整係数 2 次元 p 進表現の構成

安田 正大

1. はじめに

1.1. この原稿は, 2012 年 8 月 23 日に, 第 57 回代数学シンポジウムにおいて, 同じタイトルで話させていただきました講演の内容に, 補足・訂正をいくつか加えてまとめたものです. 発表の機会を与えてくださいましたオーガナイザーの皆様に感謝いたします.

1.2. この原稿で述べる主要な結果は, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の 2 次元クリスタリン表現の還元に関するものであり, 山下剛さん[1] との共同研究によるものです. Wach 加群の理論というものを用いて, 具体的に表現を構成するため, 上記のような表題にしました.

1.3. この原稿の Part I では, この分野の専門家でない方が原稿をお読みくださる場合を想定し, 基礎的な予備知識をまとめてあります. Part II で主結果を述べ, 証明の概略を Part III で述べます.

1.4. 謝辞. この原稿の古い版にあったいくつもの誤りを指摘してくださった山下剛さん, および Padé 近似についていろいろとご教示をくださいました平田典子先生に感謝いたします.

Part 1. 予備知識

2. p 進体の p 進表現

p を素数とします.

2.1. この原稿では p 進数のなす体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体を p 進体と呼びます ($\mathbb{Q}_p$ のことだけを p 進体と呼ぶ流儀もあります).

2.2. E を $\mathbb{Q}_p$ の代数拡大体とするとき, E における p 進整数のなす環 $\mathbb{Z}_p$ の整閉包を E の整数環と呼び, 記号 $\mathcal{O}_E$ で表わします. $\mathcal{O}_E$ は E を分数体とする付値環となります. E が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大のときは, $\mathcal{O}_E$ はさらに完備離散付値環となります. $v_p : E^\times \to \mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ に値をもつ E の指数付値であって, $v_p(p) = 1$ を満たすただ一つのものとします.

2.3. K を p 進体とし, K の代数閉包 $\overline{K}$ をひとつ固定します. $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ とおき, K の絶対 Galois 群と呼びます. $\overline{K}$ に含まれる K の任意の有限次拡大体 L および任意の $g \in G_K$ に対し, $g\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$ が G_K の開部分集合となるような位相のうち最も粗いものを G_K に入れ, G_K を位相群とみなします.

2.4. 群 G_K の構造. K の有限次拡大 K'/K が不分岐であるとは $\mathcal{O}_K$ の素元が $\mathcal{O}_{K'}$ の素元であることをいいます. $\overline{K}$ に含まれる, K の有限次不分岐拡大体の合併を K^{unr} と書きます. K^{unr} は K の部分体となります. 体 K^{unr} を K の最大不分岐拡大体と呼びます.

K^{unr} は K のガロア拡大となり, $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{unr}}/K)$ は, K の剰余体 k の絶対ガロア群と標準的に同型になります. G_K の閉部分群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K^{\mathrm{unr}})$ を $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の惰性部分群と呼び, 記号 I_K で表わします. 付値環 $\mathcal{O}_{K^{\mathrm{unr}}}$ の剰余体を $\overline{k}$ とおくと, $\overline{k}$ は k の代数閉包になります. 連続準同型 $G_K/I_K \cong \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{unr}}/K) \to \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ は同型となります. p 乗写像 $F_{\overline{k}}$ を $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ の元とみなしたものを Frob_k で表わし, $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ の数論的 Frobenius と呼びます. $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ は Frob_k で生成される自由副有限群となります.

群 I_K の副 p Sylow 部分群を P_K で表わします. P_K は G_K の正規部分群となります. P_K を G_K の野性的惰性部分群と呼びます.

2.5. G_K の p 進表現. E を $\mathbb{Q}_p$ の代数拡大体とし, $\mathcal{O}_E$ をその整数環とします.

[1] 現在, (株) 豊田中央研究所に所属しておられます.

2.5.1. G_K の $\mathcal{O}_E$ 表現とは, 有限生成自由 $\mathcal{O}_E$ 加群 T と, 連続準同型 $G_K \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_E}(T)$ の組 (T, ρ) のことを言います. 記号の濫用により ρ を省略し, (T, ρ) のことをしばしば T と書きます. ここで $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_E}(T)$ には, $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_E}(F)$ の p 進位相から誘導される位相を入れます.

2.5.2. G_K の E 線形表現とは, 有限次元 E ベクトル空間 V と, 連続準同型 $G_K \to \mathrm{GL}_E(V)$ の組 (V, ρ) のことを言います. 記号の濫用により ρ を省略し, (V, ρ) のことをしばしば V と書きます. ここで $\mathrm{GL}_E(V)$ には, $\mathrm{End}_E(V)$ の p 進位相から誘導される位相を入れます. $E = \mathbb{Q}_p$ のとき, G_K の E 線形表現のことを G_K の p 進表現と呼びます.

2.5.3. G_K の $\mathcal{O}_E$ 表現, および E 線形表現の全体は, それぞれ加法圏, およびアーベル圏をなします. この圏をそれぞれ記号 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_E} G_K$, および $\mathrm{Rep}_E G_K$ で表わします. 圏と関手のなす図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_E} G_K & \longrightarrow & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p} G_K \\ {\scriptstyle -\otimes_{\mathcal{O}_E} E}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle -\otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p} \\ \mathrm{Rep}_E G_K & \longrightarrow & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G_K \end{array} \tag{2.1}$$

があります. ここで左側縦方向の関手は $\mathcal{O}_E$ 上 E をテンソルする関手, ここで右側縦方向の関手は $\mathbb{Z}_p$ 上 $\mathbb{Q}_p$ をテンソルする関手, 上側横方向の関手は $\mathcal{O}_E$ 構造を忘れて $\mathbb{Z}_p$ 加群とみなす関手, 下側横方向の関手は E 構造を忘れて $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間とみなす関手です. 関手 $- \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ は本質的に全射となります. 標準的な関手の間の同型を除き, 上の図式は可換になります.

3. de Rham 表現およびクリスタリン表現

p を素数とします. 前節と同様 K を p 進体, E を $\mathbb{Q}_p$ の代数拡大体とします. 圏 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G_K$ の重要な充満部分圏として, de Rham 表現のなす圏 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{dR}}_{\mathbb{Q}_p} G_K$ およびクリスタリン表現のなす圏 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{cris}}_{\mathbb{Q}_p} G_K$ があります. この節ではこれらの圏の定義を紹介します. より詳しいことについては [F1], [I] などをご参照ください.

3.1. 記号の準備. まずいくつか記号を準備します.

3.1.1. $\mathcal{O}_K$ は離散付値環なので, とくに局所環となりますが, $\mathcal{O}_K$ の剰余体を k で表わします. k は有限体となります.

3.1.2. 単位可換環 A であって, 標準的な準同型 $\mathbb{Z} \to A$ が $\mathbb{Z}$ の剰余環 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を経由するものを標数 A の環と呼びます. A を標数 p の環とすると, p 乗写像 $A \to A$ は環 A の自己準同型となります. この自己準同型を F_A で表わすことにします.

3.2. Witt ベクトルのなす環. この節では Witt ベクトルのなす環の定義を紹介します. より詳しいことについては [S] などをご参照ください.

3.2.1. 一般に (但し素数 p を固定した状況で), 単位可換環 A に対し, A を係数とする Witt ベクトルのなす環 $W(A)$ という単位可換環が定義できます. $A \mapsto W(A)$ は, 単位可換環のなす圏から自分自身への関手であって, 次の 2 条件で特徴づけられるものです:

- 集合として $W(A) = \prod_{n \geq 0} A$ が成り立つ. より正確には, 単位可換環の圏から集合の圏への忘却関手を f とすると, 合成 $f \circ W$ は A に $\prod_{n \geq 0} f(A)$ を対応させる関手に等しい. 元 $(a_n)_{n \geq 0} \in \prod_{n \geq 0} f(A)$ を $W(A)$ の元とみなしたもののことを記号 $[a_0, a_1, \ldots]$ で表わす.
- 各整数 $n \geq 0$ に対して $W(A)$ の元 $[a_0, a_1, \ldots]$ を A の元

$$a_0^{p^n} + p a_1^{p^{n-1}} + \cdots + p a_{n-1}^p + p^n a_n$$

  に送る写像 $W(A) \to A$ は環の準同型である.

3.2.2. $a \in A$ に対し, 元 $[a, 0, 0, \ldots] \in W(A)$ を A の Teichmüller 持ち上げと呼び, 記号 $[a]$ で表わします.

3.2.3. 関手 W は, 勝手な単位可換環から新たな単位可換環を生み出す装置ですが, 出発する環 A としては標数 p の環をとる場合が多いです.

$A = \mathbb{F}_p$ のとき, 環 $W(\mathbb{F}_p)$ と環 $\mathbb{Z}_p$ との間に標準的に同型が存在することが知られています. そこで以下ではこの両者を同一視することにします.

A が標数 p の有限体のときは $W(A) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ 上不分岐な p 進体となり, $W(A)$ はその整数環となります.

3.2.4. 標数 p の単位可換環 A が完全環であるとは, 自己準同型 F_A が全単射であることをいいます. 標数 p の完全環であって体となるものを標数 p の完全体と呼びます. A が標数 p の完全体のとき, $W(A)$ は完備離散付値環となります. さらに $[a_0, a_1, \ldots]$ を a_0 に送る写像 $W(A) \to A$ は $W(A)$ の剰余体と A との同型を与えます.

