保型形式の周期の平均分布

都築正男 (上智大学理工学部)

1　導入

表題にある周期或いは周期積分という用語は、もともと閉リーマン面 $\Gamma\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ 上の第１種微分形式の閉１サイクルに沿った周回線積分に由来すると思われるが、現在では任意の簡約代数群の局所対称空間やアデール群上の保型形式に対して、必ずしも調和積分論的意味が明確でない文脈にまで大幅に拡張さた意味で用いられている。まず、保型形式やその周期がどのようなものか大まかに説明することからはじめたい。

1.1　保型形式

G を σ-コンパクトかつ局所コンパクトなユニモジュラー位相群、Γ をその離散部分群であって、話しを簡単にするため商空間 $\Gamma\backslash G$ がコンパクトなものとする。(ここでは、G としては $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ などの半単純リー群や、有理数体上の簡約代数群のアデール化などを想定しておけばよい。アデール群の場合には、Γ は有理点全体の部分群である。)　G のハール測度 $\mathrm{d}g$ を固定すると、L^2-空間 $L^2(\Gamma\backslash G;\mathrm{d}g)$ には G が右移動

$$R(g):\phi(x)\longrightarrow\phi(x\,g),\quad g\in G.$$

によって自然に作用し、G のユニタリー表現 $(R,L^2(\Gamma\backslash G;\mathrm{d}g))$ が得られる。

G の既約ユニタリー表現 (π,V_π) がこの右正則表現の部分表現であるとき、即ち V_π が $L^2(\Gamma\backslash G;\mathrm{d}g)$ の G-既約閉部分空間のとき、π を保型表現ということにする。また、smooth 函数 $\phi:G\to\mathbb{C}$ が $L^2(\Gamma\backslash G;\mathrm{d}g)$ の既約部分表現を生成するとき Γ-保型形式であるということにする。（注意：ここで導入した用語は、必ずしも一般的でない。）

1.2　周期積分

保型形式の周期：H を G の閉部分群で $\Gamma\cap H\backslash H$ がコンパクトであるものとする。H のハール測度 $\mathrm{d}h$ と、連続指標 $\eta:H\to\mathbb{C}^1$ で $\eta|\Gamma\cap H$ が自明となるものを考える。Γ-保型形式 ϕ に対して、次の積分をその (H,η)-周期積分と呼ぶことにする：

$$\mathcal{P}^{H,\eta}(\phi)=\int_{\Gamma\cap H\backslash H}\phi(h)\,\bar{\eta}(h)\,\mathrm{d}h$$

この積分は ϕ の $\Gamma \cap H \backslash H$ への制限と、単位函数 1 の $L^2(\Gamma \cap H \backslash H; \mathrm{d}h)$ における内積と見ることも出来る。

保型表現 (π, V_π) が条件

$$\exists \phi \in V_\pi^\infty \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{P}^{H,\eta}(\phi) \neq 0,$$

を満たすとき、π は (H, η)-distingushed であると呼ばれる。

保型表現の周期：$(H, \mathrm{d}h, \eta)$ および $(H_1, \mathrm{d}h_1, \eta_1)$ を上で考えたような閉部分群とそのハール測度および連続指標からなる 3 つ組としよう。G のコンパクト部分群 $\mathcal{K}$ で条件「G の任意の既約ユニタリー表現 V に対して $\mathcal{K}$-不変部分空間 $V^{\mathcal{K}}$ が有限次元である」を満たすものを考える。(このような部分群を large であるという。)

与えられた保型表現 (π, V_π) に対して、その $\mathcal{K}$-不変部分空間 $V_\pi^{\mathcal{K}}$ の正規直交基底 $\mathcal{B}(\pi^{\mathcal{K}})$ をとり、有限個の基底ベクトル $\phi \in \mathcal{B}(\pi^{\mathcal{K}})$ にわたる次のような周期積分の和を π の周期と呼ぶことにする：

$$\mathbb{P}(\pi; \mathcal{K}) = \sum_{\phi \in \mathcal{B}(\pi^{\mathcal{K}})} \overline{\mathcal{P}^{H,\eta}(\phi)}\, \mathcal{P}^{H_1,\eta_1}(\phi)$$

これは正規直交基底の選び方に依存しない。

1.3 周期の研究の動機付け

保型形式や保型表現の周期積分は現在盛んに研究されている。その理由（あるいはその様相）としては次のようなものが挙げられる：

(i) 保型的 L 函数の特殊値との関連 ([19], [5], [20], etc.)

(ii) 保型形式の周期積分の消滅・非消滅による、保型表現の（函手的）持ち上げの像の特徴付け、部分群への制限に関する表現の分岐則 ([1], [20] etc.)

(iii) 対称空間の算術商多様体における特殊サイクルやそれらの交叉数の研究 ([15], [4], [10], [2],[16], etc.)

1.4 相対跡公式

H. Jacquet は保型形式の周期積分を平均的に捉えるための有効かつ一般的な枠組みとして、（Poisson 和公式のような一種の和公式であるところの）相対跡公式 (relative trace formula) を提案し、上記 (ii) に関連する先駆的な一連の研究を行った ([6],[7], [9] etc.)。我々の設定でその公式を復習しよう。周期を定義するために 3 つ組 $(H, \mathrm{d}h, \eta)$ および $(H_1, \mathrm{d}h_1, \eta_1)$ を固定する。簡単のため $\eta = \mathbf{1}$ とする。更に、記号の簡略化のために $\Gamma_H := H \cap \Gamma$, $\Gamma_{H_1} = H_1 \cap \Gamma$ とおく。large なコンパクト部分群 $\mathcal{K} \subset G$ を固定する。

コンパクトな台を持つ両側$\mathcal{K}$-不変函数$f \in C_c^\infty(\mathcal{K}\backslash G/\mathcal{K})$で次の条件を満たすものを考える：任意の既約ユニタリー表現πの表現空間V_πにおける作用素

$$\pi(f) := \int_G f(g)\,\pi(g)\,\mathrm{d}g$$

が$\mathcal{K}$-不変部分空間$V_\pi^{\mathcal{K}}$上では、あるスカラー$\hat{f}(\pi)$による倍写像になる。

以上のような設定と仮定のもとで、次のような等式が成立する：

$$\sum_{\substack{\pi\in\Pi_{\mathrm{aut}} \\ \pi\,:\,(H,1)\text{-distingushed}}} \hat{f}(\pi)\,\mathbb{P}(\pi;\mathcal{K}) = \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_H\backslash\Gamma/\Gamma_{H_1} \\ \eta_1|_{H_1^\gamma}=1}} \mathrm{vol}(\Gamma_{H_1}^\gamma\backslash H_1^\gamma)\,\mathbb{J}^{\eta_1}(\gamma;f).$$

