代数曲線とクリフォード指数

徳島大学総合科学部
大渕　朗
e-mail:ohbuchi@ias.tokushima-u.ac.jp

1　クリフォード指数の定義

C を複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義された種数 g の代数曲線として $\mathcal{L}$ を C 上の直線束、$d = \deg \mathcal{L}$ をその次数、$r = \dim \mathit{\Gamma}(C, \mathcal{L}) - 1 = \dim |\mathcal{L}|$ を $\mathcal{L}$ で定義される完備線型系の射影次元とする。ここで先ずクリフォード指数の定義をしておく。

定義 1.1 C 上の直線束 $\mathcal{L}$ に対するクリフォード指数 Cliff $(\mathcal{L})$ を

$$\mathrm{Cliff}\ \mathcal{L} = d - 2r$$

と定義する。

この値は線束 $\mathcal{L}$ が non-special(i.e. $h^1(C, \mathcal{L}) = 0$) の場合は $\mathrm{Cliff}\,\mathcal{L} \leq g-2$ の勝手な値を取らせる事が可能であるし、$h^1(C, \mathcal{L}) \neq 0$ でも $h^1(C, \mathcal{L}) = 1$ であれば $0 \leq \mathrm{Cliff}\ \mathcal{L} \leq g-2$ の勝手な値を取らせる事が可能である。勿論リーマン・ロッホの定理により $h^0(C, \mathcal{L}) = 0$ や $h^0(C, \mathcal{L}) = 1$ の場合も同様なことが起きる。従ってこう言った場合は本質的とは言えないのであるが $h^0(C, \mathcal{L}) \geq 2$ かつ $h^1(C, \mathcal{L}) \geq 2$ の場合は簡単ではない。このような事情を受けて代数曲線のクリフォード指数と言う概念も定義される。

定義 1.2 代数曲線 C に対するクリフォード指数 Cliff C を

$$\mathrm{Cliff}\ C = \min\{\mathrm{Cliff}\ \mathcal{L} \mid h^0(C, \mathcal{L}) \geq 2, h^1(C, \mathcal{L}) \geq 2\}$$

と定義する。

クリフォード指数はクリフォードの定理と呼ばれる肺結核で若死にした英国の数学者クリフォード（William Kingdon Clifford, 1845-1879）の1878年の論文 [2] の結果に基づくもので (論文 p.681 の一行目参照のこと) 現在では以下のように記述される。オリジナルの論文では等号条件について、ここまで詳しくは書いていない。

定理 1.3　$\mathcal{L}$ を代数曲線上の *special line bundle(i.e.* $h^1(C,\mathcal{L}) \neq 0$*)* の時 Cliff $\mathcal{L} \geq 0$ となり等号成立は $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}, \mathcal{O}(K_C)$ もしくは C が超楕円曲線で $\mathcal{L}$ が $\mathcal{O}(rg^1_2)$ の形のときに限る。

この記述の中で K_C は標準因子のことで $\mathcal{O}(K_C)$ は ω_C のようにも記述される。また g^r_d と書いているのは次数 d で射影次元が r の（幾つかあるかも知れない）線型系の一つのことである。C が超楕円曲線とは種数 2 以上で C 上に g^1_2 が存在している場合のことである。

この定理の証明は大変易しいので、省略する方が無難なのだが、後の話との関係する部分だけは紹介しておく。

証明: Cliff $\mathcal{L} \geq 0$ であることを示す。C 上の完備線型系 $|\mathcal{L}|$ とその双対 $|\omega \otimes \mathcal{L}^{-1}|$ について有限射

$$\phi : |\mathcal{L}| \times |\omega \otimes \mathcal{L}^{-1}| \to |\omega|$$

が $\phi(D,E) = D + E$ で定義できるので

$$h^0(C,\mathcal{L}) + h^0(C, \omega \otimes \mathcal{L}^{-1}) \leq g$$

となり、これとリーマン＝ロッホの定理を併せれば Cliff $\mathcal{L} \geq 0$ を得る。だから Cliff $\mathcal{L} = 0$ と ϕ が全射であるのは同じ意味になる。ここで $|\mathcal{L}| \neq \emptyset, |\omega \otimes \mathcal{L}^{-1}| \neq \emptyset$ の時に ϕ が全射であるとすると、全ての $F \in |\omega|$ が $F = E + D$ 但し $E \in |\mathcal{L}|, D \in |\omega \otimes \mathcal{L}^{-1}|$、と書ける。ここで C が非超楕円曲線であれば線型系 $|\omega|$ は埋め込みを与えているので、ベルチニ型定理から一般の元 $F \in |\omega|$ は g 個の線型独立な点を含む。更に $F \in |\omega|$ が一般だと $U \subset (\mathbb{P}^{g-1})^*$ を $C \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ と transversal に交わる超平面全体の開集合として $I = \{(p,H) \in C \times U \mid p \in H\}$ とすれば、射影 $I \to U$ が $2g-2$ 重被覆 なので、固定された $H_0 \in U$ に対して $C \cap H_0 = \Gamma_0$ として、この被覆 $I \to U$ に関するモノドロミー作用 $\pi_1(U, H_0) \to \mathrm{Aut}(\Gamma_0)$ が決まる。このとき以下が知られている。

補題 1.4 モノドロミー作用 $\pi_1(U, H_0) \to \mathrm{Aut}(\Gamma_0)$ は *full symmetric*。

ここで $F=E+D\in|\omega|$ を一般にとれば、その中の或る g 個の点が線型独立であったから先の補題 1.4 により F が更に充分に一般であれば勝手な F の g 個の点が線型独立になる。特に E と D のどの g 個の点も線型独立になる (Uniform Position Theorem,[3]p.112 を参照)。しかし Geometric 版 Riemann Roch の 定理により $\dim\overline{D}=g-r,\dim\overline{E}=r$ となるのでこれらの点は g 個が線型独立になり得ない。

証明終

この定理の証明の後半部分は実質的には Cliff $C=0$ の場合に C が超楕円曲線になるという内容である。この定理の証明のキーは

1. $h^0(C,\mathcal{L})+h^0(C,\omega\otimes\mathcal{L}^{-1})$ の評価式
2. 代数曲線の超平面切断 $\Gamma=H\cap C$ の満たす条件

の二箇所である。1. の評価式は単純な計算によって

$$h^0(C,\mathcal{L})+h^0(C,\omega\otimes\mathcal{L}^{-1})=g+1-\mathrm{Cliff}\ (\mathcal{L}) \qquad (*)$$

と一般化できる。また、2. に関して、Γ の満たす条件を考える事は Cliff $C=0$ の場合だけに限らず Cliff $C\geq 1$ の場合にも有効で、代数曲線の birational な射影モデルのヒルベルト関数 $h_\Gamma(n)$(特に $h_\Gamma(2)$) の性質を調べることで幾つかの結果が得られる。本稿ではこの内容を受けて 1. の評価式との関係の強い代数曲線上の normal generation についての話題、2. の内容と関連して Green 予想 (または Green 予想) の話題、更にクリフォード指数による代数曲線の分類理論の話題などを取り上げることにする。

2 Green 予想

第 1 節で述べたような代数曲線の birational な射影モデルの超平面切断 $\Gamma=H\cap C$ の満たす条件がクリフォード指数とどのように関わるかもう少し見てみたい。典型的な例として Cliff $C=1$ を考えることにする。良く知られた事実として以下がある。

定理 2.1 Cliff $C=1$ をであれば C は *trigonal(base point free な* g^1_3 *を持つ)* か平面 5 次曲線のどちらかである。

