数の bound を得ることができるか？

5　SO_{2n} の場合

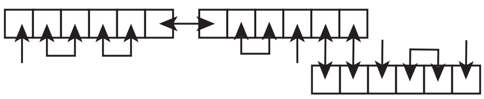
古典群 G が SL_n 以外のものに対しても §§3,4 と類似の問題を考えることができる．例えば，$G = SO_{2n}, W = \mathrm{End}(V)^{\oplus r} \oplus V$ （ここで，$V = \mathbb{C}^{2n}$ は SO_{2n} の標準表現）に対して $\mathbb{C}[W]^{SO_{2n}}$ を求める問題を考えてみよう[6]．われわれは SO_{2n} の第 1 基本定理（定理 2）を知っているし，symbolic method もそのまま適用できるので，定理 3 の類似がそのまま成り立つ．ただし，ここで気をつけなければならないのは，この場合，V 上の非退化対称双一次形式 $g \in T^{0,2}(V)$ によって V はその双対空間 $V^\vee$ と同型であるから自由にテンソルの「足の上げ下げ」ができるので反変テンソルを考える必要はなく，完全縮約をとるべきテンソルで行列式テンソルを含むものは

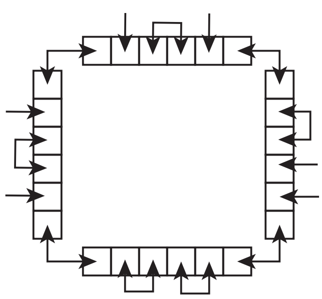
$$\Delta^p \otimes (g^\vee)^q \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_\nu,$$

ただし，$g^\vee \in T^{2,0}(V)$ は g の双対，$A_1, \cdots, A_\nu$ は多重共変テンソル，の形に整理できる．$W = \mathrm{End}(V)^{\oplus p} \oplus V^{\oplus q}$ の場合は特に $A_1, \cdots, A_\nu$ はベクトル，または行列の反変添字を上げてできる $(2,0)$-テンソルとなる．このとき，例えば Pfaffian（の多重線形化）が新たに不変式として現れる．すなわち，$A \in \mathfrak{so}_{2n}$ に対応する $(2,0)$-テンソルを $\hat{A}$ とすると，$\mathrm{Pf}(A)$ は $\Delta \otimes \hat{A}^{\otimes n}$ の完全縮約に（定数倍の差を除いて）一致する．共変成分を矢印，反変成分を箱で模式的に表すと行列式テンソル Δ は □□□□□□，ベクトルは $\longrightarrow$，また，$(2,0)$-テンソルは $\longleftrightarrow$ のように表される．共変成分と反変成分の縮約を，矢印を箱に突き刺すことで表現すれば Pfaffian は



のようになる．ここで，$(2,0)$-テンソルの存在が組み合わせ論を厄介にすることがわかる．$(2,0)$-テンソルは，いくつかの行列式テンソルをつないで tree や cycle を作るので §3 のような幼稚な議論で不変式を有限種類へと場合分けすることはできない:





このようにして得られる不変式が，非退化対合 g やトレース，行列式や Pfaffian など馴染みの深い多重線形代数的な不変式で生成される環に含まれるかどうかは，定理 5 の

[6] 筆者は実際 [Nag10a] でこの形の不変式環と遭遇した．

類似を考える上で避けて通れない問題であるが，SL_n の場合と比べて本質的により難しい問題を含んでいるように筆者には思われる[7].

6 他の方法について

最後に，計算機代数の代数群による不変式環の計算という観点から，いくつかの全く異なる手法について簡単に触れておきたい．

まず，拙稿でこれまで述べてきたのは古典不変式論を応用し，絞り込まれた生成系の間の関係式を計算機代数で求めるという手法についてであったが，Gröbner 基底の応用の観点から，不変式環を求める全く異なるアルゴリズムがすでに研究されている．[DK02] の第 4 章で Darksen と Kemper は Reynolds 作用素（あるいは，Casimir 作用素）を直接的に計算して，Hilbert の有限生成性定理の証明の手順そのままに不変式環の生成系をいわば「全自動で」求めるアルゴリズムを（理論的背景の解説とともに）提案している．Gröbner 基底を用いてこの種の計算を行う場合は計算量の問題がしばしば深刻であるから，Darksen-Kemper の方法をこれまで述べてきたいくつかの不変式論の具体的な問題に関して実装して，古典不変式論を用いる方法とどちらがより「実用的」であるか試してみることは必要であるが，筆者の怠慢，また筆者がプログラミングに大変疎いことも相俟ってこの点について詳しく調べてはいない．