ここで、右剰余類集合$H\backslash G$への自然なH_1の右作用による剰余類$H\,\gamma$の固定部分群をH_1^γとする：

$$H_1^\gamma := \gamma^{-1}H\gamma\cap H_1$$

$\Gamma_{H_1}^\gamma := H_1^\gamma\cap\Gamma$とおき、両側剰余類$H\gamma H_1$に沿った$f$の軌道積分を

$$\mathbb{J}^{\eta_1}(\gamma;f) := \int_{H_1^\gamma\backslash H_1}\left\{\int_H f(h\gamma h_1)\mathrm{d}h\right\}\bar{\eta}_1(h_1)\,\mathrm{d}h_1$$

と定める。また、Π_{aut}は$L^2(\Gamma\backslash G)$に現れる保型表現全体の集合である。

1.5 セルバーグ跡公式

直積$G\times G$の離散部分群$\Gamma\times\Gamma$に対する保型表現πは、(G,Γ)の2つの保型表現の外部テンソル積$\pi_1\boxtimes\pi_2$に抽象表現として同型である。更に、$G\times G$の対角部分群(と large コンパクト部分群$\mathcal{K}\times\mathcal{K}$)に沿った$\pi$の周期積分の非消滅条件は$\pi_1\cong\pi_2^*$であって、この条件のもとで$\pi$の周期積分はトレース形式$\mathrm{tr}: V_{\pi_1}^{\mathcal{K}}\otimes(V_{\pi_1}^{\mathcal{K}})^*\to\mathbb{C}$に他ならない。こうして Selberg 跡公式

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{aut}}}\hat{f}(\pi) = \sum_{\gamma\in\mathrm{Conj}(\Gamma)}\mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\int_{G_\gamma\backslash G} f(g^{-1}\gamma g)\,\mathrm{d}\dot{g}$$

は相対跡公式の特別な場合として理解可能である。Selberg 跡公式の重要な「用途」として次のようなものが挙げられる：

(a) 保型表現の函手的持上げの構成 (Langlands-Arthur の予想)

(b) 正則保型形式の空間の次元やヘッケ作用素の跡の計算、あるいは非正則保型形式 (Maass 形式) の空間の次元に関する Weyl 法則の証明

(c) セルバーグゼータ関数の構成と素測地線定理の証明

1.6 上の観察から生まれる自然な問題意識

Jacquet は、周期積分によってコントロールされる distingushed な保型表現の持ち上げの構成を目指して相対跡公式を導入した ([8])。セルバーグ跡公式との類似を見れば、これは跡公式の「用途」として述べた (a) に相当する。そこで、相対跡公式に対して残りの (b) (=次元公式, Weyl 法則) 或いは (c)(=素測地線定理) に相当するような応用はありえないのか、という素朴な問いが生まれる。

Jacquet のシナリオでは、相対跡公式は（持ち上げの始点と終点にあるべき）２つ以上の異なる群に対する相対跡公式の幾何サイドをテスト函数の「同期化された族」(matching family) を使って比較することが要であり、その過程では、必ずしも一つ一つの項 (軌道積分) を明示的に計算する必要は無かった。しかし、上で述べた (b), (c) のような一種の「計算問題」に対しては、一つの $(G; H, H_1)$ に対して (テスト関数 f を適切に特殊化して考えた）相対跡公式の両辺に対する明示形が必要になる。明示的な相対跡公式の応用結果としては、次のような種類の「明示公式」が期待できると思われる：

(b') 保型表現の周期の「加重平均」$\sum_\pi \hat{f}(\pi)\,\mathbb{P}(\pi;\mathcal{K})$ の明示公式や漸近公式、$\mathbb{P}(\pi;\mathcal{K})$ の漸近的な「大きさ」の評価

(c') counting function

$$\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_H\backslash\Gamma/\Gamma_{H_1}\\ \mathrm{Norm}_\infty(\gamma)\leqslant X}} v(\gamma)$$

の漸近公式 (素測地線定理の類似)

ここで、両側剰余類の「ノルム函数」$\mathrm{Norm}_\infty(\gamma)$ の自然な定義は、軌道積分を明示的に計算することで明らかになると思われる。

1.7 この記事の目的

$\mathbb{A}$ を総実代数体 F のアデール環とする。アデール群 $G = \mathrm{PGL}(2,\mathbb{A})$ の離散部分群 $\Gamma = \mathrm{PGL}(2,F)$ に関する保型形式を考える。(この場合、商空間 $\Gamma\backslash G$ はコンパクトではないので、これまで述べた定義は適切に修正される必要がある。) $\widehat{\mathfrak{o}}_F$ を F の極大整環 $\mathfrak{o}_F$ の副有限完備化、$\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{o}_F$ の平方因子を持たないイデアルとして、「ヘッケ部分群」

$$\mathcal{K}_0(\mathfrak{n}) = \{[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}] \in \mathrm{PGL}(2,\widehat{\mathfrak{o}}_F) |\, c \in \mathfrak{n}\widehat{\mathfrak{o}}_F\}$$

を考えると、$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0(\mathfrak{n})\mathcal{K}_\infty$ は $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{A})$ の large コンパクト部分群である。ただし、$\mathcal{K}_\infty = \prod_{v\in P_\infty} \mathrm{O}(2;\mathbb{R})$ (P_∞ は F の無限素点全体の集合) は $\mathrm{GL}(2, F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群である。周期を定義する部分群とその指標の組 (H,η), (H_1,η_1) としては、

$$H = H_1 = \{[\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}] \,|\, t \in \mathbb{A}^\times\},$$
$$\eta_1 = \mathbf{1}, \qquad \eta^2 = \mathbf{1}$$

を考える。この設定のもとで、我々は、($\hat{f}(\pi)$ で表された) 明示的な相対跡公式を書き下し、その応用として得られる平均周期の漸近公式 (in level aspect) および保型 L 関数の「大きさ」評価 (in Laplace eigenvalue aspect) に関して報告する。

