ON TORSION PAIRS ON TRIANGULATED CATEGORIES

中岡 宏行（HIROYUKI NAKAOKA）

Abstract. 三角圏上のねじれ対を用いたアーベル圏の構成について講演を行いましたので，報告致します．ねじれ対によるアーベル圏の構成は t-構造のハート，クラスター傾部分圏による剰余を同時に一般化するものです．前半はこの紹介です．

後者のクラスター傾部分圏による剰余は，Krull-Schmidt な三角圏において Buan と Marsh による一般化がなされました．後半ではねじれ対の概念をペアに拡張して，一般の三角圏上で Buan と Marsh の構成も含む構成を与えます．

1. 導入と準備

三角圏からアーベル圏を生み出すものとして，t-構造とクラスター傾部分圏が挙げられる．三角圏 $\mathscr{T}$ 上の t-構造 $(t^{\leq 0}, t^{\geq 0})$ が与えられると，このハート $t^{\leq 0} \cap t^{\geq 0}$ がアーベル圏となることが [BBD] の頃から知られている．また $\mathscr{T}$ がクラスター傾部分圏 $\mathcal{C}$ をもつとき，イデアル剰余 $\mathscr{T}/\mathcal{C}$ としてアーベル圏が得られることが 2-Calabi-Yau 三角圏の場合に [KR] により示され，[KZ] により一般の三角圏で実行されている．これらの構成は，ねじれ対（[IY]）を用いて同時に一般化される．

クラスター傾部分圏による剰余をとる構成は Buan と Marsh により，$\mathscr{T}$ に対する適切な仮定のもとリジッドな対象 $T \in \mathscr{T}$ を用いた剰余 $\mathscr{T}/\mathrm{add}(T)^{\perp}$ へと拡張されている（[BM]）．本稿の後半では，ねじれ対を用いた構成をペアに拡張することで，Buan と Marsh による構成を一般の三角圏上で議論する．

記号の準備.

(i) **圏 $\mathscr{C}$ に対して．**
X が $\mathscr{C}$ の対象のとき $X \in \mathscr{C}$ と表す．$X, Y \in \mathscr{C}$ に対し，X から Y への射集合は $\mathscr{C}(X, Y)$ で表す．なお，本稿で登場する圏は全て加法圏.

(ii) **加法圏 $\mathscr{A}$ に対して．**
加法圏の部分圏としては，同型と直和因子で閉じた充満加法部分圏のみ扱う．$\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathscr{A}$ が部分圏のとき，任意の $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$ に対し $\mathscr{A}(X, Y) = 0$ となることを $\mathscr{A}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ と略記する．$\mathscr{A}(\mathcal{X}, Y) = 0$ や $\mathscr{A}(X, \mathcal{Y}) = 0$ も同様.
また $\mathcal{X}$ の右直交部分圏 $\mathcal{X}^{\perp} \subseteq \mathscr{A}$ は，$\mathscr{A}(\mathcal{X}, Y) = 0$ を満たす $Y \in \mathscr{A}$ のなす充満部分圏として定義する．左直交部分圏 ${}^{\perp}\mathcal{Y} \subseteq \mathscr{A}$ も同様に，$\mathscr{A}(X, \mathcal{Y}) = 0$ を満たす対象のなす部分圏とする．

(iii) **三角圏 $\mathscr{T}$ に対して．**
$\mathscr{T}$ のシフトは $[1]$ で表す．対象 $X, Y \in \mathscr{T}$ に対し，$\mathscr{T}(X, Y[1])$ を $\mathrm{Ext}^1(X, Y)$ と表記する．これに沿い，$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$ は $\mathscr{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}[1]) = 0$ の意味で用いる．$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{X}, Y) = 0$ や $\mathrm{Ext}^1(X, \mathcal{Y}) = 0$ も同様.