3.2.5. R が完備離散付値環であって, その分数体が標数 0 かつ, その剰余体 A が標数 p の完全体のとき, $W(A)$ から R への環準同型であって, 合成 $W(A) \to R \to A$ が $[a_0, a_1, \ldots]$ を a_0 に送る写像 $W(A) \to A$ と一致するものが一意的に存在します.

3.3. 準同型 θ. 剰余環 $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ は標数 p の環となるため, 自己準同型 $F_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}} : \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \to \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ を考えることができます. 右側に (可算) 無限に延びている環の図式

$$\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \xleftarrow{F_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}}} \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \xleftarrow{F_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}}} \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \xleftarrow{F_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}}} \cdots$$

の射影極限を $\mathcal{R}$ とおきます (この環を $\widetilde{\mathbb{E}}^+$ と書く流儀もあります). $\mathcal{R}$ は完全環となります. 合成 $\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_{\overline{K}} \to \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ は標準射影 $\mathcal{O}_K \to k$ を経由するので $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ は k 代数の構造を持ちます. k は完全体なので, 任意の $a \in k$ に対し, $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \mathcal{R}$ であって $x_0 = a$ を満たすものがただ一つ存在します. a をこの x に送る写像 $k \to \mathcal{R}$ により, $\mathcal{R}$ は k 代数の構造を持ちます.

環 $\mathcal{R}$ を係数とする Witt ベクトルのなす環 $W(\mathcal{R})$ を考えます. $\mathcal{R}$ が k 代数の構造をもつので, $W(\mathcal{R})$ は $W(k)$ 代数の構造を持ちます.

$n \geq 0$ を整数とします. $x = [r_0, r_1, r_2, \ldots]$ を $W(\mathcal{R})$ の元とします. 各整数 $i \geq 0$ に対し, r_i は $\mathcal{R}$ の元なので $r_i = (a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots)$ の形をしています. ここで各整数 $j \geq 0$ に対し $a_{i,j} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ であり, $a_{i,j+1}^p = a_{i,j}$ を満たしています. そこで $i = 0, \ldots, n$ に対し, 元 $a_{i,n}$ の $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}$ への持ち上げ $\widetilde{a}_{i,n}$ をひとつ選び,

$$\theta_n(x) = \widetilde{a}_{0,n}^{p^n} + p\widetilde{a}_{1,n}^{p^{n-1}} + \cdots + p^{n-1}\widetilde{a}_{n-1,n}^p + p^n\widetilde{a}_{n,n}$$

とおくと, $\theta_n(x)$ は持ち上げ $\widetilde{a}_{i,n}$ の取り方に依存せず, x を $\theta_n(x)$ に送る写像 $W(\mathcal{R}) \to \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ は環の準同型となることがわかります.

さらに準同型 θ_n は, 準同型 θ_{n+1} と標準射影 $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^{n+1}\mathcal{O}_{\overline{K}} \to \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n\mathcal{O}_{\overline{K}}$ との合成に等しいこともわかります.

$\mathcal{O}_{\overline{K}}$ の p 進完備化を $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} = \varprojlim_n \mathcal{O}_{\overline{K}}$ で表わし, $\mathbb{C}_p = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ とおきます. 準同型の族 $(\theta_n)_{n\geq 0}$ の誘導する準同型を

$$\theta : W(\mathcal{R}) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$$

で表わします. 準同型 θ は全射であることが知られています. また θ の核は 1 元で生成される $W(\mathcal{R})$ のイデアルであり, その生成元の具体的な表示も知られています.

3.4. 環 B_{dR} および de Rham 表現.

3.4.1. 準同型 θ の誘導する K 代数の準同型 $K \otimes_{W(k)} W(\mathcal{R}) \to \mathbb{C}_p$ を θ_K で表わします. 環 B_{dR}^+ を射影極限

$$B_{\mathrm{dR}}^+ = \varprojlim_n (K \otimes_{W(k)} W(\mathcal{R}))/(\mathrm{Ker}\,\theta_K)^n$$

で定義します. B_{dR}^+ は完備離散付値環であり, 準同型 θ の誘導する準同型 $B_{\mathrm{dR}}^+ \to K \otimes_{W(k)} W(\mathcal{R})/(\mathrm{Ker}\,\theta_K) \to \mathbb{C}_p$ が, B_{dR}^+ の剰余体と $\mathbb{C}_p$ との同型を与えることが知られています. B_{dR}^+ の分数体を B_{dR} とおきます. B_{dR} は群 G_K の作用する K 代数であり, かつ完備離散付値体の構造をもっています.

3.4.2. G_K の p 進表現 V に対し, テンソル積 $B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ を考え, これに群 B_{dR} を対角的に作用させます. この作用に関する不変部分 $(B_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{G_K}$ を $D_{\mathrm{dR}}(V)$ とおきます.

B_{dR} が K 代数であることから $D_{\mathrm{dR}}(V)$ は K ベクトル空間になります. さらに $B_{\mathrm{dR}}^{G_K} = K$ であることが知られており, このことを使うと $\dim_K D_{\mathrm{dR}}(V) \le \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ であることがわかります. 等号 $\dim_K D = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ が成り立つとき V を de Rham 表現であるといいます. G_K の E 線形表現 V に対し, V が de Rham 表現であるとは, $D_{\mathrm{dR}}(V)$ が階数 $\dim_E V$ の自由 $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ 加群となることをいいます.

3.4.3. $D_{\mathrm{dR}}(V)$ には減少フィルトレーション $\mathrm{Fil}^\bullet D_{\mathrm{dR}}(V)$ が, $i \in \mathbb{Z}$ に対し $\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V) = ((\mathrm{Ker}\,\theta_K)^i B_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ とおくことによって入ります. V が de Rham 表現のとき, V の Hodge-Tate 重さを, $\mathrm{gr}^i D_{\mathrm{dR}}(V) = \mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^{i+1} D_{\mathrm{dR}}(V)$ が $\{0\}$ にならないような整数 i 全体のなす集合として定義します. より正確には, i に $\dim_K \mathrm{gr}^i D_{\mathrm{dR}}(V)$ の重複度をつけ, 多重集合として V の Hodge-Tate 重さを定義します. 後で導入する元 t を用いると, Tate ひねり $\mathbb{Q}_p(1) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \overline{K}^\times) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ の Hodge-Tate 重さは $\{-1\}$ となります. Hodge-Tate 重さの符号を逆にし, $\mathbb{Q}_p(1)$ の Hodge-Tate 重さが $\{1\}$ となるように Hodge-Tate 重さを定義する流儀もあります.

3.5. 環 B_{cris} およびクリスタリン表現.

3.5.1. 群 G_K の作用する $W(k)$ 代数 A_{cris} を, クリスタリンコホモロジーを用いて

$$A_{\mathrm{cris}} = \varprojlim_n H^0_{\mathrm{cris}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})/(\mathrm{Spec}(W(k)/p^n W(k))), \mathcal{O}_{\mathrm{cris}})$$

と定義します. また $B_{\mathrm{cris}}^+ = A_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ とおきます.

3.5.2. B_{dR} の定義の際に導入した環 $W(R)$, および PD 構造と呼ばれるこの原稿では詳しく説明しない概念を用いると, A_{cris} を次のように具体的に記述できます: γ を組 $(W(k), pW(k))$ 上の標準的な PD 構造とすると, A_{cris} は G_K の作用する $W(k)$ 代数として, 組 $(W(K), \mathrm{Ker}\,\theta)$ の $(W(k), pW(k), \gamma)$ 上の PD 包絡の p 進完備化と同型である. この記述から, A_{cris} および B_{cris}^+ を B_{dR} の部分環とみなすことができます. また, $c_0, c_1, c_2, \ldots$ を $\mathbb{Z}_p$ の元の列であって, p 進的に 0 に収束するものとするとき, $x \in \mathrm{Ker}\,\theta$ に対し, A_{cris} の元 $\sum_{n \ge 0} c_n \frac{x^n}{n!}$ を考えることができます.

3.5.3. $\overline{K}$ に属する 1 の p 巾乗根の族 $(\zeta_{p^n})_{n \ge 0}$ であって, 条件

- 各 $n \ge 0$ に対し $\zeta_{p^n} \in \overline{K}$ は 1 の原始 p^n 乗根である,
- 各 $n \ge 0$ に対し $\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$ が成り立つ,

を満たすものをひとつ固定します. このとき

$$\varepsilon = (\zeta_{p^0} \mod p\mathcal{O}_{\overline{K}}, \zeta_p \mod p\mathcal{O}_{\overline{K}}, \zeta_{p^2} \mod p\mathcal{O}_{\overline{K}}, \ldots)$$

は環 $\mathcal{R}$ の元となります. さらに $[\varepsilon] - 1$ は $\mathrm{Ker}\,\theta$ に属する $W(\mathcal{R})$ の元となります. A_{cris} の元 t を

$$t = \log([\varepsilon]) = \sum_{n \ge 1} (-1)^{n-1} \frac{([\varepsilon] - 1)^n}{n}$$

で定めます. B_{cris}^+ および $1/t$ で生成される B_{dR} の部分環を B_{cris} とおきます. 定義から B_{cris} が群 G_K の作用する $K_0 = W(k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ 代数となります. p 乗準同型 $F_{\mathcal{R}} \colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ の誘導する準同型 $W(\mathcal{R}) \to W(\mathcal{R})$ は, 環 B_{dR} の自己準同型 $\varphi \colon B_{\mathrm{cris}} \to B_{\mathrm{cris}}$ を誘導します.