2 結果

F を総実代数体、$\mathfrak{o}_F$ をその整数環とし、$d_F = [F:\mathbb{Q}]$ とおく。P_∞ を F の無限素点全体の集合、$P_{\rm fin}$ を有限素点全体の集合とする。$v \in P_{\rm fin}$ に対して、F_v を v での F の完備化、$\mathfrak{o}_v$ をその極大整環とし、素元 $\varpi_v \in \mathfrak{o}_v$ を固定する。$q_v = \#(\mathfrak{o}_v/\varpi_v\mathfrak{o}_v)$ を v の剰余体の位数とする。$\Pi_{\rm cus}$ を $L^2_{\rm cus}({\rm PGL}_2(F)\backslash{\rm PGL}_2(\mathbb{A}))$ の既約部分表現全体の集合とする。その要素は、自明な中心指標を持つ ${\rm GL}_2(\mathbb{A})$ の既約カスプ保型表現である。そのような $\pi \cong \otimes_v \pi_v$ に対して、

$$\begin{aligned} L(s,\pi) &= \prod_{v \in P_\infty \cup P_{\rm fin}} L(s,\pi_v) \qquad (\text{Jacquet-Langlands } L\text{-関数 (ガンマ因子込み)}) \\ \epsilon(s,\pi) &= \prod_{v \in P_\infty \cup P_{\rm fin}} \epsilon(s,\pi_v,\psi_{F,v}) \qquad (\epsilon\text{-因子}) \end{aligned}$$

とする。ただし、${\rm Re}(s)$ は十分大とする。この L 函数は対角トーラスに沿った保型形式の周期積分で捉えられることはよく知られている。もう少し精密に言うと、new form と呼ばれる特別なベクトル $\varphi_\pi^{\rm new} \in V_\pi^\infty$ が存在して

$$\int_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times} \varphi_\pi^{\rm new}\left(\left[\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\right) |t|_{\mathbb{A}}^{s-1/2}\, {\rm d}^\times t = L(s,\pi) \qquad {\rm Re}(s) \gg 0$$

が成り立つ。この式の左辺の積分の絶対収束域は $\mathbb{C}$ 全体なことが分かり、右辺のオイラー積の解析接続が得られる。また、リーマンゼータの場合と同様の議論により、自己双対的な函数等式 $L(s,\pi) = \epsilon(s,\pi)\, L(1-s,\pi)$ が証明される（ヘッケの議論)。特に、$s = 1/2$ が函数等式の中心であり、この点での L 函数の値 $L(1/2,\pi)$ は、$\varphi_\pi^{\rm new}$ の分裂トーラスに沿った周期に他ならない。

平方因子なしの $\mathfrak{o}_F$-ideal $\mathfrak{n}$ に対して、

$$\Pi_{\rm cus}(\mathfrak{n}) = \{\pi \in \Pi_{\rm cus} \,|\, V_\pi^{\mathcal{K}_0(\mathfrak{n})\mathcal{K}_\infty} \neq 0\}$$

とおく。ただし、$\mathcal{K}_0(\mathfrak{n})$、$\mathcal{K}_\infty$ は 1.7 で定義したものである。これらの表現は、古典的な枠組みでは、Hilbert modular 群のレベル $\mathfrak{n}$ のヘッケ部分群によって不変な Maass 波動形式に対応する。$\pi \cong \otimes_v \pi_v \in \Pi_{\rm cus}(\mathfrak{n})$ とし、π の導手を $\mathfrak{c}_\pi$ とすると、$\mathfrak{c}_\pi \,|\, \mathfrak{n}$ であり

$$L(s,\pi_v) = \begin{cases} \Gamma_{\mathbb{R}}(s-\nu_v(\pi)/2)\,\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\nu_v(\pi)/2) & (v \in P_\infty), \\ \left(1-q_v^{-s-\nu_v(\pi)/2}\right)^{-1}\left(1-q_v^{-s+\nu_v(\pi)/2}\right)^{-1} & (v \in P_{\rm fin} - S(\mathfrak{c}_\pi)), \\ \left(1+\varepsilon(\pi_v)\,q_v^{-s-1/2}\right)^{-1} & (v \in S(\mathfrak{c}_\pi)) \end{cases}$$

ここで、$S(\mathfrak{c}_\pi) = \{v \in P_{\rm fin} | \operatorname{ord}_v(\mathfrak{c}_\pi) > 0\}$ であり、$\varepsilon(\pi_v) \in \{\pm 1\}$ は local Atkin-Lhener 固有値である。$\{\nu_v(\pi)\}_{v \notin S(\mathfrak{c}_\pi)}$ を π の不分岐 spectral parameters と呼ぶことにする。不分岐 spectral parameters の固有値解釈を復習しておこう。$\varphi_\pi^{\rm new} \in V_\pi$ に対応する、多変数 $\tau = (\tau_v = x_v + iy_v)_{v \in P_\infty}$ (τ_v は上半平面の変数) の函数を $f(\tau)$ とすると、これは

ラプラス固有方程式：
$$-y_v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_v^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_v^2}\right) f = \frac{1-\nu_v(\pi)^2}{4} f, \qquad v \in P_\infty,$$

ヘッケ固有方程式：
$$T(\mathfrak{p}_v)\, f = (q_v^{(1+\nu_v(\pi))/2} + q_v^{(1-\nu_v(\pi))/2}) f, \qquad v \in P_{\rm fin} - S(\mathfrak{c}_\pi)$$

を満たす。

注意：$v \in P_\infty$ の場合、$\nu_v(\pi) \in \mathbb{C}/\{\pm 1\}$ であり、Laplacian の正値性より

$$\nu_v(\pi) \in i\mathbb{R} \text{ または } \nu_v(\pi) \in (-1, 1)$$

がすぐ分かる。Selberg 予想は $\nu_v(\pi) \in i\mathbb{R}$ と同値である。$v \in P_{\rm fin} - S(\mathfrak{c}_\pi)$ の場合、$\nu_v(\pi) \in \mathbb{C}/\{\pm 1\}\,\frac{2\pi i}{\log q_v}\mathbb{Z}$ であり、Ramanujan 予想は $\nu_v(\pi) \in i\mathbb{R}$ と同値である。

2.1 トーラス周期

$\eta = \otimes_v \eta_v$ を $F^\times$ の idele 類群指標で $\eta^2 = \mathbf{1}$ を満たすものとする。更に、η およびイデアル $\mathfrak{n}$ に対して、次の 3 条件を仮定する：
(i) $\eta_v = 1$ ($\forall v \in P_\infty$)　(ii) η_v は $S(\mathfrak{n})$ で不分岐　(iii) $\prod_{v \in S(\mathfrak{n})} \eta(\varpi_v) = 1$ (ϖ_v: F_v の素元)
さて、保型表現 $\pi \in \Pi_{\rm cus}(\mathfrak{n})$ に対して

$$\mathbb{P}^\eta(\pi; \mathcal{K}_0(\mathfrak{n})\mathcal{K}_\infty) \stackrel{\rm def}{=} \sum_{\varphi \in \mathcal{B}} \left(\int_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times} \varphi\left(\left[\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]\right) {\rm d}^\times t\right) \left(\int_{F^\times\backslash\mathbb{A}^\times} \overline{\varphi}\left(\left[\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & x_\eta \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]\right) \eta(t\, x_\eta^*)\, {\rm d}^\times t\right)$$