この証明の概略を $h_\Gamma(2)$ との関わりで見てみる。Cliff $C=1$ であると g^r_{2r+1} は必ず base point free でなければならない。今、これが birational でなければ直ちに g^1_3 が存在するので $|K_C - g^1_3|$ を考えれば birational な g^r_{2r+1} が構成されるので、birational で base point free である g^r_{2r+1} は必ず存在している。この g^r_{2r+1} から決まる写像 $C \to \mathbb{P}^r$ による超平面切断 $\Gamma = C \cap H \subset H = \mathbb{P}^{r-1}$ は $h_\Gamma(2) = 2r-1$ であることが [3]p.115-p.116 の計算をなぞる事で得られる。この時以下が知られる。

補題 2.2 (Castelnuovo) $d = \deg \Gamma$,$r \geq 3$ で $d \geq 2r+1$ の場合に $h_\Gamma(2) = 2r-1$ であれば $\Gamma \subset \mathbb{P}^{r-1}$ は唯一つの *rational normal curve*X_Γ に含まれる。

ここで $S = \overline{\bigcup_\Gamma X_\Gamma} \subset \mathbb{P}^r$ とすれば S は $\deg(S) = \mathrm{codim} S + 1$ の 曲面になるので rational normal scroll $(\mathbb{P}(\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)), \mathcal{O}(1))$ か Veronese surface $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))$ であり C は S の因子になっているので C の因子類の決定は容易であり、前者の場合は C は S と $\mathbb{P}^r$ の三次超曲面との交点として得られる、後者の場合も同じく平面五次曲線と解る。このようにして定理 2.1 を得る事ができる。

いづれにしても、これらは $h_\Gamma(2) = 2r-1$ であることから特殊な曲面 S が構成出来た事が大きいが、この曲面は C を含む二次式の共通零点として定義出来るものであった。この内容を更に一般的な状況で扱おうとすると Cliff $(C) = c$ としてクリフォード指数を与える線型系 g^r_{2r+c} か $K_C - g^r_{2r+c}$ を考え (どちらかが base point free で birational になるのは容易に解るので)、birational になる線型系 g^r_{2r+c} について同じく $h_\Gamma(2)$ を考えるというものである。Cliff $(C) = 1$ の場合に補題 2.2 が成立したのが大きかったが、ここに於いて X_Γ は Γ 上で 0 になる $\Gamma(\mathbb{P}^{r-1}, \mathcal{O}(2))$ の元の交点として定義されている。この X_Γ が種数 0 でなければいけない理由の一つとして $h_\Gamma(2) = 2r-1$ なので X_Γ を定義する Γ 上で 0 になる $\Gamma(\mathbb{P}^{r-1}, \mathcal{O}(2))$ の元の次元が $\begin{pmatrix} r+1 \\ 2 \end{pmatrix} - (2r-1) = \dfrac{(r-1)(r-2)}{2}$ となっていて、$\mathbb{P}^1$ の埋め込み $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{r-1}$ の像を含む $\mathbb{P}^{r-1}$ 二次式の次元が同じ値になることが (i.e.$h_\Gamma(2) = 2r-1 = 1 + 2(r-1) - 0$ が $\mathbb{P}^1$ 上での $\mathcal{O}(r-1)$ のリーマン・ロッホの定理の式と同じ形であることが) その理由の一つである。これは偶然ではなく、$h_\Gamma(2) = 2r-2 = 1 + 2(r-1) - 1$ で H が充分一般なら $\Gamma = H \cap C$ は elliptic curve に乗ることが解る (Harris [10]p.103Proposition (3.19) と p.106 Proposition (3.20))。更にこの拡張を目指した議論も存在

していて Harris [10] の 3.c 節と 3.d 節 (p.115-p.135) を参照頂きたい。いづれにしても g^r_{2r+c} か $K_C - g^r_{2r+c}$ で与える birational な C の射影モデルの二次式と言うのは興味深い内容と関わっている。

Green 予想と言うのは同じ二次式の持つ性質に関する予想であるが射影モデルは C の canonical embedding で構成されるモデルに対して考えられているものである。この場合でも Cliff $(C) = 1$ に関しては補題 2.2 から得られた結果と非常に類似する有名な Enriques-Petri の定理が知られている。

定理 2.3 (Max Noether) *C が non-hyperellptic であれば ω_C は normally generated である*

定理 2.4 (Enriques-Petri) *C が non-hyperellptic であれば ω_C による埋め込み $C \to \mathbb{P}^{g-1}$ は ideal 論的に二次式と三次式で生成され、更に Cliff $(C) \geq 2$ であることが C が二次式だけで生成される必要充分条件である。また Cliff $(C) = 1$ の時 C を含む二次式全体は rational normal scroll $(\mathbb{P}(\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)), \mathcal{O}(1))$ か Veronese surface $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))$ になる。*

先程も $h_\Gamma(2)$ を調べる研究であったが、ここで、この二次式にどのような意味があるかを解説したい。これに関して Schreyer が良い研究をしていて、実は二次式は二種類に分けて考えてみると良いのである。

Schreyer のアイデアは d-donal curve $C = (C, g^1_d)$ に対して（g^1_d は完備である）加群 $F_i = \Gamma(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}^{\otimes -i})$ と $\Gamma(C, \mathcal{O}(g^1_d))$ の元 σ を与えて $F_{i+1} \supset F_i\sigma$ を $F_{i+1} \supset F_i$ と言う書き方にしておけばフィルトレーション $F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ が考えられて $\dim F_0/F_1 = d-1$, $\dim F_0/F_1 \geq \dim F_1/F_2 \geq \cdots \geq \dim F_i/F_{i+1} \geq \cdots$ なので,

$$e_i = \#\{j \in \mathbb{N} \mid \dim\,(F_{j-1}/F_j) \geq i\} - 1$$

として Maroni 型の不変量 $e_1 \geq \cdots \geq e_{d-1} \geq 0$ が考えられる。定義から直ぐ解る事として $\Gamma(C, \omega_C)$ の基底が $\Gamma(C, \mathcal{O}(g^1_d))$ の基底 $[s, t]$ を使って

$$s^{e_1}\theta_1, s^{e_1-1}t\theta_1, \cdots, t^{e_1}\theta_1$$
$$s^{e_2}\theta_2, s^{e_2-1}t\theta_2, \cdots, t^{e_2}\theta_2$$
$$\cdots$$
$$s^{e_{d-1}}\theta_{d-1}, s^{e_{d-1}-1}t\theta_{d-1}, \cdots, t^{e_{d-1}}\theta_{d-1}$$

と書ける。但し θ_j は F_{e_j} の元で $F_{e_j+1} \subset F_{e_j}$ に含まれていない元としている。この基底は明らかに $d-1$ 次元の scroll $\mathbb{P}(\mathcal{O}(e_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}(e_{d-1}))$ で構造射 $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{O}(e_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}(e_n)) \to \mathbb{P}^1$ に対して $\pi_*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{O}(e_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}(e_{d-1})$ となる tautological bundle の global section $\Gamma(\mathcal{O}(1))$ の元と見なす事のできるものであるので scroll $\mathbb{P}(\mathcal{O}(e_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}(e_{d-1}))$ の完備線型系 $|\mathcal{O}(1)|$ による像を $S(e_1,\cdots,e_{d-1})$ と書けば

$$C \subset S(e_1,\cdots,e_{d-1}) \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

が成り立つ。また良く知られているように $S(e_1,\cdots,e_{d-1})$ は定義イデアルが二次式で生成されている（藤田 [7]p.171 Theorem 4.1 d) を使う)。 これにより $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ を定義する二次式には $S(e_1,\cdots,e_{d-1})$ を定義するものと、そうでない二次式の二種類が存在していることになる。