3.5.4. G_K の E 線形表現 V に対し, $B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ に G_K を対角的に作用させたものの G_K 不変部分 $(B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ を $D_{\mathrm{cris}}(V)$ とおきます. B_{cris} の G_K 不変部分が K_0 に等しいことから, $D_{\mathrm{cris}}(V)$ は $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ 加群となります. $D_{\mathrm{cris}}(V)$ が階数 $\dim_E V$ の自由 $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ 加群となるとき, V をクリスタリン表現であるといいます.

4. Fontaine の予想 (Colmez-Fontaine の定理)

前節に引き続き素数 p を固定し, K および E を p 進体とします. この節では, 圏 $\mathrm{Rep}_E^{\mathrm{cris}} G_K$ が, 弱許容的なフィルター付き φ 加群の圏と圏同値であるという, Fontaine [F2] が予想し, Colmez-Fontaine [CF] によって最初に証明された予想について説明します.

4.1. 一般に A を環, M_1, M_2 を左 A 加群, $\alpha : A \to A$ を環 A の自己準同型とするとき, 写像 $f : M_1 \to M_2$ が α 半線形であるとは, f がアーベル群としての準同型であり, かつ任意の $m \in M_1$ および任意の $a \in A$ に対し等式 $f(ax) = \alpha(a)f(x)$ が成り立つことをいいます.

4.2. p 乗写像 $F_k : k \to k$ の誘導する準同型 $W(k) \to W(k)$ および $K_0 \to K_0$ を σ と書きます.

K_0 上の E の作用つきフィルター付き φ 加群とは, 次の条件を満たす 3 つ組 $(D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K)$ のことをいいます:

- D は階数有限の自由 $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ 加群である,
- $\varphi : D \to D$ は $\sigma \otimes \mathrm{id}_E$ 半線形な全単射である,
- $\mathrm{Fil}^\bullet D_K = (\mathrm{Fil}^i D_K)_{i \in \mathbb{Z}}$ は $D_K = D \otimes_{K_0} K$ の, 部分 $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ 加群による減少フィルトレーションであって, 分離的かつ D_K を覆い尽くす.

記号の濫用により φ, $\mathrm{Fil}^\bullet D_K$ を省略し, 3 つ組 $(D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K)$ のことをしばしば D と書きます.

フィルター付き φ 加群 $D = (D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K)$ に対し, 有理数 $t_N(D), t_H(D) \in \mathbb{Q}$ を次で定めます: D の $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ 加群としての基底 $e_1, \ldots, e_d$ を取り, $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ 係数の d 次正方行列 P を $(\varphi(e_0), \ldots, \varphi(e_d)) = (e_1, \ldots, e_d)P$ によって定めます. 行列式 $\det(P) \in K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ の, $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E/E$ に関するノルム $N_{K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E/E}(\det(P))$ を考えます. $N_{K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E/E}(\det(P))$ は基底 $e_1, \ldots, e_d$ の取り方に依存しますが, $v_p(N_{K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E/E}(\det(P)))$ は基底 $e_1, \ldots, e_d$ の取り方に依存しません. $t_N(D) = v_{K_0}(N_{K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E/E} \det(P))$ とおきます. また $t_H(D) = \frac{1}{[K:K_0]} \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim_E(\mathrm{Fil}^i D_K / \mathrm{Fil}^{i+1} D_K)$ とおきます.

4.3. K_0 上のフィルター付き φ 加群 $(D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet, D_K)$ が弱許容的であるとは, 等式 $t_N(D) = t_H(D)$ が成り立ち, かつ φ の作用で安定な D の任意の部分 $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ 加群 D' に対し, 不等式 $t_N(D') \geq t_H(D')$ が成り立つことをいいます.

4.4. 注. ここで与えた $t_N(D)$, $t_H(D)$ は通常のものと正規化の仕方が異なりますのでご注意ください (通常の $t_N(D)$, $t_H(D)$ は E が $\mathbb{Q}_p$ 上有限次でないと定義できないので上記の定義を採用しました). また D が弱許容的であることの定義は Fontaine [F3] によるものと一見異なりますが, [BM, Proposition 3.1.1.5] により上の定義と Fontaine [F3] による定義は同値であることがわかります.

4.5. $B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ の $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間としての自己準同型 $\varphi \otimes \mathrm{id}_V$ は, σ 線形な写像 $D_{\mathrm{cris}}(V) \to D_{\mathrm{cris}}(V)$ を引き起こします. この写像を $\varphi : D_{\mathrm{cris}}(V) \to D_{\mathrm{cris}}(V)$ と書きます.

V がクリスタリン表現であれば, V は de Rham 表現であり, 包含写像 $B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \hookrightarrow B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ が, 同型 $K \otimes_{K_0} D_{\mathrm{cris}}(V) \cong D_{\mathrm{dR}}(V)$ を誘導します. $D_{\mathrm{dR}}(V)$ には減少フィルトレーション $\mathrm{Fil}^\bullet D_{\mathrm{dR}}(V)$ が入っていたので, これによって $D_{\mathrm{cris}}(V)$ に K_0 上の E の作用つきのフィルター付き φ 加群の構造が自然に入ります. さらにこの K_0 上の E の作用つきのフィルター付き φ 加群は弱許容的であることが知られています.

4.6. Colmez-Fontaine の定理. G_K の E 線形クリスタリン表現 V に K_0 上の E の作用つきのフィルター付き φ 加群を対応させる関手は, 圏 $\mathrm{Rep}_E^{\mathrm{cris}} G_K$ と弱許容的な K_0 上の E の作用つきのフィルター付き φ 加群のなす圏との間の圏同値を与える.

この定理は始め Fontaine [F2] が予想し, Fontaine-Colmez [CF] が最初に証明を与えました. 現在ではいろいろな証明が知られています ([C2], [F4], [K], [Berg3], [FF]).

5. (φ, Γ) 加群の理論

5.1. 記号の準備. $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}$ を $\mathbb{Z}_p$ 係数の 1 変数形式的 Laurent 巾級数環 $\mathbb{Z}_p((\pi)) = \mathbb{Z}_p[[\pi]][1/\pi]$ の p 進完備化とします. $\widetilde{\mathbb{E}}$ を $\mathcal{R}$ の分数体とします. $\widetilde{\mathbb{E}}$ は標数 p の代数閉体となります. $\sum_{n>>-\infty} c_n \pi^n$ を $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}$ の元とすると, 無限和 $\sum_{n>>-\infty} c_n([\varepsilon]-1)^n$ は $W(\widetilde{\mathbb{E}})$ の元として意味を持ちます. $\sum_{n>>-\infty} c_n \pi^n$ を $\sum_{n>>-\infty} c_n([\varepsilon]-1)^n$ に送ることにより $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}$ を $W(\widetilde{\mathbb{E}})$ の部分環とみなします. $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}$ は p を素元とする完備離散付値環となります. $\mathbb{B}_{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}[1/p] \subset \mathrm{Frac}\, W(\widetilde{\mathbb{E}})$ とおき, $\mathrm{Frac}\, W(\widetilde{\mathbb{E}})$ における $\mathbb{B}_{\mathbb{Q}_p}$ の最大不分岐拡大体を $\mathbb{B}$, その整数環を $\mathbb{A}$ とおきます.

K にすべての $n \geq 1$ に対する ζ_{p^n} を付け加えて得られる $\overline{K}$ の部分体を $K(\mu_{p^\infty})$ とおきます. $K(\mu_{p^\infty})$ は K の Galois 拡大となります. $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K(\mu_{p^\infty}))$, $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)$ とおきます.

p 乗準同型 $F_{\widetilde{\mathbb{E}}} : \widetilde{\mathbb{E}} \to \widetilde{\mathbb{E}}$ の誘導する自己準同型 $W(\widetilde{\mathbb{E}}) \to W(\widetilde{\mathbb{E}})$ および $\mathrm{Frac}\, W(\widetilde{\mathbb{E}}) \to \mathrm{Frac}\, W(\widetilde{\mathbb{E}})$ を φ で表わします. $\mathrm{Frac}\, W(\widetilde{\mathbb{E}})$ の部分環 $\mathbb{B}$ および $\mathbb{A}$ は φ および G_K の作用で安定となります.

$\mathbb{A}_K = \mathbb{A}^{H_K}$, $\mathbb{B}_K = \mathbb{B}^{H_K}$ とおきます. $\mathbb{A}_K$, $\mathbb{B}_K$ は φ の作用で安定で, また群 G_K が $G_K/H_K \equiv \Gamma_K$ を通じて作用します.