と定義する。ただし、$\mathcal{B}$ は $V_\pi^{\mathcal{K}_0(\mathfrak{n})\mathcal{K}_\infty}$ の正規直交基底、$(x_\eta^*)^{-1} \in \mathbb{A}^\times$ は η の conductor $\mathfrak{f}_\eta$ に対応するイデール、$x_\eta \in \mathbb{A}$ は $(x_\eta)_{\rm fin} = x_\eta^*$, $(x_\eta)_\infty = 0$ なるアデールである。

命題 1

$$\mathbb{P}^\eta(\pi; \mathcal{K}_0(\mathfrak{n})\mathcal{K}_\infty) = \mathcal{G}(\eta)\, \frac{[{\rm PGL}_2(\widehat{\mathfrak{o}}_F) : \mathcal{K}_0(\mathfrak{c}_\pi)]}{2D_F^{1/2}{\rm N}(\mathfrak{f}_\pi)} \Big\{ \prod_{v \in S(\mathfrak{n}\mathfrak{c}_\pi^{-1})} \frac{1+\eta_v(\varpi_v)}{1+Q(\pi_v)} \Big\} \frac{L(1/2,\pi)\, L(1/2, \pi\otimes\eta)}{L(1,\pi;{\rm Ad})}$$

が成り立ち、$\mathbb{P}^\eta(\pi; \mathcal{K}_0(\mathfrak{n})\mathcal{K}_\infty)/\mathcal{G}(\eta) \geqslant 0$ である。ただし、$\mathfrak{c}_\pi$ は π の導手、$\mathcal{G}(\eta)$ は η のガウス和であり、$L(s,\pi;{\rm Ad}) = \prod_v L(s,\pi_v;{\rm Ad})$ は π の随伴表現 L-函数であって、${\rm Re}(s) \gg 0$ では次のオイラー積で定義される：

$$L(s,\pi_v;{\rm Ad}) = \begin{cases} (1-q_v^{-s+\nu_v(\pi)})^{-1}(1-q_v^{-s})^{-1}(1-q_v^{-s-\nu_v(\pi)})^{-1}, & (v \in P_{\rm fin} - S(\mathfrak{c}_\pi)), \\ \Gamma_\mathbb{R}(s+\nu_v(\pi))\Gamma_\mathbb{R}(s)\,\Gamma_\mathbb{R}(s-\nu_v(\pi)), & (v \in P_\infty), \\ (1-q_v^{-(s+1)})^{-1}, & (v \in S(\mathfrak{c}_\pi)) \end{cases}$$

更に、各局所表現 π_v ($v \in P_{\rm fin} - S(\mathfrak{c}_\pi)$) に対して、 $Q(\pi_v) = \dfrac{q_v^{\nu_v(\pi)/2} + q_v^{-\nu_v(\pi)/2}}{q_v^{1/2} + q_v^{-1/2}}$ である。□

2.2 明示的相対跡公式

以下では次のデータを固定する：

- $S_{\mathrm{fin}} \subset P_{\mathrm{fin}}$：有限集合, $S = S_{\mathrm{fin}} \cup P_\infty$
- $\eta = \otimes_v \eta_v$：$F^\times$ のイデール類群指標で $\eta^2 = 1$ なるもの
- $\mathfrak{n}$：平方自由イデアルで 2.1 節の条件 (i), (ii), (iii) を満たすもの

複素空間 $\mathbb{C}^S$ 上の「重み関数」$\alpha(\mathbf{s})$ に対して、$\mathbb{P}^\eta(\pi; \mathcal{K}_0(\mathfrak{n})\mathcal{K}_\infty)$ $(\pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(\mathfrak{n}))$ 達の α-加重平均を次で定義する：

$$\mathbb{I}_{\mathrm{cus}}(\alpha) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{\pi \in \Pi_{\mathrm{cus}}(\mathfrak{n})} \mathbb{P}^\eta(\pi; \mathcal{K}_0(\mathfrak{n})\mathcal{K}_\infty)\, \alpha(\nu_S(\pi))$$

ここで、$\nu_S(\pi) = \{\nu_v(\pi)\}_{v \in S}$ は S での π の不分岐スペクトラルパラメーターである。右辺は無限和であるので、和の収束を保障するには $\alpha(\mathbf{s})$ の減衰条件が必要である。

定理 2 ([18]) $\alpha(\mathbf{s}) = \prod_{v \in S} \alpha_v(s_v)$ を $\mathbb{C}^S$ 上の正則関数で次を満たすものとする：

$\heartsuit_1$ $\alpha_v(-s_v) = \alpha_v(s_v)$ $(\forall v \in S)$

$\heartsuit_2$ $\alpha_v(s_v + \frac{2\pi i}{\log q_v}) = \alpha_v(s_v)$ $(\forall v \in S_{\mathrm{fin}})$

$\heartsuit_3$ $(\forall\, v \in P_\infty)\,(\forall l > 0)\,(\forall A > 0)\,(|\alpha_v(s_v)| \ll (1 + |\mathrm{Im}(s_v)|)^{-l})$ $(\mathrm{Re}(s_v) \in [-A, A])$

このとき次の等式が成立する：

$$\mathbb{I}_{\mathrm{cus}}(\alpha) + \mathbb{I}_{\mathrm{eis}}(\alpha) + \mathbb{D}(\alpha) = \mathbb{J}_{\mathrm{u}}(\alpha) + \mathbb{J}_{\mathrm{hyp}}(\alpha)$$

ここで、左辺初項は上で定義した加重平均周期である。

- $\mathbb{I}_{\mathrm{eis}}(\alpha)$ は次で与えられる：

$$\mathbb{I}_{\mathrm{eis}}(\alpha) = D_F^{-1/2} \mathcal{G}(\eta)\, \frac{\mathrm{vol}(F^\times \backslash \mathbb{A}^1)^{-1}}{8\pi i} \sum_{\chi \in \Xi_0} \sum_{\mathfrak{c} | \mathfrak{n}} \int_{i\mathbb{R}} \alpha_\chi(\nu)\, \mathfrak{L}^1_{\chi,\mathfrak{c}}(\nu)\, \mathfrak{L}^\eta_{\bar\chi,\mathfrak{c}}(\bar\nu)\, \mathrm{d}\nu$$