$S(e_1,\cdots,e_{d-1})$ を定義する二次式は解りやすい求め方が存在している即ち $S(e_1,\cdots,e_{d-1})$ は determinantal variety と捉えることが出来る (Harris [3] p,96 など参照) ので、n 次元の scroll の構造射 $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{O}(e_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}(e_n)) \to \mathbb{P}^1$ に対して $\pi_*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(e_1)\psi_1 \oplus\cdots\oplus \mathcal{O}(e_n)\psi_n$ と frame を決めて $\Gamma(\mathbb{P}(\mathcal{O}(e_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}(e_n)), \mathcal{O}(1))$ の基底を

$$[t^i s^{e_j-i}\psi_j \mid 0 \le i \le e_j, j = 1,\cdots,n]$$

と書いて $X_i^{(j)} = t^i s^{e_j-i}\psi_j$ と置けば

$$M_{e_1,\cdots,e_n} \begin{pmatrix} X_0^{(1)} & \cdots & X_{e_1-1}^{(1)} & \cdots & X_0^{(n)} & \cdots & X_{e_n-1}^{(n)} \\ X_1^{(1)} & \cdots & X_{e_1}^{(1)} & \cdots & X_1^{(n)} & \cdots & X_{e_n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

の $(2,2)$ 小行列式全体が $\mathbb{P}(\mathcal{O}(e_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}(e_n))$ の $|\mathcal{O}(1)|$ による写像の像 $S(e_1,\cdots,e_n)$ の定義方程式になる。特に $f = e_1+\cdots+e_n$ として $\rho : \mathcal{O}(-1)^{\oplus f} \to \mathcal{O}^{\oplus 2}$ を $M_{e_1,\cdots,e_n}$ で定義した $\mathbb{P}^r = \mathbb{P}(\Gamma(\mathcal{O}(1)))$ 上のベクトル束の間の写像とすれば $S(e_1,\cdots,e_n)$ は determinantal variety $\left(\mathbb{P}^r\right)_1(\rho)$(記号は Harris [3] p.83 に従っている) である。当然の事ながら

$$C \subset S(e_1,\cdots,e_{d-1}) \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

の関係から $C \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}(e_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}(e_{d-1}))$ と見て、この上で C の resolution を求めれば $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ を定義する二次式の詳細な情報が得られる。幸いな事に determinantal variety 上では以下の様な有名 complex が知られている (Eisenbud [5]p.222-p.226)。

定義 2.5 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ を variety V 上の vector bundle で rank$\mathcal{F}=f$,rank$\mathcal{G}=g$ であり $f\geq g$ とする。$\rho:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ を $\mathcal{O}$ 加群としての準同型として

$$\mathcal{C}_j^b=\begin{cases}\bigwedge^g\mathcal{G}^\vee\otimes \mathrm{S}^{j-b-1}\mathcal{G}^\vee\otimes\bigwedge^{g+j-1}\mathcal{F} & (j>b)\\ \bigwedge^j\mathcal{F}\otimes\mathrm{S}^{b-j}\mathcal{G} & (j\leq b)\end{cases}$$

として $j\leq b$ のとき

$$\mathcal{C}_j^b\overset{id\otimes\rho\otimes id}{\to}\bigwedge^j\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}^\vee\otimes\mathcal{G}\otimes\mathrm{S}^{b-j}\mathcal{G}\overset{L\otimes L}{\to}\mathcal{C}_{j-1}^b$$

$j=b+1$ のとき

$$\mathcal{C}_{b+1}^b\overset{id\otimes\wedge^g\rho\otimes id}{\to}\bigwedge^g\mathcal{G}^\vee\otimes\bigwedge^g\mathcal{G}\otimes\bigwedge^g\mathcal{F}^\vee\otimes\bigwedge^{g+b}\mathcal{F}\overset{L\otimes L}{\to}\mathcal{C}_b^b$$

$j>b+1$ のとき

$$\mathcal{C}_{j+1}^b\overset{id\otimes id\otimes\rho\otimes id}{\to}\bigwedge^g\mathcal{G}^\vee\otimes\mathrm{S}^{j-b}\mathcal{G}^\vee\otimes\mathcal{G}\otimes\mathcal{F}^\vee\otimes\bigwedge^{g+j}\mathcal{F}\overset{id\otimes\mu^*\otimes L}{\to}\mathcal{C}_j^b$$

で与える。但し μ^* は $\mu:\mathrm{S}^{j-b-1}\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}\to\mathrm{S}^{j-b}\mathcal{G}$ の dual $\mu^*:\mathrm{S}^{j-b}\mathcal{G}^\vee\otimes\mathcal{G}\to\mathrm{S}^{j-b-1}\mathcal{G}^\vee$ であり、$\rho\in\mathcal{F}^\vee\otimes\mathcal{G},\wedge^g\rho\in\bigwedge^g\mathcal{F}^\vee\otimes\bigwedge^g\mathcal{G}$ と見ており、L は標準的な写像 $L:\bigwedge^j\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}\to\bigwedge^{j-1}\mathcal{F},L:\mathcal{G}\otimes\mathrm{S}^{b-j}\mathcal{G}\to\mathrm{S}^{b-j+1}\mathcal{G}$ である。このようにして決まる complex を $\mathcal{C}^b$ と書き Eagon-Northcott complex と言う。即ち

$$\mathcal{C}^b:\cdots\to\mathcal{C}_{j+1}^b\to\mathcal{C}_j^b\to\mathcal{C}_{j-1}^b\to\cdots\to\mathcal{C}_0^b$$

今 $X=S(e_1,\cdots,e_n)$ として $\mathcal{O}(1)=\mathcal{O}(H)$,$R$ を π のファイバーとして若干面倒ではあるが $f=e_1+\cdots+e_{d-1}$ として

$$\mathcal{C}_j^b=\begin{cases}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-j-1)^{\oplus(j-b-1)\binom{f}{j+1}} & (j>b)\\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-j)^{\oplus(j-b+1)\binom{f}{j}} & (j\leq b)\end{cases}$$

は定義より求める事が出来る。簡単の為に $\mathcal{C}_j^b=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(*)^{\oplus\xi_{jb}}$ と書いておくことにする。 これより $\mathcal{C}^b(a)=\mathcal{C}^b\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(a)$ とすると以下が知られる (Eisenbud [5] p.222-226 Appendix 2H,Schreyer [13] p.112 Corollary)。

定理 2.6 写像 $\mathcal{C}^b(a)\to\mathcal{O}_X(aH+bR)\to 0$ は *exact* である。

一方 $C \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(e_{d-1}))$ の resolution は Schreyer が計算しているが (Schreyer [13] p.120 (4.4)Corollary,Corollary に出てくる β_j は同じ論文の p.119 の Lemma 2,f は p.109(1.1) を参照) 特に $d = 3, 4$ の場合は Schreyer の計算結果は 以下の形になっているので曲線 C は scroll の中でそれぞれ hypersurface,complete intersection になっている。

$d = 3$:

$$0 \to \mathcal{O}_P(-3H + (f-2)R) \to \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}_C \to 0$$

$d = 4$:

$$0 \to \mathcal{O}_P(-4H+(f-2)R) \to \mathcal{O}_P(-2H+b_1R) \oplus \mathcal{O}_P(-2H+b_2R) \to \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}_C \to 0$$

但し b_1, b_2 は幾らかの条件を満たす或る数であり (Schreyer [13] p.127-p.128)$P = \mathbb{P}(\mathcal{O}(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(e_{d-1}))$ と書いている。定理 2.6 と併せて以下を得る。