5.2. エタール (φ, Γ) 加群. k_E を E の剰余体とし, $\mathbb{A}_{K,\mathcal{O}_E} = \mathbb{A}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E$, $\mathbb{B}_{K,E} = \mathbb{B} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$, $\mathbb{E}_{K,k_E} = \mathbb{A}_{K,\mathcal{O}_E} \otimes_{\mathcal{O}_E} k_E$ とおきます. A を $\mathbb{A}_{K,\mathcal{O}_E}$, $\mathbb{B}_{K,E}$, $\mathbb{E}_{K,k_E}$ のいずれかとします. A 上の自由エタール (φ, Γ) 加群とは, 有限生成自由 A 加群 D であって, φ 半線形な自己準同型 $\varphi_D : D \to D$ が与えられ, さらに各 $\gamma \in \Gamma_K$ に対し φ の作用と可換な γ 半線形な自己準同型 $\gamma_D : D \to D$ が与えられ, 次の条件を満たすことを言います:

- φ_D の誘導する A 線形写像 $D \otimes_{A,\varphi} A \to D$ は全単射である,
- $A = \mathbb{B}_{K,E}$ のときは, さらに D の $\mathbb{A}_{K,\mathcal{O}_E}$ 格子 D' であって φ_D の作用で安定なものが存在して, φ_D の誘導する $\mathbb{A}_{K,\mathcal{O}_E}$ 線形写像 $D' \otimes_{\mathbb{A}_{K,\mathcal{O}_E},\varphi} \mathbb{A}_{K,\mathcal{O}_E} \to D'$ が全単射であると仮定する,
- $\gamma = 1$ のとき $1_D = \mathrm{id}_D$ である,
- $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_K$ のとき $(\gamma_1\gamma_2)_D = (\gamma_1)_D \circ (\gamma_2)_D$ である,

5.3. Fontaine [F1] の定理. $T \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_E}(G_K)$ に対し $D(T) = (\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T)^{H_K}$ とおくと, $D(T)$ は $\mathbb{A}_{K,\mathcal{O}_E}$ 上の自由エタール (φ, Γ) 加群となる. T を $D(T)$ に送る関手は, 圏 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_E}(G_K)$ と $\mathbb{A}_{K,\mathcal{O}_E}$ 上の自由エタール (φ, Γ) 加群の圏との間の圏同値を与える. 同様にして定義される関手が, 圏 $\mathrm{Rep}_E(G_K)$ と $\mathbb{B}_{K,E}$ 上の自由エタール (φ, Γ) 加群の圏との間の圏同値, および圏 $\mathrm{Rep}_{k_E}(G_K)$ と $\mathbb{E}_{K,k_E}$ 上の自由エタール (φ, Γ) 加群の圏との間の圏同値を与えます.

Part 2. 主結果

6. モチベーション

有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体を (有限次) 代数体と呼びます. 代数体 F の絶対ガロア群 $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ はとても重要な群であると思われています. 特に Langlands の予想との関連から G_F の p 進表現についてよく知ることが非常に重要です. Fermat の大定理の証明の際に, Wiles および Taylor-Wiles は Galois 表現の変形空間のモジュライを研究し, Taylor-Wiles 系などとよばれる手法を開発しました. この手法は後に Kisin らによって改良されました. この手法を使いこなすためには, p 進体 K, E について, E の整数環を $\mathcal{O}_E$ とおき, さらに剰余体を k_E とおくとき, G_K の k_E 係数の連続表現が, どのような E 係数のクリスタリン表現に持ち上がりうるか, という問いについて詳しく調べることが重要になります.

この原稿の主結果は, $K = \mathbb{Q}_p$ かつ表現が 2 次元の場合に, この問いに対し部分的な解答を与えるものです.

7. 設定と記号の準備

p を素数とします.

7.1. $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ をひとつ固定し, $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ をその整数環, $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ を $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$ の極大イデアルとします. 剰余体 $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}/\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ を $\overline{\mathbb{F}}_p$ で表わします. $v_p : \overline{\mathbb{Q}}_p^\times \to \mathbb{Q}$ 指数付値であって, $v_p(p) = 1$ を満たすものとします.

7.2. $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の 2 次元クリスタリン表現に関する記号. 整数 $k \geq 2$, および $a_p \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$, $u \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^\times$ に対し, $V_{k,a_p,u}$ を $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 係数 2 次元クリスタリン表現であって, 次の性質を満たすものとします:

- V の Hodge-Tate 重さが $\{0, k-1\}$,
- $D_{\mathrm{cris}}(V)$ への φ の作用の特性多項式が $1 - a_pT + up^{k-1}T^2$ に等しい.

先ほど述べた定理 4.6 を使うと, $v_p(a_p) > 0$ ならばこのような $V_{k,a_p,u}$ は同型を除いて一意的であることが分かります. $v_p(a_p) = 0$ のときはこのような $V_{k,a_p,u}$ の同型類は一意的ではありませんが, $V_{k,a_p,u}$ は可約な表現となり, $V_{k,a_p,u}$ の半単純化は同型類を除いて一意的であることが, やはり先ほど述べた定理 4.6 の帰結として分かります.

図式 (2.1) において, 関手 $- \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ が本質的に全射であることから, $V_{k,a_p,u}$ の部分 $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ 加群 $T_{k,a_p,u}$ であって $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ 加群として階数 $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} V$ の自由加群となり, かつ $G_{\mathbb{Q}_p}$ の作用で安定なものが存在します. $G_{\mathbb{Q}_p}$ の $\overline{\mathbb{F}}_p$ 線形表現 $T_{k,a_p,u} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}} \overline{\mathbb{F}}_p$ の半単純化を $\overline{V}_{k,a_p,u}$ とおきます. $\overline{V}_{k,a_p,u}$ は 3 つ組 $(k-1, a_p, u)$ から同

型を除いて一意的に定まり, $V_{k,a_p,u}$ および $T_{k,a_p,u}$ の取り方に依存しません. 既存の文献との整合性をよくするため, 以下では $\overline{V}_{k,a_p,u}$ ではなく, その双対である $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ を考えます.

7.3. 集合 $S_{\overline{u},\ell}$.

7.3.1. 法 p 指標の記号. $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$ に対し, 指標 $\mu_a : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ であって, $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}/\mathbb{Q}_p)$ を経由し, $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{unr}}/\mathbb{Q}_p)$ の位相的生成元である数論的 Frobenius を a に送る不分岐指標を表わすことにします, また, $\omega : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{F}_p^\times \subset \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ を法 p 円分指標とします,

7.3.2. 集合 $S_{\overline{u},\ell}$. $k \geq 2$ を整数とします. $k-1$ を $k-1 = i(p-1)+\ell$ (ここで i, ℓ は整数で $1 \leq \ell \leq p-1$ を満たす) の形に書きます. 定義から $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ は $G_{\mathbb{Q}_p}$ の $\overline{\mathbb{F}}_p$ 線形な 2 次元半単純表現です. さらに, $u \in \mathcal{O}^\times_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ の $\overline{\mathbb{F}}_p$ における像を $\overline{u}$ とすると, $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ の 行列式指標が $\mu_{\overline{u}}\omega^\ell$ に等しいことが容易にわかります.

そこで $G_{\mathbb{Q}_p}$ の $\overline{\mathbb{F}}_p$ 線形な 2 次元半単純表現であって行列式指標が $\mu_{\overline{u}}\omega^\ell$ に等しいものの同型類全体の集合を $S_{\overline{u},\ell}$ とおきます. $k \geq 2$ および $u \in \mathcal{O}^\times_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ を固定したとき, $a_p \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ に対し $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ の同型類を対応させる写像 $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \to S_{\overline{u},\ell}$ を記述するというのが, この原稿における主要な問題です.

群 $P_{\mathbb{Q}_p}$ が $G_{\mathbb{Q}_p}$ の副 p 正規部分群であることを用いると, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の $\overline{\mathbb{F}}_p$ 線形な半単純表現への $G_{\mathbb{Q}_p}$ の作用は, 商 $G_{\mathbb{Q}_p}/P_{\mathbb{Q}_p}$ を経由することが分かります. この商 $G_{\mathbb{Q}_p}/P_{\mathbb{Q}_p}$ が分かりやすい構造をしていることから集合 $S_{\overline{u},\ell}$ を具体的に記述することができ, 2 つ後の段落のようになります.

7.3.3. 指標 $\overline{\varepsilon}_2$. $S_{\overline{u},\ell}$ の記述を与えるために, 少し記号を準備します. $\mathbb{Q}_{p^2} \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の不分岐 2 次拡大とします, $G_{\mathbb{Q}_{p^2}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_{p^2})$ とおき, $\varepsilon_2 : G_{\mathbb{Q}_{p^2}} \to \mathbb{Q}_{p^2}^\times$ で, 素元 $p \in \mathbb{Q}_{p^2}$ に対応する $G_{\mathbb{Q}_{p^2}}$ の Lubin-Tate 指標を表わします. $\overline{\varepsilon}_2 : G_{\mathbb{Q}_{p^2}} \to \mathbb{F}_{p^2}^\times \subset \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ を ε_2 の法 p 還元とします.

7.3.4. 2 次元法 p 表現の記号. $\overline{u} \in \overline{\mathbb{F}}$, $\ell \in \mathbb{Z}$ とします. 以下の記号を用います:

- $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, $d \in \mathbb{Z}$ に対し, $R_{\overline{u},\ell}(d;\alpha) := \mu_\alpha\omega^d \oplus \mu_{\overline{u}\alpha^{-1}}\omega^{\ell-d}$ とおく,
- $-\overline{u}$ の平方根 $\sqrt{-\overline{u}} \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ を選び, $I_{\overline{u},\ell}(d) := \mu_{\sqrt{-\overline{u}}}\omega^{\ell-d} \otimes \mathrm{Ind}^{\mathbb{Q}_p}_{\mathbb{Q}_{p^2}} \overline{\varepsilon}_2^{2d-\ell}$ とおく.