ここで、Ξ_0 は $F^\times \backslash \mathbb{A}^1$ の不分岐指標全体の集合、$\chi \in \Xi_0$ および $\mathfrak{c}|\mathfrak{n}$ に対して、

$$\mathfrak{L}^\eta_{\chi,\mathfrak{c}}(\nu) = \frac{L(\frac{1+\nu}{2}, \chi\eta)\, L(\frac{1-\nu}{2}, \bar\chi\eta)}{L(1-\nu, \bar\chi^2)} \times (D_F \mathrm{N}(\mathfrak{c}))^{\nu/2} \prod_{v \in S(\mathfrak{c})} \{(q_v^{-1} + 1) L(1-\nu, \chi_v^{-2})(\eta_v(\varpi_v) - Q(I(\chi_v|\,|_v^{\nu/2}))\}$$

ただし、$L(s, \chi\eta)$ は完備化 Hecke の L 函数であり、$\alpha_\chi(\nu)$ は、$a(\chi_v) \in \mathbb{C}$ を $\chi_v|\,|_v^{-a(\chi_v)}$ が $F_v^\times$ の極大コンパクト部分群 $\mathfrak{o}_v^\times$ 上自明となるものとして、$\alpha_\chi(\nu) = \alpha(\{\nu + a(\chi_v)\}_{v \in S})$ で定義される。

• $\mathbb{D}(\alpha)$ は次で与えられる：

$$\mathbb{D}(\alpha) = X_0^\eta(\mathfrak{n})\,\alpha_\eta(1) + Y_0^\eta(\mathfrak{n})\,\alpha_{\mathbf{1}}(1) + Y_1^\eta(\mathfrak{n})\,\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\bigg|_{\nu=1}\right)\alpha_{\mathbf{1}}(\nu) + Y_2^\eta\,\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\nu^2}\bigg|_{\nu=1}\right)\alpha_{\mathbf{1}}(\nu)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
X_0^\eta(\mathfrak{n}) &= \frac{2D_F^{-1/2}}{\zeta_F(2)}\,C_0(\eta)\,\delta(\mathfrak{f}_\eta=\mathfrak{o}_F)\,\tilde{B}_0^\eta(\mathfrak{n}),\\
Y_0^\eta(\mathfrak{n}) &= \frac{2\mathrm{N}(\mathfrak{f}_\eta)^{1/2}\,\mathcal{G}(\eta)}{W(\eta)\,\zeta_F(2)}\,C_0(\eta)^2\,\tilde{B}_0^\eta(\mathfrak{n}) + 4\delta_{\eta,\mathbf{1}}\frac{D_F^{-1/2}R_F^2}{\zeta_F(2)}\Bigg\{-\frac{2C_F}{R_F}\frac{\zeta_F'(2)}{\zeta_F(2)} - 2\frac{\zeta_F''(2)}{\zeta_F(2)} + 4\frac{\zeta_F'(2)^2}{\zeta_F(2)^2}\\
&\qquad + 2\left(\frac{C_F}{R_F}-\frac{\zeta_F'(2)}{\zeta_F(2)}\right)\tilde{A}_1(\mathfrak{n}) + \tilde{B}_2(\mathfrak{n})\Bigg\},\\
Y_1^\eta(\mathfrak{n}) &= -8\delta_{\eta,\mathbf{1}}\frac{D_F^{-1/2}R_F^2}{\zeta_F(2)}\left\{\frac{\zeta_F'(2)}{\zeta_F(2)} - \frac{C_F}{R_F} - \tilde{A}_1(\mathfrak{n})\right\},\\
Y_2^\eta &= 4\delta_{\eta,\mathbf{1}}\frac{D_F^{-1/2}R_F^2}{\zeta_F(2)}.
\end{aligned}$$

ここで、$\zeta_F(s)$ は完備化 Dedekind ゼータ函数を表し、

$$\tilde{A}_1(\mathfrak{n}) = \frac{1}{4}\sum_{v\in S(\mathfrak{n})}\frac{1-q_v}{1+q_v}\log q_v, \qquad \tilde{B}_0^\eta(\mathfrak{n}) = \prod_{v\in S(\mathfrak{n})}\frac{1-\eta_v(\varpi_v)\,q_v^{-1}}{1-q_v^{-1}},$$

$$\tilde{B}_2(\mathfrak{n}) = \frac{1}{8}\sum_{v\in S(\mathfrak{n})}\left(\frac{1-q_v}{1+q_v}\right)^2(\log q_v)^2 - \frac{1}{8}\sum_{v\in S(\mathfrak{n})}\frac{1+q_v}{1-q_v}(\log q_v)^2 + \frac{1}{4}\sum_{\substack{\{v_1,v_2\}\subset S(\mathfrak{n})\\ v_1\neq v_2}}\frac{(q_{v_1}q_{v_2}+1)^2}{(q_{v_1}^2-1)(q_{v_2}^2-1)}$$

であり、$C(\eta)$, $R(\eta)$ は

$$L(s,\eta) = \frac{R(\eta)}{s-1} + C_0(\eta) + O(s-1)$$

で定義され、$C_F = C_0(\mathbf{1})$, $R_F = R(\mathbf{1})$ である。

• $\mathbb{J}_{\mathrm{u}}(\alpha)$ は次で与えられる：

$$\mathbb{J}_{\mathrm{u}}(\alpha) = 2(\delta_{\mathfrak{n},\mathfrak{o}_F}+1)\,C(\mathfrak{n})^{-1}\,D_F^{1/2}\mathcal{G}(\eta)\,\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^{\#S}\int_{(c)}\mathfrak{C}_S^\eta(\mathbf{s}|\mathfrak{n})\,\Upsilon_S^\eta(\mathbf{s})\,\alpha(\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mu_S(\mathbf{s})$$