$d = 3$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longleftarrow & \mathcal{O}_C & \longleftarrow & \mathcal{O}_P & \longleftarrow & \mathcal{O}(-3H+(g-2)R) & \longleftarrow & 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}} & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-3)^{\oplus \xi_{0,f-2}} & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-f)^{\oplus \xi_{f-1,0}} & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-f-3) & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

これから mapping cone を取る事で以下の minimal resolution を得る。

$$\begin{aligned}
0 \leftarrow \mathcal{O}_C \leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}} \leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-2)^{\oplus \beta_{12}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-3)^{\oplus \beta_{13}} \leftarrow \cdots \\
\leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-(g-2))^{\oplus \beta_{g-3\ g-2}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-(g-1))^{\oplus \beta_{g-3\ g-1}} \\
\leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-(g+1)) \leftarrow 0
\end{aligned}$$

この場合の様に hypersurface になっている場合は（或いは complete intersection になっている場合も同じく）mapping cone を取ると minimal resolution になる。だから $d=4$ の場合も $d=3$ と全く同じやり方で (しかし大変面倒くさいが) 以下の 様な minimal resolution を得ることが出来るのである。

$$\begin{aligned}0 \leftarrow \mathcal{O}_C \leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}} \leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-2)^{\oplus\beta_{12}} \leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-3)^{\oplus\beta_{23}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-4)^{\oplus\beta_{24}} \\ \leftarrow \cdots \leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-(g-3))^{\oplus\beta_{g-4g-3}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-(g-2))^{\oplus\beta_{g-4g-2}} \\ \leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-(g-1))^{\beta_{g-3g-1}} \leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-(g+1)) \leftarrow 0\end{aligned}$$

一般には mapping cone を取る事で埋め込み $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ の resolution までは得られるが minimal であるかどうかは解らないし、また Schreyer が $d=4$ の場合に b_1, b_2 と書いていた値の $d \geq 5$ に於ける決定も難しい為、この手法だけでは minimal resolution は特定出来ない。以下の事実が解るだけである。(Eisenbud [5]p.182 Proposition 9.5)

命題 2.7 $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ の *minimal resolution* は或る $a \geq 0$ が存在して以下の形になる。

$$\begin{aligned}0 \leftarrow \mathcal{O}_C \leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}} \leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-2)^{\oplus\beta_{12}} \leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-(a+1))^{\oplus\beta_{aa+1}} \\ \leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-(a+2))^{\oplus\beta_{a+1a+2}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-(a+3))^{\oplus\beta_{a+1a+3}} \leftarrow \\ \cdots \leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-(g-2-a))^{\oplus\beta_{g-3-ag-2-a}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-(g-1-a))^{\oplus\beta_{g-3-ag-1-a}} \\ \leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-(g-a))^{\beta_{g-2-ag-a}} \leftarrow \cdots \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-(g-1))^{\beta_{g-3g-1}} \\ \leftarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-1}}(-(g+1)) \leftarrow 0\end{aligned}$$

この図式は通常は betti diagram と呼ばれる β_{ij} の表として提示される (下は $b=g-2-a$ としていて $-$ は 0 のことで β_{ij} が書いてあるのは 0 でない部分)。

	0	1	$\cdots$	a	$a+1$	$\cdots$	$b-1$	b	$\cdots$	$g-3$	$g-2$
β_{ii}	1	$-$	$\cdots$	$-$	$-$	$\cdots$	$-$	$-$	$\cdots$	$-$	$-$
β_{ii+1}	$-$	β_{12}	$\cdots$	β_{aa+1}	β_{a+1a+2}	$\cdots$	β_{b-1b}	$-$	$-$	$-$	$-$
β_{ii+2}	$-$	$-$	$\cdots$	$-$	β_{a+1a+3}	$\cdots$	β_{b-1b+1}	β_{bb+2}	$\cdots$	β_{g-3g-1}	$-$
β_{ii+3}	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	1

ここで $d=3,4$ の場合の計算結果を見て見ると $d=3(\Rightarrow \text{Cliff }(C)=1)$ は $\beta_{13} \neq 0$ であり $d=4(\Rightarrow \text{Cliff }(C)=2)$ は $\beta_{13}=0, \beta_{24} \neq 0$ である。有

名な Petri の定理はこの様な考え方に基づくと以下の様に表現されるのは容易に理解できるのではないかと思う。

定理 2.8 (Enriques-Petri) Cliff $C = 1$ である必要充分条件は $\beta_{13} \neq 0$ である。

Green 予想と言うのはこうやって出てきた β_{ij}(graded Betti number と言う) に関する事実が一般的にも成立するであろうと言う予想であり、詳しく言うと

$$c := \min\{i \mid \beta_{ii+2} \neq 0\}$$

とすると

$$c = \text{Cliff }(C)$$

であろうと言う予想である。これに関して以下は知られている (Aprodu-Nagel [1] p.51 Proposition 4.1 などを参照)。

定理 2.9 $c \leq \text{Cliff } C$

これが証明されるので、4-gonal (Cliff $C = 2$ の場合) の時に $\beta_{13} = 0, \beta_{24} \neq 0$ である事は結果だけなら定理 2.9 の簡単な系になっている。

さて、この予想に関連した Green-Lazarsfeld 予想について少し述べておくことにする。V を体 k 上のベクトル空間として $x \in V^\wedge$ について $\iota_x : \bigwedge^p V \to \bigwedge^{p-1} V$ を

$$\iota_x(v \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p-1}) =< x, v > v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p-1} - v \wedge \iota_x(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p-1})$$

で帰納的に定義した上で $\iota : \bigwedge^p V \to \text{Hom}(V^\wedge, \bigwedge^{p-1} V) \cong \bigwedge^{p-1} V \otimes V$ を

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \mapsto (x \mapsto \iota_x(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p))$$

によって決まる自然な同型とする。今 M を symmetric algebra $S = S^{\cdot}V$ 上の graded module of finite type としておくと

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^p V \otimes M_q \arrow[r, "\iota\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\delta"'] & \bigwedge^{p-1} V \otimes V \otimes M_q \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu"] \\
& \bigwedge^{p-1} V \otimes M_{q+1}
\end{tikzcd}$$

により $\delta : \bigwedge^p V \otimes M_q \to \bigwedge^{p-1} V \otimes M_{q+1}$ を決める、但し $\mu : M_q \otimes V \to M_{q+1}$ は自然な写像である。

定義 2.10 複体

$$\bigwedge^{p+1} V \otimes M_{q-1} \xrightarrow{\delta} \bigwedge^{p} V \otimes M_q \xrightarrow{\delta} \bigwedge^{p-1} V \otimes M_{q+1}$$

によって決まる cohomology 群を $K_{p,q}(M,V)$ と書き Koszul cohomology 群と呼ぶ。特に $(C,\mathcal{L})$ を代数曲線と直線束の組とするとき $V = \Gamma(C,\mathcal{L})$,$M = \oplus_{j\geq 0}\Gamma(C,\mathcal{L}^{\otimes j})$ とした時には $K_{p,q}(M,V)$ を $K_{p,q}(C,\mathcal{L})$ と書く。また coherent module $\mathcal{F}$ について $M = \oplus_{j\geq 0}\Gamma(C,\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes j})$ とした時は $K_{p,q}(M,V)$ を $K_{p,q}(C,\mathcal{F},\mathcal{L})$ と書く。