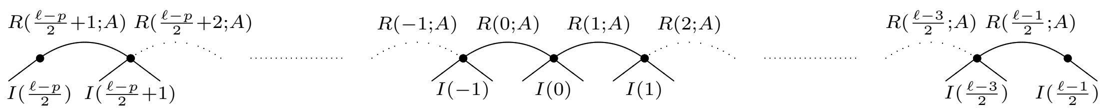
$R_{\overline{u},\ell}(d;A)$, $I_{\overline{u},\ell}(d)$ の同型類は $S_{\overline{u},\ell}$ 属します.

これらの表現は次の性質を持ちます:

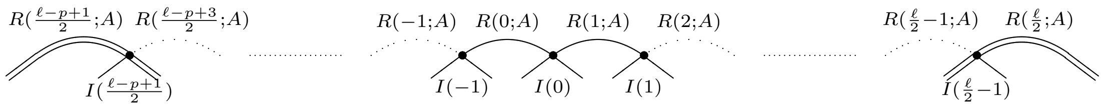
- $R_{\overline{u},\ell}(d;A) \cong R_{\overline{u},\ell}(d+p-1;A)$,
- $R_{\overline{u},\ell}(d;A) \cong R_{\overline{u},\ell}(\ell-d;\overline{u}A^{-1})$,
- $R_{\overline{u},\ell}(d;A) \cong R_{\overline{u},\ell}(d';A')$ ならば $A = A'$ かつ $d \equiv d' \mod p-1$ であるか, または $AA' = u$ かつ $d+d' \equiv \ell \mod p-1$ が成り立つ,
- $S_{\overline{u},\ell}$ の元であって可約な任意のものは, ある d, A に対する $R_{\overline{u},\ell}(d;A)$ と同型である.
- $I_{\overline{u},\ell}(d) \cong I_{\overline{u},\ell}(d+p+1)$,
- $I_{\overline{u},\ell}(d) \cong I_{\overline{u},\ell}(\ell-d)$,
- $I_{\overline{u},\ell}(d) \cong I_{\overline{u},\ell}(d')$ ならば $d \equiv d' \mod p+1$ または $d+d' \equiv \ell \mod p+1$ が成り立つ,
- ℓ が奇数ならば任意の整数 d について $I_{\overline{u},\ell}(d)$ は既約である,
- ℓ が偶数, かつ $2d \neq \ell \mod p+1$ であれば $I_{\overline{u},\ell}(d)$ は既約である.
- $S_{\overline{u},\ell}$ の元であって, 既約な任意のものは, ある d に対する $I_{\overline{u},\ell}(d)$ と同型である.

7.3.5. $p \neq 2$ のとき, $S_{\overline{u},\ell}$ の元を, 以下のように $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の既約でない曲線の $\overline{\mathbb{F}}_p$ 有理点とみなすことができます.

(1) ℓ が奇数のとき



(2) ℓ が偶数のとき (2 重線のついた部分は A 全体の空間から $S_{\overline{u},\ell}$ への射が Zariski 局所的に同型でなく 2 対 1 であることを意味します)



ただし添え字の $\overline{u}$, ℓ を省略し, $R_{\overline{u},\ell}(d;A)$, $I_{\overline{u},\ell}(d)$ をそれぞれ $R(d;A)$, $I(d)$ と書きました. 上の曲線は, Tate 周期が p^{p-1} の $\mathrm{Frac}\, W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ 上の Tate 楕円曲線の極小正則モデルの特殊ファイバーを, x を $[\overline{u}]p^{\ell}x^{-1}$ にうつす involution で割った商と同じ形をしています.

$\frac{\ell-p+1}{2} \leq d \leq \frac{\ell}{2}-1$ のときに $R_{\overline{u},\ell}(d;A)$ が属する成分と $R_{\overline{u},\ell}(d+1;A)$ が属する成分との間に $I_{\overline{u},\ell}(d)$ を配置する必然性はないように思われるかもしれませんが, この配置にすると, 少なくとも本稿で計算した範囲内では, a_p に $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ を対応させる写像との整合性がよくなります.

8. 予想

8.1. $k \geq 2$ を整数とします. $k-1$ を $k-1 = i(p-1)+\ell$ (ここで i, ℓ は整数で $1 \leq \ell \leq p-1$ を満たすもの) の形に書きます. さらに $p+\ell \geq 2i+2$ であると仮定します (この仮定は特に $i \leq (p-1)/2$ であれば満たされます). $a_p \in \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$, $u \in \mathcal{O}^{\times}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ とします. $V_{k,a_p,u}$ の法 $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ 還元の半単純化を $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ で表わします.

8.2. 記号. 有理数または ∞ となる $A_{k,d}$ および $C_{k,d}$ を

$$A_{k,d} = \begin{cases} \binom{i}{d}^{-1}\binom{\ell-d}{d}, & d \leq i \text{ のとき}, \\ \infty & d > i \text{ のとき}, \end{cases}$$

および

$$C_{k,d} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\ell}}{p} \cdot \left(\frac{i-1}{i} \cdot \binom{i-2}{d}\binom{d}{\ell-d-2}\right)^*, & \text{if } d < \ell-1, \\ p^{-1/2}\binom{i-2}{d}^*, & d = \ell-1 \text{ のとき}, \\ (-1)^d \left(\binom{i-1}{d}\binom{2d-\ell}{d}^{-1}\right)^*, & d \geq \ell \text{ のとき} \end{cases}$$

で定めます. 但しここで

$$\left(\frac{i-1}{i} \cdot \binom{i-2}{d}\binom{d}{\ell-d-2}\right)^* = \begin{cases} 0, & i \leq 1 \text{ または } d < \ell-d-2 \text{ のとき} \\ \infty, & d \geq \ell-d-2 \text{ かつ } 0 \leq i-2 < d \text{ のとき}, \\ -\frac{d(i-1)}{i}\binom{i-2}{d}\binom{d}{\ell-d-2}, & 1 < \ell < 2i-1 \text{ かつ } \ell \text{ が奇数かつ } d = \frac{\ell-1}{2} \text{ のとき}, \\ \frac{i-1}{i}\binom{i-2}{d}\binom{d}{\ell-d-2}, & \text{それ以外のとき}, \end{cases}$$

$$\binom{i-2}{d}^* = \begin{cases} \infty, & 0 \leq i-2 \leq d \text{ のとき}, \\ \binom{i-2}{d}, & \text{それ以外のとき}, \end{cases}$$

$$\left(\binom{i-1}{d}\binom{2d-\ell}{d}^{-1}\right)^* = \begin{cases} \infty, 0 \leq i-1 < d & \text{のとき}, \\ \binom{i-1}{d}\binom{2d-\ell}{d}^{-1}, & \text{それ以外のとき}, \end{cases}$$

とおきました. さらに

$$b = b_{k,a_p,u} = A_{k,d}a_p + \frac{p^{\ell}C_{k,d}u}{a_p}$$

とおきます (但し ∞ と ∞ の和は ∞ であると約束します). $b \in E \cup \{\infty\}$ となります.

8.3. 予想 (山下剛氏との共同研究). $p+\ell \geq 2i+2$ であると仮定する. u の法 $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ 還元を $\overline{u} \in \overline{\mathbb{F}}_p$ で表わす. $v = v_p(a_p)$, $d = \lfloor v \rfloor$ とおく. $b \neq \infty$ のとき, $1 - bT + ip^{\ell}T^2$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ における根のうち, p 進付置が最小のもののひとつを α とおく.

(1) $b = \infty$ のとき, $\overline{V}^*_{k,a_p,u} \cong I_{\overline{u},\ell}(i)$ である.

(2) $b \neq \infty$ かつ $v_p(\alpha) \in \mathbb{Z}$ のとき, $\alpha = \alpha_0 p^{v_p(\alpha)}$ とおくと, $\overline{V}^*_{k,a_p,u} \cong R_{\overline{u},\ell}(v_p(\alpha), \alpha_0)$ である.

(3) $b \neq \infty$ かつ $v_p(\alpha) \notin \mathbb{Z}$ のとき, $\overline{V}^*_{k,a_p,u} \cong I_{\overline{u},\ell}(\lfloor v_p(\alpha) \rfloor)$ である.

9. 結果

9.1. 定義.

9.2. 先行する結果.