ここで、$C(\mathfrak{n}) = D_F^{-1/2}\prod_{v\in S(\mathfrak{n})}(1+q_v)^{-1}$ であり、$\int_{(c)}$ は十分大きな実数の組 $c=(c_v)\in(0,\infty)^S$ を実部とする $\prod_{v\in S}\{\mathrm{Re}(s_v)=c_v\}$ に沿った多重 contour 積分、

$$\mathrm{d}\mu_S(\mathbf{s}) = \prod_{v\in S}\begin{cases}2^{-1}\log q_v(q_v^{(1+s_v)/2}-q_v^{(1-s_v)/2})\,\mathrm{d}s_v & (v\in S_{\mathrm{fin}}),\\ s_v\,\mathrm{d}s_v & (v\in P_\infty)\end{cases}$$

$$\mathfrak{C}^{\eta}_{S}(\mathbf{s}|\mathfrak{n}) = C_0(\eta) + R(\eta)\Bigg\{\log \mathrm{N}(\mathfrak{n})^{1/2} D_F + \frac{d_F}{2}\left(C_{\mathrm{Euler}} + 2\log 2 - \log \pi\right)$$
$$+ \sum_{v\in S_{\mathrm{fin}}} \frac{\log q_v}{1 - q_v^{(s_v+1)/2}} + \frac{1}{2}\sum_{\iota\in\Sigma_\infty}\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s_\iota+1}{4}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s_\iota+3}{4}\right)\right)\Bigg\},$$
$$\Upsilon^{\eta}_{S}(\mathbf{s}) = \prod_{v\in P_\infty} \frac{-1}{8}\frac{\Gamma((s_v+1)/4)^2}{\Gamma((s_v+3)/4)^2} \prod_{v\in S-P_\infty} (1-\eta_v(\varpi_v) q_v^{-(s_v+1)/2})^{-1}(1-q_v^{(s_v+1)/2})^{-1}$$

- $\mathbb{J}_{\mathrm{hyp}}(\alpha)$ は次で与えられる

$$\mathbb{J}_{\mathrm{hyp}}(\alpha) = C(\mathfrak{n})^{-1}\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^{\sharp S}\int_{(c)} \mathfrak{H}^{\eta}_{S}(\mathfrak{n}|\mathbf{s})\,\alpha(\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mu_S(\mathbf{s})$$

ここで、$\mathfrak{H}^{\eta}(\mathfrak{n}|\mathbf{s})$ は

$$\left[\begin{smallmatrix} 1+b^{-1} & 1 \\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right] \qquad (b\in F-\{0,-1\})$$

で代表される両側剰余類から決まるある積分（無限級数）であり、例えば、$\eta=\mathbf{1}$, $S=P_\infty$, $\mathfrak{n}=\mathfrak{o}_F$ の場合なら、

$$\mathfrak{H}^{\mathbf{1}}_{P_\infty}(\mathfrak{o}_F|\mathbf{s}) = \sum_{b\in\mathfrak{o}_F-\{0,-1\}} \tau_F(b)\,\tau_F(b+1)\prod_{v\in P_\infty} I(s_v;b)$$

ただし、$\tau_F(b) = \sharp\{\mathfrak{a}\subset\mathfrak{o}_F | \mathfrak{a}$ は ideal で $b\mathfrak{o}_F\subset\mathfrak{a}\subset\mathfrak{o}_F\}$

$$I(s;b) = \frac{-1}{4\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\frac{s+1}{4})^2}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}\int_0^\infty (\mathfrak{y}(t;b))^{(s+1)/4}\,{}_2F_1\left(\tfrac{s+1}{4},\tfrac{s+1}{4};\tfrac{s}{2}+1;\mathfrak{y}(t;b)\right)\,\mathrm{d}^\times t,$$
$$\mathfrak{y}(t;b) = \frac{1}{(t+t^{-1})(b^2 t^{-1}+(b+1)^2 t)}$$

とかける。 $\square$

注意：(1) この定理の証明に際しては、$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ や $F^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ が非コンパクトなため、アイゼンシュタイン級数の発散周期積分を適切に正規化して計算する必要がある。
(2) 同じ設定での相対跡公式は既に Jacquet によって提案されている ([6])。主な相違点を説明しよう。従来型の公式は、アデール群上の「Hecke 函数」の汎関数に対する等式であり、不分岐軌道積分を除くと各項の具体的な形よりも群上の distribution としての性質に重点が置かれる。その理由は、既に述べたとおり、第二の群の相対跡公式との比較が最終目標であるためである。対して、我々の公式は、表現の径数空間 $\mathbb{C}^S$ 上の正則関数 $\alpha(\mathbf{s})$(=Hecke 函数の Fourier 変換) に対する汎関数の等式であり、各項は非常に具体的に計算されている (すべて $\int_{(c)}\Phi(\mathbf{s})\,\alpha(\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mu(\mathbf{s})$ の形で記述される。)
(3) $F=\mathbb{Q}$, $\eta=1$, $\mathfrak{n}=\mathbb{Z}$ の場合、類似公式が知られている ([12])

2.3 Spectral equidistribution

まず、「等分布性」(equidistribution) とは何だったかを一般的な設定で説明しよう。X を σ-コンパクトかつ局所コンパクトな位相空間、$\{(A_\lambda, w_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を次のようなデータとする:

- Λ はフィルター付集合
- $A_\lambda \subset X$ は離散集合
- $w_\lambda(x)\,(x \in A_\lambda)$ は函数

$a \in A_\lambda$ に台を持つ Dirac 測度 δ_a の w_λ-加重和

$$\mu_\lambda = \sum_{a\in A_\lambda} w_\lambda(a)\,\delta_a$$

が、$\lambda \to \infty$ において X 上のあるラドン測度 μ^∞ に弱収束するとき、つまり

$$\int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_\lambda(x) \longrightarrow \int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu^\infty(x), \quad \forall\varphi \in C_c(X)$$

のとき、重み付点集合 $\{(A_\lambda, w_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は、測度 μ^∞ に関して X 上 equidistributed（等分布）であるというのだった。

例 1 (Weyl の定理）：$\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ とする。$\{(A_n, w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $A_n = \{a_k := k\theta - [k\theta]\,|\,1 \leqslant k \leqslant n\}$, $w_n(a_k) = 1/n$ で定義すると、これは Lebesque 測度に関して $X = [0,1]$ 上 equidistributed である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(a_k) = \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

例 2 (Serre (1997)) p を素数とする。p と素なレベル $\Gamma_0(N)$ に属し、重さ k を持つ cusp forms $f(\tau) = \sum_{n=1}^\infty a_f(n)\,q^n$ 全体からなる空間の正規化されたヘッケ固有基底を $\mathcal{B}(k,N)$ とする。重み付集合 $\{(A_{k,N}, w_{k,N})\}$ を $A_{k,N} = \{p^{(1-k)/2}\,a_f(p)|\,f \in \mathcal{B}(k,N)\}$, $w_{k,N} = [\sharp\mathcal{B}(k,N)]^{-1}$ で定義すると、$k + N \to \infty$ のとき、これは区間 $[-2,2]$ 上で測度

$$\frac{p+1}{(p^{1/2}+p^{-1/2})^2 - x^2}\,\frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi}\,\mathrm{d}x$$