定義から $K_{p,q}(C,\mathcal{L},\mathcal{L}) = K_{p,q+1}(C,\mathcal{L})$ に注意しておく。M の minimal graded free resolution を $\cdots \to F_i \to \cdots \to F_0 \to M$ として $F_i = \oplus_j S(-j)^{\oplus\beta_{ij}} = \oplus_j M_{ij} \otimes S(-j)$ を満たす β_{ij} 次元のベクトル空間 M_{ij} を決める。この β_{ij} は graded betti number と呼ばれるが、$K_{p,q}(M,V) = K_{p,q}(C,\omega_C)$ の 時は p. 10 で定義した graded betti number そのものである。良く知られているように以下が成立する。

定理 2.11 $K_{p,q}(M,V) \cong M_{p\ p+q}$ である。

詳細は [1] p.6 Proposition 1.12 などを参照のこと。

定理 2.12 $\mathcal{L}$ が *base point free* であって $r = \dim\Gamma(C,\mathcal{L}) - 1$ とすれば

$$K_{p,q}(C,\mathcal{L})^{\wedge} \cong K_{r-p-1,2-q}(C,\omega_C,\mathcal{L})$$

である。

詳細は [1] p.18 Theorem 2.24 などを参照のこと。

$K_{p,q}(M,V) = K_{p,q}(C,\omega_C)$ の時を考えると β_{ij} は

$$\beta_{ij} = \dim K_{i,j-i}(C,\omega_C) = \dim K_{g-2-i,2-j+i}(C,\omega_C,\omega_C)$$

$$= \dim K_{g-2-i,3-j+i}(C,\omega_C) = \beta_{g-2-i,g-j+1}$$

を満たすので $\beta_{p\ p+1} = \beta_{g-2-p\ g-p}$ の関係から Green 予想は $c = \mathrm{Cliff}\ (C)$ と置くなら $\beta_{02} = \beta_{13} = \cdots = \beta_{c-1c+1} = 0 \quad \beta_{c\ c+2} \neq 0$ と言う主張であるのだから $\beta_{g-2-p\ g-p} = 0 \quad c-1 \leq g-2-p,\quad \beta_{c\ c+2} \neq 0$ と書ける。だからこの条件は

$$\beta_{g-2-p\ g-p} = 0 \Longleftrightarrow c \leq g-1-p$$

となり $\beta_{p\ p+1} = \beta_{g-2-p\ g-p}$ の関係から

$$\beta_{p\ p+1} = 0 \Longleftrightarrow c \leq g-1-p$$

即ち定理 2.11 に従って

$$K_{p,1}(C, \omega_C) = 0 \Longleftrightarrow c \leq g-1-p$$

と言う表現になる。

この記述方法に大して Green 予想の拡張の予想と考えられる Green-Lazarsfeld 予想と言うのが存在していて、それは $\mathcal{L}$ を充分に次数の大きな直線束とすれば

$$K_{p,1}(C, \mathcal{L}) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{gon}(C) \leq r+1-p$$

であろうと言うものである。ここで $\mathrm{gon}(C)$ は C のゴナリティーで $r = \dim\Gamma(C, \mathcal{L}) - 1$ である (Aprodu-Nagel [1]p.53。 Eisenbud [5] p.171 では Gonality Conjecture と呼ばれている)。

定義 2.13 C 上の直線束 $\mathcal{L}$ が条件 (M_k) を持つとは $K_{p,1}(C, \mathcal{L}) = 0$ が $p \geq r(\mathcal{L}) - k$ で成立することである。

この定義の用語に従ってこの予想は以下のようにも書き変えられる

$\mathrm{gon}(C) = \min\{k \mid (M_k)$ が $\deg\mathcal{L} >> 0$ である全ての $\mathcal{L}$ について成立しない$\}$

ちなみに以上の話で Green 予想は Lazarsfeld の予想にも関係していて、これも Green-Lazarsfeld の予想と言っても良いもので次節で関連する Lazarsfeld の論文も紹介することになる。

ちなみにこれらの予想は現状では非常に進展していて Aprodu,Farkas, Voisin などの結果がある。

3 normal generation について

C を $\mathbb{C}$ 上定義された代数曲線とする。 $\mathcal{L}$ を C 上の line bundle とする時 $\mathcal{L}$ が normally generated とは以下の条件を満たす時である。

定義 3.1 $\mathcal{L}$ を C 上の line bundle とする時 $\mathcal{L}$ が normally generated とは

$$\Gamma(C,\mathcal{L})^{\otimes n} \to \Gamma(C,\mathcal{L}^{\otimes n})$$

が全ての自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して全射である時である。

この条件は $\mathcal{L}$ が very ample の時に $\mathcal{L}$ による埋め込み $C \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ に於いて $\mathcal{L}^{\otimes n}$ に線型同値な因子は全て埋め込み $C \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ の n 次の超曲面の引き戻しによって得られると言う事を意味する。

一般に ample で normally generated ならば very ample が成立する。実際 $\mathcal{L}$ が ample ならば $\mathcal{L}^{\otimes n}$ が very ample になる n が存在し, 更に normally generated だから $\mathcal{L}^{\otimes n}$ に線型同値な全ての因子が $C \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ による n 次の超曲面の引き戻しによって定義されるので, 以下の可換図式が成立する。

$$\begin{array}{ccc} C & \cdots\to & \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\Gamma(C,\mathcal{L})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}(\Gamma(C,\mathcal{L}^{\otimes n})) & = & \mathbb{P}(\Gamma(C,\mathcal{L}^{\otimes n})) \end{array}$$

ここで $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}(\Gamma(C,\mathcal{L}^{\otimes n}))$ は Veronese embedding である。従ってこの図式から $C \cdots \to \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\Gamma(C,\mathcal{L}))$ も埋め込みにならなくてはいけない事になるから $\mathcal{L}$ は very ample である。

これから normally generated の条件は very ample を含む条件であることが解るが逆が不成立なのは平面曲線の例などから直ぐに解る事なので normally generated は very ample より強い条件である事が解る。この very ample より強い条件である normally generated と言う条件は曲線 C の射影モデルの構成と言う面に於いて定義イデアの決定と言う側面までにも良い貢献が期待できる条件である。つまり normally generated の条件があれば $\mathcal{L}$ による埋め込みの定義イデアル $I \subset S = \mathbb{C}[X_0,\cdots,X_n]$ は

$$S/I = \oplus_{n\geq 0}\Gamma(C,\mathcal{L}^{\otimes n})$$

であるので $I_n = \ker(\Gamma(C,\mathcal{L})^{\otimes n} \to \Gamma(C,\mathcal{L}^{\otimes n}))$ より $I = \oplus_{n\geq 0} I_n$ となるので明確に定義イデアルが与えられる (E.Arbarello, M.Cornalba, P.A.Griffiths, J.Harris [3]p.140 参照)。即ち射影モデルを考えようとする際には極めて有力で重要な条件と見なせるものである。

代数曲線上でこのような normally generated と言う条件が得られるのは $\mathcal{L}$ の次数を d とすると, 藤田-Mumford の定理として知られる以下の結果がある。

定理 3.2 $d \geq 2g+1$ ならば $\mathcal{L}$ は *normally generated* になる。

残念ながら $d \leq 2g$ では実際に反例が構成出来るので上の定理は全ての種数 g の代数曲線に対しては最良の結果になっている。しかし $d \leq 2g$ でも normally generated な例は実際に 存在する為, 次数 d が $2g$ 以下の normally generated な line bundle の決定を完全に行うのは射影モデルを考えようとする際には大事な問題である。この内容に関して以下の Green-Lazarsfeld の結果と言うのがあり、ここでクリフォード指数が非常に重要な役割を果たしている。