$\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ は以下の場合に計算されていました. $\ell+p\geq 2i+2$ の場合は, 以下の場合の計算は予想 8.3 の主張と整合的になっています:

- $v=0$ の場合. この場合は $D_{\mathrm{cris}}(V_{k,a_p,u})$ が可約となることから $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ を簡単に計算できます. $v=0$ かつ $V_{k,a_p,u}$ が大域的表現から来る, つまり重さ k の尖点的楕円保型形式に伴う $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 線形な $G_{\mathbb{Q}}$ の表現を, p での分解群に制限することによって得られる表現の場合は, $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ は Deligne [D] によって計算されていたようです.
- $k\leq p-1$ の場合は, Fontaine-Laffaille 理論 [FL] を用いると $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ が計算できます.
- $k\leq 2p$ の場合は, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ についての p 進局所 Langlands 対応 (と法 p 局所 Langlands 対応との整合性) を用いる Berger-Breuil [BB] の方法と, Wach 加群の理論を用いる Berger-Li-Zhu [BLZ] の方法を組み合わせることによって $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ が計算されています.
- $k=2p+1$ の場合も, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ についての p 進局所 Langlands 対応を用いる方法と Wach 加群の理論を用いる Berger-Li-Zhu [BLZ] の方法を組み合わせることによって $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ が計算されています. 計算が最も複雑になる $0<v<1$ の場合は [Berg3] に結果だけ書かれており, それによると Breuil が計算したとのことです. この場合の計算は Buzzard-Gee [BG1], [BG2] の計算した場合に含まれるため, [BG1], [BG2] に詳細が与えられていることになります.
- $k\geq 2$ が一般で v が十分大きいとき (具体的には v が $(k-1)/(p-1)$ 程度の大きさのとある値より大きいとき) Wach 加群を用いる方法で, Berger-Li-Zhu [BLZ] が $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ を計算しています. [BLZ] の方法は Vienney [V] によって少し精密化されました.
- $0<v<1$ の場合は, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ についての p 進局所 Langlands 対応を用いる方法を用いて Buzzard-Gee [BG1], [BG2] が $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ を計算しています.

9.3. 定理 (山下剛氏との共同研究).

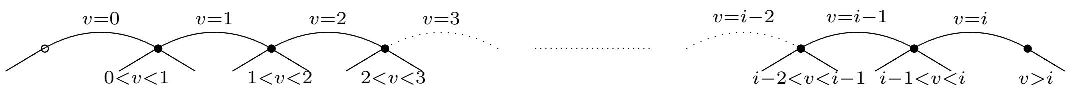
予想 8.3 は, 次の条件が 3 条件がすべて成立する場合を除いて正しい:

- $\ell<i$.
- v が非整数,
- $v\leq(\ell-1)/2$

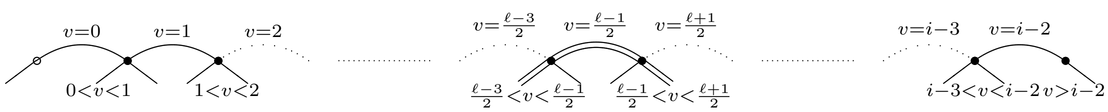
9.4. 注.

証明は Wach 加群を具体的に構成することによって行いますが, 証明の手法を用いてアフィノイド上に Wach 加群の族が構成できます. これらのアフィノイドを貼り合わせることで, (k,u) を固定したときの a_p 全体の集合 $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ (を rigid 解析空間とみなしたもの) の許容被覆ができます. 許容被覆をうまくとると, 対応する形式的モデルは, $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ を検知する最小の準安定モデルとなっています. $p\neq 2$ のときこの形式的モデルの還元は次の形をしています:

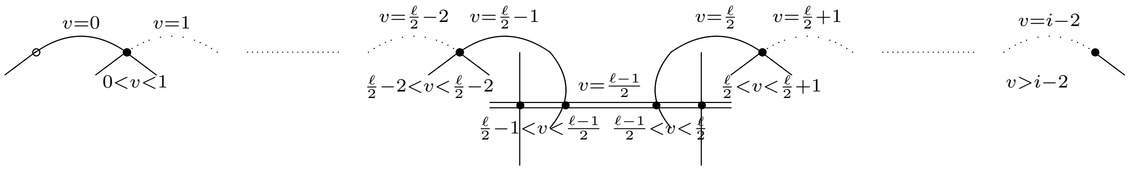
(1) $\ell\geq 2i$ のときは, reduction は次の形をしています:



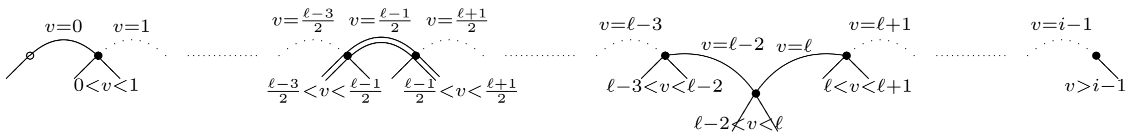
(2) $i\leq\ell<2i$ かつ ℓ が奇数のときは, reduction は次の形をしています (2 重線のついた部分は $S_{\overline{u},\ell}$ への射が Zariski 局所的に同型でないことを意味します):



(3) $i \leq \ell < 2i$ かつ ℓ が偶数のときは, reduction は次の形をしています:



(4) $i < \ell$ かつ ℓ が奇数のときは, $v \leq \frac{\ell-1}{2}$ のときにまだ Wach 加群が構成できておらず部分的な結果しか得られていませんが, すべてのこの個所について Wach 加群が構成できると reduction は次の形になると予想されます:



(5) $i < \ell$ かつ ℓ が偶数のときも, $v \leq \frac{\ell-1}{2}$ のときにまだ Wach 加群が構成できておらず部分的な結果しか得られていませんが, すべてのこの個所について Wach 加群が構成できると reduction は, (4) の左半分の (2) と同じ形の部分を (3) の形のものに置き換えた形になると予想されます (紙面に入りきらないため図は省略します).

Part 3. 証明の大まかな方針

以下では証明の方針について非常に大雑把に述べます. 証明の詳しいことについては, 今後どこかに書く機会があると思われますので省略させていただきます.

まず次節で Wach 加群についての Berger [Berg1] の理論について復習し, その後, 証明で用いられる, 新しく導入した手法について簡単に説明します.

10. Wach 加群

証明は Wach 加群というものを用いて行います. Wach 加群を用いると, K が $\mathbb{Q}_p$ の有限次不分岐拡大のとき, $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_E} G_K$ の対象 T であって $T \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ がクリスタリンかつ Hodge-Tate 重さが正または 0 の整数からなるもののなす $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_E} G_K$ の充満部分圏を記述できます. 以下では簡単のため $K = \mathbb{Q}_p$ の場合に限って Wach 加群について説明をします.

まずは Wach 加群の説明をするため, 続くいくつかの段落で記号を準備します.

10.1. 空間 W. $\mathbb{Z}_p(1) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \overline{\mathbb{Q}}_p^\times)$ とおきます. $\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_E$ 上の形式的スキーム $\mathfrak{X}$ に対し, アーベル群の連続準同型 $\chi : \mathbb{Z}_p(1) \to \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_\mathfrak{X})$ であって, 任意の $s \in \mathbb{Z}_p(1)$ に対し $\chi(s) - 1$ が位相的にべき零となるもの全体を $W(\mathfrak{X})$ とおきます. 関手 $\mathfrak{X} \mapsto W(\mathfrak{X})$ を表現する $\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_E$ 上の形式的スキームを W とおきます. W は $\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_E$ 上の形式的スキームの圏における群対象となります. $\mathbb{Z}_p(1)$ の位相的生成元をひとつ固定すると, $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_E$ 上の乗法群スキーム $\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_E}$ の, 特殊ファイバーの単位元 $\mathrm{Spec}\,k_E \hookrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_E}$ に沿った完備化と W との間の同型が作れます.

W の形式的群スキームとしての自己準同型全体を $\mathrm{End}(W)$ とおきます. $a \in \mathbb{Z}_p$ に, $\chi \in W(\mathfrak{X})$ を $\chi^a \in W(\chi)$ に送る $\mathrm{End}(W)$ の元を対応させることによって, 乗法モノイド $\mathbb{Z}_p$ から $\mathrm{End}(W)$ への準同型が作れますが, この準同型は同型になります. 構造射 $W \to \mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_E$ と W の単位元セクション $\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}_E \hookrightarrow W$ との合成を $1_W : W \to W$ で表わします. $M = \mathrm{End}(W) \setminus \{1\}$ とおきます.

10.2. 空間 $\widetilde{W}$. W の座標環を $\mathcal{O}(W) = \Gamma(W, \mathcal{O}_W)$ で表わし, $\widetilde{W} = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}(W)$ とおきます. $m : W \to W$ の引き起こす $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_E$ 上のスキームの射 $\widetilde{W} \to \widetilde{W}$ を $\widetilde{m}$ で表わします. W の単位元セクション $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_E \to W$ の与える射 $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_E \to \widetilde{W}$ を通じて, $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_E$ を $\widetilde{W}$ の閉部分形式的スキームとみなしたもののことを $1_{\widetilde{W}}$ とおきます. $m \in M$ に対し, $\widetilde{m} : \widetilde{W} \to \widetilde{W}$ の核 $\widetilde{W}[m] = 1_{\widetilde{W}} \times_{\widetilde{W},m} \widetilde{W}$ とおきます. 埋め込み $\widetilde{W}[m] \setminus 1_{\widetilde{W}} \hookrightarrow \widetilde{W}$ のスキーム論的閉包を $\widetilde{W}[m]^*$ とおきます.