に関して equidistributed である。 □

我々の明示的相対跡公式により次が示せる：

定理 3 ([18]) $(S, \eta, \mathfrak{n})$ は 2.2 節の最初の条件を満たすとし、更に η は非自明とする。

$$P_{\mathrm{fin}}(S,\eta) = \{v \in P_{\mathrm{fin}} - S \cup S(\mathfrak{f}_\eta)|\,\eta_v(\varpi_v) = -1\}$$

とおき、

$$\mathcal{I}_{S,\eta} = \{P_{\mathrm{fin}}(S,\eta) \text{ の素点に対応する偶数個の素 ideal の積となる平方自由なイデアル}\}$$

と定義する。更に、$\Pi_{\rm cus}^*(\mathfrak{n}) := \{\pi \in \Pi_{\rm cus}(\mathfrak{n}) |\, \mathfrak{c}_\pi = \mathfrak{n}\}$ とおく。このとき、空間

$$\mathfrak{X}_S := \prod_{v \in S_{\rm fin}} \left(\mathbb{C}/\{\pm 1\} \frac{2\pi i}{\log q_v}\mathbb{Z} \right) \times \prod_{v \in P_\infty} \mathbb{C}/\{\pm 1\}$$

において、点 $\nu_S(\pi) = \{\nu_v(\pi)\}_{v \in S}\ (\pi \in \Pi_{\rm cus}^*(\mathfrak{n}))$ に重さ

$$\frac{L(1/2, \pi)\, L(1/2, \pi \otimes \eta)}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})\, L(1, \pi; \mathrm{Ad})}$$

を与えて定義される重み付き (加算無限) 点集合 $\{\nu_S(\pi)\}_{\pi \in \Pi_{\rm cus}^*(\mathfrak{n})}$ は、$\mathrm{N}(\mathfrak{n}) \to \infty$, $\mathfrak{n} \in \mathfrak{I}_{S,\eta}$ のとき、$\mathfrak{X}_S$ 上の次の測度 Λ_S^η に関して equidistributed である：

$$\Lambda_S^\eta = 4 D_F^{3/2} L(1, \eta) \bigotimes_{v \in S} \Lambda_v^{\eta_v}$$

ここで、$\Lambda_v^{\eta_v}$ は $\mathfrak{X}_v$ 上の測度で台が「虚軸」に一致し、虚軸では

$$\begin{aligned}\Lambda_v^{\eta_v}(iy) =& \frac{L(1/2, I_v(|\,|_v^{iy/2}))\, L(1/2, I_v(|\,|_v^{iy}) \otimes \eta_v)}{L(1, \pi_v; \mathrm{Ad})} \frac{\zeta_{F,v}(2)}{L(1, \eta_v)} \\ & \times \begin{cases} \dfrac{(1 + q_v^{-1})\, \log q_v}{4\pi} \left| \dfrac{1 - q_v^{-iy}}{1 - q_v^{-(1+iy)}} \right|^2 \mathrm{d}y, & v \in S_{\rm fin}, \\ \dfrac{1}{4\pi} \left| \dfrac{\Gamma((1+iy)/2)}{\Gamma(iy/2)} \right|^2 \mathrm{d}y, & v \in P_\infty \end{cases}\end{aligned}$$

で与えられる。 □

注意：(1) 測度 $\Lambda_v^{\eta_v}$ は調和解析的な意味を持つ。
(2) 定理 2 は（その系である定理 3 および後述の定理 4 とともに）$\mathfrak{n}$ が平方自由とは限らない一般の場合に、杉山真吾 氏によって拡張された（[17])。
(3) 正則 (Hilbert) 保型形式に対する先行類似結果として、[3], [14] がある。

2.4 L-函数の大きさ評価

$L(s, \pi)$ からガンマ因子を取り除いた $L_{\rm fin}(s, \pi)$ を (s, π) の函数と見做すとき、その「漸近的な大きさの評価」をしたい。以下では中心値 $L_{\rm fin}(1/2, \pi)$ を問題にする。我々はある種の「多項式評価」を期待するのだが、計測の基準となるべきゲージ函数として表現の「解析的導手」(anakytic conductor) が広く使われている。$\mathcal{K}_\infty$-spherical な $\pi \in \Pi_{\rm cus}$ に対しては、その analytic conductor は

$$C(\pi) = \mathrm{N}(\mathfrak{c}_\pi) \prod_{v \in P_\infty} (2 + |\nu_v(\pi)|)^2$$

で定義される。ここで、$\mathfrak{c}_\pi$ は保型表現 π の代数的導手であり、$\{\nu_v(\pi)\}_{v \in P_\infty}$ はアルキメデス素点での π の不分岐パラメーターである。

さて、一般に保型表現の集合 $\mathcal{F} \subset \Pi_{\rm cus}$ と定数 $\theta > 0$ に対して、次の命題 $\mathrm{P}(\mathcal{F}, \theta)$ を考察する：

$$\mathrm{P}(\mathcal{F}, \theta) : (\forall \epsilon > 0) \left(\pi \in \mathcal{F} \text{ の函数 } \frac{|L_{\rm fin}(1/2, \pi)|}{C(\pi)^{\theta+\epsilon}} \text{ は上に有界である} \right)$$

オイラー積や函数等式の存在などと、複素解析における Phragmen-Lindelöf の定理によって、命題 $\mathrm{P}(\Pi_{\rm cus}, 1/4)$ が真であることが分かる。対応する評価式 $|L_{\rm fin}(1/2, \pi| \ll_\epsilon C(\pi)^{1/4+\epsilon}$ $(\pi \in \mathcal{F})$ は凸評価 (convexity bound) と呼ばれる。最良評価を与える命題 $\mathrm{P}(\Pi_{\rm cus}, 0)$ は Lindelöf の予想とよばれ、$L(s, \pi)$ のリーマン予想から従う。凸評価と最良評価の中間に位置する命題 $\mathrm{P}(\mathcal{F}, \theta)$ (ただし $\theta < 1/4$) が真のとき、対応する評価式を $\mathcal{F}$ における $L_{\rm fin}(1/2, \pi)$ の subconvexity bound という。Michel と Venkatesh によって $\mathrm{P}(\Pi_{\rm cus}, \theta)$ が真となるような subconvex exponent $\theta < 1/4$ の存在が証明されている ([11])。我々の明示的相対跡公式から、中心 L 値 $L_{\rm fin}(1/2, \pi)$ の π_∞-aspect に関する subconvexity bound が（基礎体の不分岐 L 函数に対する subconvexity bound in t-aspect の成立を条件として）得られる。