定理 3.3 $\mathcal{L}$ は *very ample* であるとする。この時に
$$\deg\mathcal{L} \geq 2g + 1 - 2h^1(C, \mathcal{L}) - \mathrm{Cliff}\ (C)$$
であるとすると
$$\mathcal{L} \text{ は } \textit{normally generated} \text{ である。}$$

この定理は重要な言い換えと言うのがあって、それは上の条件

$$\deg\mathcal{L} \geq 2g + 1 - 2h^1(C, \mathcal{L}) - \mathrm{Cliff}\ (C)$$

が実は条件
$$\mathrm{Cliff}\ (\mathcal{L}) + 1 \leq \mathrm{Cliff}\ (C)$$
と同等だと言う点である。またクリフォード指数の定義を思い出すと

$$h^0(C, \mathcal{L}), h^1(C, \mathcal{L}) \geq 2$$

である $\mathcal{L}$ の中の Cliff $(\mathcal{L})$ の最小値が Cliff (C) なのだから Cliff $(\mathcal{L}) + 1 \leq$ Cliff (C) であれば $\mathcal{L}$ は very ample なので $h^0(C, \mathcal{L}) \geq 2$ は文句なく成立している為 $h^1(C, \mathcal{L}) = 0, 1$ しかあり得ない。

定義 3.4 $\mathcal{L}$ は $h^0(C, \mathcal{L}), h^1(C, \mathcal{L}) \geq 2$ である時にクリフォード指数の定義に貢献していると言う。

定理 3.3 はクリフォード指数の定義に貢献しない因子の中で数値的にもクリフォード指数を下回ってしまう因子は very ample であれば、normal generated を満たすと言う事で、直線束の中でクリフォード指数の定義に貢献する方（これは§1 の Green 予想などに関連していく）とそうでない方（定理 3.3 により代表的な物は normally generated になる）と言う大雑把な区分けが存在していると見なせなくもない。以下この定理の証明の概略を紹介することにする (Green-Lazersfeld [8])。

定理 3.3 の証明の方針：この定理は very ample な直線束 $\mathcal{L}$ が normally generated でないとすると条件 Cliff $(\mathcal{L})+1 \leq$ Cliff (C) に反するという方針で行うものである。もう少し詳しく言うと $\mathcal{L}$ が normally generated でない場合、若干の議論で

$$\Gamma(C,\mathcal{L})^{\otimes 2} \to \Gamma(C,\mathcal{L}^{\otimes 2})$$

が全射でなくなる (ここでも二次式の部分が本質的になっている点が興味深い)。従って dual を取る事で

$$\mu^* : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{L},\omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1}) \to \mathrm{Hom}(\Gamma(C,\mathcal{L}), H^1(C,\omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1}))$$

が単射でなくなるので非自明な拡大

$$\xi : 0 \to \omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1} \to \mathcal{E} \to \mathcal{L} \to 0$$

が構成される。$\mu^*(\xi) = 0$ であるので ($\mu^*(\xi)$ はこの完全列の long exact sequence の connecting homomorphism に対応するのであるから) §1 の ($*$) の式から

$$\dim\Gamma(C,\mathcal{E}) = \dim\Gamma(C,\mathcal{L}) + \dim\Gamma(C,\omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1}) = g+1-\text{Cliff }(\mathcal{L})$$

であることが解る。ここで Ghione または Mukai-Sakai による以下の結果が知られる。

定理 3.5 $\mathcal{F}$ は曲線 C 上の *rank* r のベクトル束とする。今 $\deg\mathcal{F} \geq (r-1)(g-1)$ であれば、或る次数 0 の直線束 ξ が存在して $\dim\Gamma(C,\mathcal{F}\otimes\xi) > 0$ である。

これから rank 2 である vector bundle $\mathcal{E}$ について $\deg A \geq a$ で $2a \leq g-1$ なる subbundle $A \subset \mathcal{E}$ が取れる。良く知られているように Cliff $(C) \leq \dfrac{g-1}{2}$ であるので (ACGH [3] p.206 (1.1)Existence Theorem から容易に計算出来る) 特に subbundle $A \subset \mathcal{E}$ で

$$\deg A \geq \text{Cliff }(C)$$

であるものが取れる。この条件と仮定 $\deg\mathcal{L} \geq 2g+1-2h^1(C,\mathcal{L})-\text{Cliff }(C)$ から $\deg A > \deg\omega\otimes\mathcal{L}^{-1}$ が解る。従って次のような完全列が存在して特に α_A は単射である：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & A \arrow[d] \arrow[dr, "\alpha_A"] & & \\
0 \arrow[r] & \omega\otimes\mathcal{L}^{-1} \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L} \arrow[r] & 0 \\
 & & \omega\otimes A^{-1} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

この様にして出来た A は $A\subset\mathcal{L}$ となるので、正因子 D が存在して $A\otimes\mathcal{O}(D)\cong\mathcal{L}$ となる。ここで $\dim\Gamma(C,\mathcal{E})=g+1-\mathrm{Cliff}\,(\mathcal{L})=\dim\Gamma(C,\mathcal{L})+\dim\Gamma(C,\omega_C\otimes\mathcal{L}^{-1})\le\dim\Gamma(C,A)+\dim\Gamma(C,\omega_C\otimes A^{-1})=g+1-\mathrm{Cliff}\,(A)$ より $\mathrm{Cliff}\,(A)\le\mathrm{Cliff}\,(\mathcal{L})$ である。$\mathrm{Cliff}\,(A)+1\le\mathrm{Cliff}\,(\mathcal{L})+1\le\mathrm{Cliff}\,(C)\le\deg A$ なので $\deg A>\mathrm{Cliff}\,(A)$ より $h^0(C,A)\ge 2$ となる。$h^1(C,A)\ge 2$ の証明はもう少し複雑になるので省略する。これらを併せて $h^0(C,A)\ge 2, h^1(C,A)\ge 2$ であるので

$$\mathrm{Cliff}\,(A)+1\le\mathrm{Cliff}\,(\mathcal{L})+1\le\mathrm{Cliff}\,(C)$$

はクリフォード指数の定義に反している。

概略終

　この定理の拡張については定理 3.2 の拡張の形を取るものが多い。古典的には $d=2g$ の時の本間 [11] による以下の定理がその始まりと言える。

定理 3.6 $d=2g$ の時 $\mathcal{L}$ が *normally generated* にならない必要充分条件 は C が *hyperelliptic curve* である事である。

この形で $d=2g-1$ の時に Green-Lazersfeld [8] は以下の定理を与えている。

定理 3.7 $d=2g-1$ であり $\mathcal{L}$ は *very ample* として $g\ge 4$ とする。 この時 $\mathcal{L}$ が *normally generated* にならない必要充分条件は C が以下の場合である。

1. C が *hyperelliptic curve*

2. C が *trigonal curve* で $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(K_C - g_3^1 + D)$ の形である時 $(D \geq 0)$

3. $C \subset \mathbb{P}^2$ は *smooth plane quintic* で $|B|$ により 埋め込まれている時で $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(B + g_6^1)$

但し $\mathrm{Bs}g_6^1 = \emptyset$ とする。

この形の方向性で定理 3.2 をより低い次数に拡張する試みも色々存在している。それらの中には先の概略で登場した D と言う因子の満たすべき条件である以下の定理にある 1. の数値条件などを用いて拡張を目指すと言う方針の物もある。