次に，§4 で述べた古典不変式論の生成系の bound の問題に直接取り組まないで対処するもうひとつの方法として Weyl の積分公式（あるいは，次元公式）を応用して，求めたい不変式環の Poincaré 級数を計算する手法がある．これは，binary form についての古典不変式環における Cayley–Sylvester の公式（[Muk03] §4.4 参照）の一般化であり，代数群のウエイト格子の計算と留数定理によってアルゴリズム的に計算可能である（この点に関しても [DK02] の第 4 章に丁寧で実用的な解説がある）．与えられた不変式環 $\mathbb{C}[W]^G$ に属する不変式の有限系 $\mathcal{S}$ を適当に取って，$\mathcal{S}$ が生成する部分環 R を考える．R の Poincaré 級数もまた Gröbner 基底を用いて計算可能である．もし R の Poincaré 級数が不変式環のそれと一致していれば，R が不変式環全体になる，すなわち，$\mathcal{S}$ が不変式環の生成系を与えることが結論できる[8]．この方法でどのぐらいの「大きさ」の不変式環まで求められるか，様々な例を計算してみると面白いのだが，紙数が尽きたので読者の手にゆだねることとしよう．

[7][Pro07] の p.437 に関連する定理が詳細な証明なしに述べられているが，どのようにしてこの組み合わせ論的複雑性を回避して証明するのか，いまのところ筆者にはわからない．

[8]Becker [Bec10] の §5 ではこの方法を用いていくつかの古典不変式環を決定している．Proposition 5.2 は 命題 1 と非常に似通っているが，この場合に限っては拙稿で説明した線形代数からくる具体的な関係式を用いる方法の方が簡単であるし見通しが良い．このように，不変式論を計算する問題では，どのような手法を取るべきかを一律に決める方法はない．そもそも，計算機が実用上の有限時間で止まるかどうか，実際に走らせてみるまでわからないし，計算機に頼った力づくの方法を避けられるならそれにこしたことはない．

参考文献

[Bec10] T. Becker, *On the existence of symplectic resolutions of symplectic reductions*, Math. Z. **265** (2010), no. 2, 343–363.

[DK02] H. Derksen and G. Kemper, *Computational invariant theory*, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, I, Springer-Verlag, Berlin, 2002. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 130.

[For87] E. Formanek, *The invariants of $n \times n$ matrices*, Invariant theory, Lecture Notes in Math., vol. 1278, Springer, Berlin, 1987, pp. 18–43.

[KP96] Kraft and Procesi, *Classical Invariant Theory – the primer* (1996). PDF file available from the website `http://www.math.unibas.ch/~kraft/Papers/KP-Primer.pdf`.

[Muk03] S. Mukai, *An introduction to invariants and moduli*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 81, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. Translated from the 1998 and 2000 Japanese editions by W. M. Oxbury.

[Nag10a] Y. Nagai, *Non-locally-free locus of O'Grady's ten dimensional example*, to appear in manuscripta mathematica, preprint (2010).

[Nag10b] ———, *Birational geometry of O'Grady's six dimensional example over the Donaldson-Uhlenbeck compactification*, preprint (2010).

[Nak99] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, University Lecture Series, vol. 18, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[PV94] V. L. Popov and E. B. Vinberg, *Invariant theory*, Algebraic geometry. IV (I. R. Shafarevich, ed.), Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 55, Springer-Verlag, Berlin, 1994 (English translation from Russian edition (1989)).

[Pro76] C. Procesi, *The invariant theory of $n \times n$ matrices*, Advances in Math. **19** (1976), no. 3, 306–381.

[Pro07] ———, *Lie groups*, Universitext, Springer, New York, 2007.

[Wey39] H. Weyl, *The Classical Groups. Their Invariants and Representations*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1939.

早稲田大学理工学術院　`nagai.y@waseda.jp`