10.3. $[\widetilde{W}/M]$ **上のベクトル束.** 一般的な用語ではないのですが, $[\widetilde{W}/M]$ 上のベクトル束の概念を, 以下のように定義します: N を有限生成自由 $\mathcal{O}(W)$ 加群とする. 各 $m \in M$ に対し, $\mathcal{O}(W)$ 線形写像 $f_m : \widetilde{m}^* M \to M$ が与えられていて, $f_{\mathrm{id}_M} = \mathrm{id}_N$ および $f_{m_1 m_2} = f_{m_1} \circ \widetilde{m}_1^*(f_{m_2})$ を満たしているとき, N を $[\widetilde{W}/M]$ 上のベクトル束と呼ぶ.

10.4. Wach 加群. $\mathcal{O}_E$ 上の Wach 加群とは, $[\widetilde{W}/M]$ 上のベクトル束であって, 次の 2 条件を満たすもののことをいいます:

- N の $1_{\widetilde{W}}$ への制限に $M^\times$ は自明に作用する.
- 任意の $m \in M$ に対し, $\mathcal{O}(W)$ 線形写像 $f_m : \widetilde{m}^* N \to N$ の余核は $\widetilde{W}[m]^*$ に台を持つ.

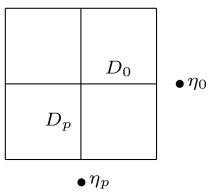
$\mathcal{O}_E$ 上の Wach 加群のなす, $[\widetilde{W}/M]$ 上のベクトル束のなす圏の充満部分圏を $\mathrm{Wach}_{\mathcal{O}_E}$ で表わします.

10.5. Wach 加群の Hodge フィルトレーション. 同型 $\mathbb{Z}_p \cong \mathrm{End}(W)$ のもとで $p \in \mathbb{Z}_p$ に対応する M の元を $p \in M$ とおきます. p の誘導する環 $\mathcal{O}(W)$ の自己準同型を φ で表わします. Wach 加群 N に対し, $f_p : \widetilde{p}^* N \to N$ を φ_N で表わします. 閉部分スキーム $\widetilde{W}[p]^* \subset \widetilde{W}$ に対応する $\mathcal{O}(W)$ のイデアルを I_p とおきます. 整数 $i \geq 0$ に対し N の減少フィルトレーション $\mathrm{Fil}^i N$ を

$$\mathrm{Fil}^i N = \{ y \in N \mid \varphi_N(1 \otimes y) \in I_p^i N \}$$

で定めます.

10.6. 空間 $\widetilde{W}$ 上の 2 つの因子. W の単位元 $\mathrm{Spf}\, \mathcal{O}_E \to W$ は閉埋め込み $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_E \to \widetilde{W}$ を与えます. この像を $D_0 \subset \widetilde{W}$ とおき, D_0 の生成点を η_0 とおきます. また $\widetilde{W}$ の特殊ファイバー $\widetilde{W} \times_{\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_E} \mathrm{Spec}\, k_E$ を D_p とおき, D_p の生成点を η_p とおきます. 図示すると下の図のようになります.



環 $\mathcal{O}(W)$ は, $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E$ の部分環 $\mathcal{O}_E[[[\epsilon] - 1]]$ と自然に同型になります. この同型によって $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E$ を η_p における $\widetilde{W}$ の局所環の完備化と同一視します.

10.7. Berger の圏同値. Wach [W], Colmez [C1] の結果を用いて, Berger [Berg1] は次のことを証明しました: 圏 $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}} G_{\mathbb{Q}_p}$ の充満部分圏であって, $T \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ がクリスタリンかつ Hodge-Tate 重さが非負となるような $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}} G_{\mathbb{Q}_p}$ の対象 T 全体のなすものを $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{cris},+} G_{\mathbb{Q}_p}$ とおくと, 圏同値 $N : \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{cris},+} G_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Wach}_{\mathcal{O}_E}$ であって, 次の条件を満たすものが存在する:

- $N(T)$ の η_p での局所化の完備化が T に付随する (φ, Γ) 加群 $D(T)$ と同型である,
- $N(T)$ の η_0 への引き戻しに $N(T)$ から誘導される φ およびフィルトレーションを入れたものが, $\mathbb{Q}_p$ 上の E の作用つきフィルター付き φ 加群として $D_{\mathrm{cris}}(T \otimes_{\mathcal{O}_E} E)$ と同型である.

11. 新しく導入した手法

Berger の圏同値を用いると, η_0 への引き戻しが $D_{\mathrm{cris}}(V_{k,a_p,u})$ と同型になるような Wach 加群 $N_{k,a_p,u}$ をひとつ構成すれば, $N_{k,a_p,u}$ の η_p への引き戻しをとることによって $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ が計算できます. ですがこのような $N_{k,a_p,u}$ を構成することは特殊な場合を除いて容易ではありません. 以下では, $N_{k,a_p,u}$ を構成するために今回新しく導入したいくつかの手法について簡単に説明します.

11.1. $M^\times_{\mathrm{tors}}$ **による降下および元** x**.** モノイド M の可逆元全体を $M^\times$ とおき, $M^\times$ に属する位数有限の元全体を $M^\times_{\mathrm{tors}}$ とおきます. $M^\times_{\mathrm{tors}}$ は位数 $p-1$ の巡回群になります.

$\mathcal{O}(W)$ の $M^\times_{\mathrm{tors}}$ 不変部分を R とおきます. 降下の議論により, $[\widetilde{W}/M]$ 上のベクトル束を考えることと $[\mathrm{Spec}\, R/(M/M^\times_{\mathrm{tors}})]$ 上のベクトル束を考えることとは同等になります. R の元 x であって, $R = \mathcal{O}_E[[x]]$ かつ $\varphi(x) = x(p+x)^{p-1}$ を満たすものが存在するのでひとつ固定します. 射 $\widetilde{W} \to \mathrm{Spec}\, R$ は, $1_{\widetilde{W}}$ を $x = 0$ で定まる $\mathrm{Spec}\, R$ の閉部分スキームに, $\widetilde{W}[p]^*$ を $x = -p$ で定まる $\mathrm{Spec}\, R$ の閉部分スキームに送ります.

11.2. φ 飽和性への注目. $N_{k,a_p,u}$ が見つかったと仮定し, $N_{k,a_p,u}$ の D_0 への引き戻しを $D_{\mathrm{cris}}(T_{k,a_p,u})$ とおきます. $D_{\mathrm{cris}}(T_{k,a_p,u})$ は $D_{\mathrm{cris}}(V_{k,a_p,u})$ の φ の作用で安定な $\mathcal{O}_E$ 格子であり, さらに $N_{k,a_p,u}$ の Hodge フィルトレーションが $D_{\mathrm{cris}}(T_{k,a_p,u})$ の, 部分 $\mathcal{O}_E$ 加群による減少フィルトレーションを与えます. 定義により各整数 $i \geq 0$ に対し, $\varphi(\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{cris}}(T_{k,a_p,u}) \subset p^i D_{\mathrm{cris}}(T_{k,a_p,u})$ が成り立ちます. $k \leq p-1$ の場合は, Fontaine-Laffallie [FL] の理論により各 $i \geq 0$ に対し, $\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{cris}}(T_{k,a_p,u}) = \mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{cris}}(V_{k,a_p,u}) \cap D_{\mathrm{cris}}(T_{k,a_p,u})$ が成り立っています. しかし一般の場合には包含関係

$$\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{cris}}(T_{k,a_p,u}) \subset \mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{cris}}(V_{k,a_p,u}) \cap D_{\mathrm{cris}}(T_{k,a_p,u}) \tag{11.1}$$

は成り立つものの, 一般の (k, a_p, u) に対しては, (11.1) において等号が成立するような $N_{k,a_p,u}$ が存在するとは一般には期待できず, このことが [BLZ] の方法で $N_{k,a_p,u}$ を構成することを困難にしていました.

今回 Wach 加群を構成することによって新たに $\overline{V}^*_{k,a_p,u}$ が計算できた場合も, ほとんどの場合 (11.1) において等号が成立していません. ところが, 哲学的な理由は今もってよく分かっていませんが, 少なくとも今回新たに Wach 加群を構成した場合には, $\mathcal{O}_E$ 線形な準同型

$$\varphi_{k-1} := \frac{\varphi}{p^{k-1}} : \mathrm{Fil}^{k-1} D_{\mathrm{cris}}(T_{k,a_p,u}) \to D_{\mathrm{cris}}(T_{k,a_p,u})$$

の余核が非常に小さいねじれ部分しか持たない, という現象が観察されました.

特に (すべてではないのですが) 多くの場合に, 与えられた (k, a_p, u) に対して, φ_{k-1} の余核がねじれのない $\mathcal{O}_E$ 加群となるような $N_{k,a_p,u}$ が構成できます. φ_{k-1} の余核がねじれのない $\mathcal{O}_E$ 加群となるとき, $N_{k,a_p,u}$ を φ 飽和的と呼ぶことにします. そうでない場合はさらにアイデアが必要で議論が複雑になるため, 以下では φ 飽和的な場合に限って説明をすることにします. このとき, $\mathrm{Fil}^{k-1} N_{k,a_p,u}$ の $M^\times_{\mathrm{tors}}$ 不変な元 y であって, $e_2 = \varphi(y)/(p+x)^{k-1}$ が $N^{M^\times_{\mathrm{tors}}}_{k,a_p,u}$ の R 上の基底の一部をなすものがとれます. e_1, e_2 が $N^{M^\times_{\mathrm{tors}}}_{k,a_p,u}$ の R 上の基底となるように e_1 を選び, $y = \delta e_1 + z e_2$ とおきます.