定理 3.8 $\mathcal{L}$ は *very ample* であるとして $r = \dim\Gamma(C, (\mathcal{L})) - 1$ で $\deg(\mathcal{L}) = 2g + 1 - k$ とする。今 $e \geq -1$ が $2k + 4e + 1 \leq g$ をみたしたとする。又 $|\mathcal{L}|$ による 埋め込み $C \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ とする。この時 $\mathcal{L}$ が *normally generated* である必要充分条件は $1 \leq n \leq r - 2 - e - h^1(C, \mathcal{L})$ である n と *effective divisor* D が存在して以下の条件が成立する事である。

1. $\deg(D) = d \geq 2n + 2$ で $H^1(C, \mathcal{L}^2(-D)) = 0$

2. $\dim(\overline{D}) = n$ で D は *fails to impose independent conditions on quadratics* を満たす。

但し $\overline{D}$ は $D \subset \mathbb{P}^r$ の *linear span* である。

先の定理 3.7 の証明の概略は、実は大半がこの定理の証明の筋であって、D の構成は先の概略では矛盾を導くための構成の様に見えるが実際はこのような形で提示される。また、先の概略で省略した $h^1(C, A) \geq 2$ の証明は、この条件 1. , 2. により得られると言うストーリーになっている。

さて、この normal generation の条件は環論的にも扱われている (Aprodu-Nagel [1]p.52 Definition 4.15 参照)。

定義 3.9 曲線 C 上の直線束 $\mathcal{L}$ が条件 (N_p) を満たすとは $K_{i,j}(C, \mathcal{L}) = 0$ が全ての $i \leq p$ と $j \geq 2$ に対して成立するときである。

この条件 (N_p) は良く知られた言い換えがある。

定理 3.10 (N_0) である事と $\mathcal{L}$ が *normally generated* は同値である。

Green [9] p.138 (2.a.9)。次は定義そのままである。

定理 3.11 (N_1) である事と $\mathcal{L}$ が *normally generated* でそのイデアルが二次式で生成されることは同値である。

Green は [9] に於いて以下の定理を証明している

定理 3.12 $\deg\mathcal{L} \geq 2g+1+p$ であれば $\mathcal{L}$ は (N_p) の性質を持つ。

Green [9] p.155 Theorem (4.a.1)

ここで、定理 3.7 は (N_0) に関する定理である訳であるから仮定 $\deg(\mathcal{L}) \geq 2g+1-2h^1(C,\mathcal{L}) - \text{Cliff }(C)$ を special divisor にのみ適応させる事を考えれば $h^1(C,\mathcal{L}) = 1$ であった。だから定理 3.7 を以下の様に言う事も出来る。

定理 3.13 $\mathcal{L}$ が *very ample* な *special line bundle* である時
$$\deg(\mathcal{L}) \geq 2g-1-\text{Cliff }(C)$$
であれば $\mathcal{L}$ は (N_0) の性質を持つ。

Green-Lazarsfeld の予想は、この定理の拡張が以下の様に出来ると言う予想である。

予想 3.14 $\mathcal{L}$ が special で very ample line bundle であるとき

$$\deg(\mathcal{L}) \geq 2g-1+p-\text{Cliff }(C)$$

の時に $\mathcal{L}$ は性質 (N_p) を持つ

詳しくは Aprodu-Nagel [1] p.54 Conjecture 4.29 を参照のこと。

しかしながら、この予想は元々は Green-Lazarsfeld [8] に於いて、定理 3.7 の拡張が成り立つであろうと言う予想の形であって以下の主張が元々の形である (Green-Lazarsfeld [8] p.86 (3.4)Conjecture または Aprodu-Nagel [1] p.54 Conjecture 4.31)。

予想 3.15 $\mathcal{L}$ が very ample line bundle であるとき $\mathcal{L}$ が $(p+2)$-secant p-plane を持たない埋め込みであれば

$$\deg(\mathcal{L}) \geq 2g+1-2h^1(C,\mathcal{L})+p-\text{Cliff }(C)$$

の時に $\mathcal{L}$ は性質 (N_p) を持つ

この予想は Texiador などが非常に 優れた仕事をしている。

4　クリフォード指数による代数曲線の分類

クリフォード指数の環論的な側面ばかり述べたが、実際はクリフォード指数は素朴な概念で、本来的には代数曲線の分類に使う物と考えた方が良い物である。既に登場しているが代数曲線にはゴナリティーと言う重要な概念があって、前後してしまうが一応定義を述べると以下の通りである。

定義 4.1 C のゴナリティー $\mathrm{gon}(C)$ は

$$\mathrm{gon}(C) = \min\{d \mid \exists g^1_d\}$$

で決める。$d = \mathrm{gon}(C)$ として C を d-gonal curve と呼ぶ。

これは C から $\mathbb{P}^1$ への被覆の最小次数である。この $\mathrm{gon}(C)$ と Cliff (C) との関係は以下の定理として知られている。

定理 4.2 (Coppens-Martens) 代数曲線 C 上に関して $c = \mathrm{Cliff}\ (C)$ とすると

$$\mathrm{gon}(C) = c + 2 \quad \text{または} \quad c + 3$$

である.

証明は Coppens-Martens [4] p.199 2.3 THEOREM (とその三行前の説明) を参照のこと。

この中で $\mathrm{gon}(C) = c + 2$ の場合はゴナリティーを与える写像 $C \to \mathbb{P}^1$ に対応した直線束 $\mathcal{L}$ が Cliff $(C) = \mathrm{Cliff}\ (\mathcal{L}) = c$ を満たたすと言う事なので事実上 Cliff (C) と $\mathrm{gon}(C)$ の違いは数値上の 2 だけで、ほぼ同一の概念になっている。問題は $\mathrm{gon}(C) = c + 3$ の場合で、これがどのような代数曲線があり得るかを考えてみれば良い事になる。両者に違いが出ている例としては非特異平面曲線が最も典型的な例である。

即ち非特異平面曲線 $C \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ を考えてみると以下が知られる。

定理 4.3 (**難波**) $C \subset \mathbb{P}^2$ を次数 d の非特異平面代数曲線とすると $\mathrm{gon}(C) = d - 1$ である。

詳しくは難波 [12] p.372 Theorem 5.3.17 の中の 1. を参照のこと。

この場合 Cliff $(g^2_d) = d - 4$ であり Cliff $(C) \leq \mathrm{Cliff}\ (g^2_d) = d - 4$ なのでこの定理 4.3 と定理 4.2 により $\mathrm{gon}(C) = c + 3 = d - 1$ でないといけなく

なるので Cliff $(C) =$ Cliff $(g_d^2) = d-4$ となる。勿論 $\mathrm{gon}(C) = d-1$ なので (定理 4.3 による)$C \to \mathbb{P}^1$ に対応した直線束で，そのクリフォード指数が $d-4$ のものは存在しない。従って非特異平面曲線 C は Cliff $(C) =$ Cliff (g_d^2) であってクリフォード指数に貢献する直線束 $\mathcal{O}(g_e^r)$(定義 3.4) の中で Cliff $(C) =$ Cliff (g_e^r) である r の最小値は 2 でなければ いけなくなる。

一般に $\mathrm{gon}(C) = c+3(c =$ Cliff $(C))$ であれば Cliff $(C) =$ Cliff (g_e^r) である r は $r \geq 2$ を満たさないといけなくなる。そこで以下を定義する。

定義 4.4 C のクリフォード次元 Cliff-dim(C) を

$$\text{Cliff-dim}(C) = \min\{r \mid g_e^r \text{は Clifford 指数に貢献して Cliff } (C) = \text{Cliff } (g_e^r)\}$$

で決める。

明らかに $\mathrm{gon}(C) = c+2 \quad (=$ Cliff $(C)+2)$ である必要充分条件が Cliff-dim$(C) = 1$ であり、Cliff-dim$(C) = 2$ が非特異平面曲線である必要充分条件である。