定理 4 ([18]) $\mathfrak{n}$ を固定された平方自由イデアルとする。「tempered パラメーターの空間」$(i\,\mathbb{R}_+^\times)^{P_\infty}$ に含まれる閉錘 J に対して、

$$\mathcal{F}(\mathfrak{n}, J) = \{\pi \in \Pi_{\rm cus}(\mathfrak{n}) \,|\, \{\nu_v(\pi)\}_{v \in P_\infty} \in J\,\}$$

とおく。このとき、

$$L_{\rm fin}(1/2, \pi) \ll_{\mathfrak{n}, J, \epsilon} C(\pi)^{1/4-\theta}, \quad \pi \in \mathcal{F}(\mathfrak{n}, J)$$

なる評価式が成立する。ただし、θ は、 $F^\times$ の任意の不分岐イデール類群指標 χ に対して

$$L_{\rm fin}(1/2, \chi) \ll C(\chi)^{1/4-\delta}.$$

を満たす定数 $\delta \in \mathbb{R}$ によって

$$\theta = \inf\left(\frac{1}{4[F:\mathbb{Q}]}, \delta\right)$$

で定義される。従って、もし $\delta > 0$ であれば subconvexity bound $\mathrm{P}(\mathcal{F}(\mathfrak{n}, J); 1/4 - \theta)$ が成立する。

注意: π とテータ表現 Θ_η の Rankin-Selberg L-函数の中心値 $L_{\rm fin}(1/2, \pi)\, L_{\rm fin}(1/2, \pi \otimes \eta)$ に対しては、π の導手と η の導手の双方を変動させた場合の hybrid subconvexity bound も得られる。

3　結び

我々は、総実代数体上で考えた PGL_2 上の保型表現の分裂トーラスに沿った周期積分を内包する相対跡公式を、表現の不分岐パラメータ空間上のテスト函数の汎函数として

明示的に記述した。その結果、公式の幾何サイド（軌道積分）の情報をスペクトラルサイド（L 函数値）に反映させることで、佐竹パラメーターの加重等分布性や中心 L 値の subconvexity bound に対する応用があることを見た。逆に、スペクトラルサイドの情報を幾何サイドに反映させるような方向の応用はありうるだろうか。この観点から、$\mathbb{J}_{\rm hyp}(\alpha)$ から生じる多変数函数

$$\mathbf{s}=(s_v)_{v\in P_\infty}\mapsto \sum_{b\in\mathfrak{o}_F-\{0,-1\}}\tau_F(b)\tau_F(b+1)\{\prod_{v\in P_\infty}I(s_v;b)\}$$

の性質を調べることは興味深いように思われる。この函数は Selberg zeta 函数の対数微分の類似物と見做すことが出来る。$F=\mathbb{Q}$ の場合の所謂 binary divisor function の漸近式 ([13]) の総実代数体への一般化をこの文脈で期待するのは自然ではないだろうか。

参考文献

[1] Baruch, E.M., Mao. Z., *Central values of automorphic L-functions*, Geom. funct. anal. **17** (2007), 333–384.

[2] Bruinier, J., *Borcherds products on $O(2,l)$ and Chern classes of Heegner divisors*, Lecture Notes in Math. **1780**, Springer, 2002.

[3] Feigon, B., Whitehouse, D., *Averages of central L-values of Hilbert modular forms with an application to subconvexity*, Duke. Math. J., **149** (2009), 347–410.

[4] Hirzeburch, F., Zagier, D., *Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus*, Invent. Math. **36** (1976), 57–113.

[5] Ichino, A., Ikeda, T., *On the periods of automorphic forms on special outhogonal groups and the Gross-Prasad conjecture*, Geom. Funct. Anal. **19** no.5 (2010), 1378–1425.

[6] Jacquet, H., *Sur une résultat de Waldspurger*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. **19** (1986), 185–229.

[7] Jacquet, H., *On the nonvanishing of some L-functions*, Proc.Indian. Acad. Sci. **97**, (1987) 117–155.

[8] Jacquet, H., *Automorphic spectrum of symmetric spaces*, Representation theory and automorphic forms (Edinburgh, 1996), 443–455, Proc. Sympos. Pure Math. **61**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, (1997).

[9] Jacquet, H., Chen, N., *Positivity of quadratic base change L-functions*, Bulltin de la Societe Mathematique de France **129**, No.1, (2001), 33–90.

[10] Kudla, S.S., Milson, J.J., *The theta correspondence and harmonic forms. II*, Math. Ann. **277** (1987), 267–314.

[11] Michel, P., Venkatesh, A., *The subconvexity problem for* GL_2, Publ. I.H.E.S., **111** (2010), 171–271.

[12] Motohashi, Y,. *Spectral mean values of Maass waveform L-functions*, J. Number Theory **42** (1992), 258–284.

[13] Motohashi, Y,. *The binary additive divisor problem*, Ann. Sci. de l'É.N.N.S. 4 série, **27**, no.5 (1994), 529–572.

[14] D. Ramakrishnan, J. Rogawski, *Average values of modular L-series via the relative trace formula*, Pure and Appl. Math. Q. **1** No.4, 701-735, 2005.

[15] Oda, T., *Periods of Hilbert modular surfaces*, Progress in Math. Vol. 19, 123 p., Birkhäuser Boston, 1982.

[16] Oda, T., Tsuzuki, M., *The secondary spherical functions and Green currents associated with certain symmetric pair*, Pure Appl. Math. Q. 5 (2009), 977–1028.

[17] Sugiyama, S., *Asymptotic behaviors of means of central values of automorphic L-functions for* $GL(2)$ *with arbitrary level*, (2012 preprint).

[18] Tsuzuki, M., *Spectral square means of central values of automorphic L-functions for* GL(2), (2010 preprint).

[19] Waldspurger, J.L., *Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie,* Compositio Math. **54** no.2 (1985), 173–242.

[20] Zhan, W., *Automorphic period and the central values of Rankin-Selberg L-functions* (preprint, 2012). *Fourier transform and the global Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups* (preprint, 2012)