[BLZ] と類似の摂動法を用いると, ([BLZ] の場合と比べて計算はかなり複雑になりますが), R の元の組 (δ, z) が上記のような Wach 加群 $N_{k,a_p,u}$ から来るための必要十分条件を求めることができます. $M^\times \cong \mathbb{Z}_p^\times$ の位相的生成元 γ をひとつ選び結果だけを書くと, 次の条件を満たす $r \in R$ が存在することが必要十分条件になります:

(x1): δ と $x(p+x)$ とは R において単元をのぞいて共通の約元を持たない,
(x2): $(p+x)^{k-1} - \varphi(z)r$ は R において $\varphi(\delta)$ で割り切れる,
(x3): $E[[x]]$ の元 $(\gamma(\delta)/\delta)^{\varphi/(1+\varphi)}$ は $R + x^{i+1}E[[x]]$ に属する,
(x4): $E[[x]]$ の元

$$\gamma\left(\frac{z}{\delta}\right) - \left(1 + \frac{x}{p}\right)^{\frac{2\varphi}{1+\varphi}} \frac{z}{\delta}.$$

は $R + x^{i+1}E[[x]]$ に属する,
(x5): δ_0 を $\delta \in R$ を x の巾級数とみたときの定数項とすると, $E[[x]]$ の元

$$\frac{uz}{\delta} + \frac{r}{\varphi(\delta)} - \frac{a_p}{\delta_0}\left(1 + \frac{x}{p}\right)^{\frac{k-1}{1+\varphi}} (\delta/\delta_0)^{-2\varphi/(1+\varphi)}.$$

は $R + x^{i+1}E[[x]]$ に属する.

11.3. 超幾何多項式.

11.3.1. 問題は上の 5 条件を満たす (δ, z, r) を見つけることに帰着されました. 5 条件のうち (x1), (x2), (x5) 以外はあまり重要でないので, 以下では (x1), (x2), (x5) だけを考えます.

(x5) よりも簡単な条件

(x5)': δ_0 を $\delta \in R$ を x の巾級数とみたときの定数項とすると, $E[[x]]$ の元

$$\frac{uz}{\delta} - \frac{a_p}{\delta_0}\left(1 + \frac{x}{p}\right)^{k-1}$$

は $R + x^{i+1}E[[x]]$ に属する.

を考えます. (x1), (x2), (x5)' を満たす (δ, z, r) が見つかると, 常にではないのですが, それを少し変形して (x1)–(x5) を満たす (δ, z, r) を求めることができる場合があります. 一般の場合を扱うにはさらにアイデアが必要たため, 以下ではそのような場合に限ってお話します.

11.3.2. *Padé* 近似. K を標数 0 の体とします. $s \in K$ および整数 m に対し, $(s)_m = s(s+1)\cdots(s+m-1)$ とおきます.

$s \in K$ および非負整数 $d_1, d_2 \geq 1$ に対し,

$$f_1^{(s,d_1,d_2)} = \sum_{j=0}^{d_1} \frac{(j-d_1-d_2)_{d_2}}{(-d_1-d_2)_{d_2}} \frac{(-s-d_2)_j}{j!} t^j,$$

$$f_2^{(s,d_1,d_2)} = \sum_{j=0}^{d_2} \frac{(j-d_1-d_2)_{d_1}}{(-d_1-d_2)_{d_1}} \frac{(s-d_1)_j}{j!} t^j.$$

とおきます.

巾級数を有理式で近似する Padé 近似の方法を $(1-t)^s := \sum_{n\geq 0} \frac{(-s)_n}{n!} t^n$ に対して考えます. Beukers-Tijdeman [BT] に書かれているように, f_1 は $(1-t)^s f_2$ と $t^{d_1+d_2+1}K[[t]]$ を法として合同になります.

そこで $v_p(a_p)$ に近い非負整数 d を適当に取り, $z = u^{-1} a_p f_1^{(k-1,d,i-d)}(-x/p), \delta = p^{-d'} f_2^{(k-1,d,i-d)}(-x/p)$ とおくと, 組 (δ, z) は (x1), (x5)' を満たします. ここで d' は δ が R の元になるように適当に選んだ整数です. さらに $(x2)$ を満たす r が存在することを示す必要があり, そのために多項式 $f_1^{(k-1,d,i-d)}$, $f_2^{(k-1,d,i-d)}$ について p 進的性質をいくつか調べます. そのために次の公式を使います:

11.3.3. *Resultant* の計算. $f_1^{(s,d_1,d_2)}$ と $f_2^{(s,d_1,d_2)}$ の resultant は

$$\pm \prod_{j=1}^{d_1} \binom{d_1+d_2-j}{d_1-j}^{-1} \frac{(s+1-j)_{d_2}}{d_2!}.$$

に等しい.

11.3.4. $d_1, d_2 \geq 1$ のとき, 等式

$$f_1 f_2^{(s,d_1,d_2-1)} - f_2 f_1^{(s,d_1,d_2-1)} = (-1)^{d_1-1} \binom{d_1+d_2-1}{d_1}^{-1} \frac{(s-d_1)_{d_1+d_2}}{(d_1+d_2)!} t^{d_1+d_2}$$

および

$$f_1 f_2^{(s,d_1-1,d_2)} - f_2 f_1^{(s,d_1-1,d_2)} = (-1)^{d_1} \binom{d_1+d_2-1}{d_2}^{-1} \frac{(s-d_1+1)_{d_1+d_2}}{(d_1+d_2)!} t^{d_1+d_2}$$

が成り立つ.

References

[Berg1] Berger, L. *Limites de représentations cristallines.* Compositio Math. **140** (2004), 1473–1498.

[Berg2] Berger, L. *Équations differentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés.* Astérisque **319** (2008), 13–38.

[Berg3] Berger, L. *Représentations modulaires de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et représentations galoisiennes de dimension 2.* Astérisque **330** (2010), 263–279.

[Berg4] Berger, L. *Local constancy for the reduction mod p of* 2*-dimensional crystalline representations.* Bull. London Math. Soc. **44** (2012), 451–459.

[BB] Berger, L., Breuil, C. *Sur la réduction des représentations cristallines de dimension* 2 *en poid moyens.* unpublished note, which is contained in [Berg3].

[BLZ] Berger, L., Li, H., Zhu, H. J. *Construction of some families of* 2*-dimensional crystalline representations.* Math. Ann. **329**(2) (2004), 365–377.

[Bert] Berthelot, P. *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique* $p > 0$. Lect. Notes Math. **407**, Springer-Verlag (1974).

[BT] Beukers, F., Tijdeman, R. *On the multiplicities of binary complex recurrences.* Compos. Math. **51**, no. 2 (1984), 193–213.

[BM] Breuil, C., Mézard, A. *Multiplicités modulaires et repréntations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *et de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ *en* $\ell = p$. Duke Math. J. **115**, No. 2 (2002), 205–298.

[BG1] Buzzard, K., Gee, T. *Explicit reduction modulo p of certain two-dimensional crystalline representations.* Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), no 12, 2303–2317.

[BG2] Buzzard, K., Gee, T. *Explicit reduction modulo p of certain* 2*-dimensional crystalline representations, II.* preprint (2012).

[C1] Colmez, P. *Représentations cristallines et représentations de hauteur finie.* J. reine angew. Math. **514** (1999), 119–143.

[C2] Colmez, P. *Espaces de Banach de dimension finie.* J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), 331–439.

[CF] Colmez, P., Fontaine, J.-M. *Constructions des représentations p-adiques semi-stables.* Invent. Math. **140** (2000) 1–43.

[D] Deligne, P. Letter to J.-P. Serre (1974).

[FF] Fargue, L., Fontaine, J.-M. *Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique.* preprint (2011).

[F1] Fontaine, J.-M. *Représentations p-adiques des corps locaux I.* The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309. Progr. Math. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.

[F2] Fontaine, J.-M. *Le corps des périodes p-adiques.* In Périodes p-adiques, Astérisque **223** (1994), 59–111.

[F3] Fontaine, J.-M. *Representation p-adiques semi-stables.* In Périodes p-adiques, Astérisque **223** (1994), 113–184.

[F4] Fontaine, J.-M. *Presque* C_p*-representations.* Documenta Math. Extra Volmue (2003), 285–385.

[FL] Fontaine, J.-M., Laffaille, G. *Construction de représentations p-adiques.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **15** (1982), 547–608.

[I] Illusie, L. *Cohomologie de De Rham er cohomologie étale p-adique.* Sém. Bourbaki 1989–1990, exp. 726 (1990), 325–374.

[K] Kisin, M. *Crystalline representations and* F*-crystals.* In Algebraic geometry and number theory, Progr. Math. **253** (2006), 459–496.

[S] Serre, J.-P. *Corps Locaux,* 3^e *éd.* Hermann (1968).

[V] Vienney, M. *Construction de* (φ,Γ)*-modules en caractéristique* p. Thesis (2012).

[W] Wach, N. *Représentations p-adiques potentiellement cristallines.* Bull. Soc. Math. France **124** (1996), 375–400.