ここまでは簡単であるが、ここで Cliff-dim$(C) \geq 3$ の場合は存在するかという問題が生じる。それは実は存在している。一番簡単な例は以下である。

例 4.5 $\mathbb{P}^3$ の非特異三次曲面上の $(3,3)$ 完全交叉である種数 10 の非特異代数曲線を C とする。この時 Cliff-dim$(C) = 3$ となっている。

具体例が実際に Cliff-dim$(C) = 3$ である理由はそこまで難しいものではない。それは D を $C \subset \mathbb{P}^3$ の超平面切断とすれば Cliff $(\mathcal{O}(D)) = 3$ なので、もし Cliff $(\mathcal{L}) = 3$ となる pencil が存在した場合は (net が存在した場合は種数が合わない)base point free pencil trick により 4-secant line L が $C \subset \mathbb{P}^3$ に構成出来るため 4-secant と言う事より三次曲面の 27 本の直線でなければならず C の三次曲面上の因子類と 27 本の直線の交点数が 4 にならない（実際は 3 になるので）ことよりすぐ矛盾が生じるからである。Cliff $(C) \leq 2$ であった場合は同じ根拠で 5-secant line や 6-secant line が出来るので同様に矛盾する。従ってこの例は Cliff-dim$(C) = 3$ である。この場合の $\mathrm{gon}(C) = c+3 = 6$ を与える被覆面 $C \to \mathbb{P}^1$ は $\mathbb{P}^3$ 内の (C を含む) 非特異な三次曲面に存在する有名な 27 本の (-1) 曲線を中心とした射影 $\mathbb{P}^3 \cdots \to \mathbb{P}^1$ で与えられている。C を含む三次曲面の族はペンシルであるので g_6^1 は一次元の族をなしている。

現時点において Cliff-dim$(C) \geq 3$ の代数曲線は未だ完全には分類されていなくて ELMS 予想として知られる以下の予想の段階である。この予想はよく知られているように Cliff-dim$(C) \leq 9$ の場合のみが肯定的に解決されている (Eisenbud-Lange-Martens- Schreyer [6])。

予想 4.6 $r = \text{Cliff-dim}(C) \geq 3$ であれば C は以下になる:
（１） C の種数 g は $4r-2$，また Cliff $(C) = 2r-3$
（２） 次数 $g-1$ の直線束 $\mathcal{L}$ が存在して Cliff $(C) =$ Cliff $\mathcal{L}$．この ような直線束はただ一つ
（３） $\mathcal{L}^{\otimes 2} \cong \omega_C$ であり $\mathcal{L}$ は埋め込み $C \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ を与えて，この埋め込みは arithmetically Cohen-Macauley である
（４） $\text{gon}(C) = 2r$ で $\text{gon}(C)$ を与える直線束は一次元の族をなす

この予想は現在進展があったと言う話を全く聞かない。Cliff-dim$(C) \leq 9$ の場合までの証明は非常に興味深いものである (Eisenbud-Lange- Martens-Schreyer [6])。概略は Clifford 指数に貢献する因子 g_d^r について $d-2r =$ Cliff (C) であるならそこに $(2r-2)$-secant $(r-2)$-plane が存在しない事が $r = \text{Cliff-dim}(C)$ の必要充分条件だと解るのでその Cayley 数を ACGH [3] の Macdonald の公式 ([3] p.350) を用いて計算する。$(2r-2)$-secant $(r-2)$-plane の virtual 数である Cayley 数は

$$C(d,g,r) = \sum_{i=0}^{r} \frac{(-1)^i}{r-i} \binom{d-r-i+1}{r-1-i} \binom{d-r-1}{r-1-i} \binom{g}{i}$$

と求められ (ELMS [6]p.178) virtual 数とは言え、存在しなければ 0 になるので、上の形の不定方程式の解を $r \leq 9$ まで求め、その中で条件に当てはまらない物は全て非存在を示し、存在するべき所はちゃんと具体例を作っているのである。非常に煩雑で難しく、今日でも全く拡張されていないのも理解できる。

さて、この予想から曲線の分類が出来るのであるが、それは以下の方法による。

定理 4.7 (Coppens-Martens) *C は hyperelliptic でもなく bielliptic(elliptic curve の二重被覆) でもないと仮定する。今 Cliff $(C) = c$ として、$g > 2c+4$(c は奇数の場合), $g > 2c+5$(c は偶数の場合) と仮定すると g_d^r が Cliff $(\mathcal{O}(g_d^r)) = c$ でかつ $d \leq g-1$ を満たすなら*

$$d \leq \frac{3(c+2)}{2}$$

である。

証明は Coppens [4] p.205 3.2.5 COROLLARY を参照のこと。

この定理 4.7 から代数曲線の $c \leq 33$ までの分類が与えられることになる。それは以下のように行う。C を hyperelliptic でもなく bielliptic でもないとする。そこで Cliff $(\mathcal{O}(g_d^r)) = c$ を勝手に取ってきて $d \geq g-1$ ならば $\omega \otimes \mathcal{O}(g_d^r)^{\otimes -1}$ を考えることで $d \geq g-1$ と出来るので $d \leq g-1$ と仮定して差し支えない。さて $d-2r=c$ であるので定理 4.7 から $c+2r \leq \dfrac{3(c+2)}{2}$ となるので

$$r \leq \frac{c+6}{4}$$

である。だから $\dfrac{c+6}{4} < 10$ であれば ELMS 予想が正しいので代数曲線は以下の三タイプになる。

1:$(c+2)$-gonal curve
2:平面 $c+4$ 次曲線
3:ELMS 型の曲線

$\dfrac{c+6}{4} < 10$ は $c \leq 33$ と同値なので $c \leq 33$ まで分類が出来たことになる。

参考文献

[1] Aprodu, M., Nagel, J., Koszul Cohomology and Algebraic Geometry, AMS, 2010

[2] Clifford, W. K., On the Classification of Loci, Philosophical Transactions of the Royal Society of London 169: 663–681, (1878) : JSTOR 109316 で閲覧可能

[3] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P.A., Harris, J. Geometry of Algebraic curves I, Springer-Verlag, 1985.

[4] Coppens, M., Martens, G., Secant spaces and Clifford 's theorem, Compositio Math. 78, no. 2, 193–212. 1991

[5] Eisenbud, D., Geometry of Syzygies, Springer-Verlag, 2005.

[6] Eisenbud, D., Lange, H., Martens, G., Schreyer, F-O., The Clifford dimension of a projective curve. Compositio Mathematica. 72 no.2, 173-204. 1989

[7] Fujita, T., Defining equations for certain types of polarized varieties, in Comple Analysis and Algebraic Geometry, Iwanami, Tokyo, 1977, 165-173.

[8] Green, M. and Lazarsfeld, R., On the projective normality of complete linear series on an algebraic curve, Invent. Math., 83, 73–90. 1986

[9] Green, M., Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, J. Diff. Geom., 19, 125-171. 1984

[10] Harris, J., Curves in projective space, Presses de L'Universite de Montreal. 1982. : この本は既に入手が難しいがこの引用に必要な章は Eisenbud のホームページに"Curves of almost maximal genus"と言うタイトルの原稿としてアップロードされている

[11] Homma, M., On projective normality and defining equations of a projective curve of genus three embedded by a complete linear system, Tsukuba J. Math., 4 269-279. 1980.

[12] M. Namba, Geometry of projective algebraic curves, Marcel Dekker 1984.

[13] F.-O.Schreyer: Syzygies of Canonical Curves and Special Linear Series, Math. Ann., 275, 105-137. 1986