部分圏 $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathscr{T}$ に対し $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$ を，ある $X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}$ による完全三角形への分解 $X \to T \to Y \to X[1]$ を有する対象 T のなす部分圏とする．

Supported by JSPS Grant-in-Aid for Young Scientists (B) 22740005.
代数学シンポジウムでの講演の機会を与えて頂きましたことに感謝致します．

2. 三角圏上のねじれ対

以下 $\mathscr{T}$ は三角圏とする．t-構造とクラスター傾部分圏の定義は以下のようであった．

定義 2.1 ([BBD])**.** $\mathscr{T}$ の部分圏の対 $(t^{\leq 0}, t^{\geq 0})$ が **t-構造 (t-structure)** であるとは，以下の条件を満たすときをいう．

(i) $\mathscr{T}(t^{\leq -1}, t^{\geq 0}) = 0$.
(ii) $\mathscr{T} = t^{\leq -1} * t^{\geq 0}$.
(iii) $t^{\leq -1} \subseteq t^{\leq 0}$ かつ $t^{\geq 0} \subseteq t^{\geq -1}$.

ただし $t^{\leq -1}$, $t^{\geq -1}$ はそれぞれ，与えられた部分圏のシフト

$$t^{\leq -1} = t^{\leq 0}[1], \quad t^{\geq -1} = t^{\geq 0}[1]$$

として定義される．

定義 2.2. 部分圏 $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{T}$ が**クラスター傾部分圏 (cluster tilting subcategory)** であるとは，以下の条件を満たすときをいう．

(i) $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = 0$.
(ii) $\mathscr{T} = \mathcal{C} * \mathcal{C}[1]$.

三角圏のねじれ対は，これらを同時に一般化するものである．

定義 2.3 ([IY])**.** $\mathscr{T}$ の部分圏の対 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ が**ねじれ対 (torsion pair)** であるとは，

(i) $\mathscr{T}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$.
(ii) $\mathscr{T} = \mathcal{X} * \mathcal{Y}$.

を満たすときをいう．

t-構造とは，シフトに関する条件（定義 2.1 条件 (iii)）を満たすねじれ対に他ならない．また，クラスター傾部分圏はねじれ対の退化したもの $(\mathcal{X} = \mathcal{Y}[-1])$ とみなすことができる．

ねじれ対と本質的に同じ概念であるが，次節以降でシフトが対称的に振る舞うよう，本稿では次を用いる．

定義 2.4. $\mathscr{T}$ の部分圏の対 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ が**余ねじれ対 (cotorsion pair)** であるとは，条件

(i) $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$.
(ii) $\mathscr{T} = \mathcal{U} * \mathcal{V}[1]$.

を満たすときをいう．これは，$(\mathcal{U}, \mathcal{V}[1])$ がねじれ対であることに他ならない．

注 2.5. $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ が余ねじれ対のとき，$\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ は

$$\mathcal{U}[-1]^{\perp} = \mathcal{V}, \quad \mathcal{U} = {}^{\perp}\mathcal{V}[1]$$

により互いに他を決定する．

t-構造およびクラスター傾部分圏との関係は次のようになる．

例 2.6. $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ を余ねじれ対とする．

(1) $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ が $\mathcal{U}[1] \subseteq \mathcal{U}$ ($\Leftrightarrow$ $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}[1]$) を満たすことと，$(t^{\leq 0}, t^{\geq 0}) = (\mathcal{U}[-1], \mathcal{V}[1])$ が t-構造となることは同値．
(2) 部分圏 $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{T}$ がクラスター傾部分圏となることと，対 $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ が余ねじれ対をなすことは同値．

すなわち，t-構造は余ねじれ対であってシフト閉条件 $\mathcal{U}[1] \subseteq \mathcal{U}$ を満たすもの，クラスター傾部分圏は $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ を満たすものであり，いずれも余ねじれ対の特殊な場合とみなせる．また，t 構造と逆向きのシフト閉条件を満たす余ねじれ対は，**余 t-構造 (co-t-structure)** とよばれる．

3. アーベル圏の構成

以下これまで通り，$\mathscr{T}$ を三角圏とする．三角圏上に t-構造あるいはクラスター傾部分圏が与えられると，以下のようにアーベル圏が構成できることが知られている．

(1) $(t^{\leq 0}, t^{\geq 0})$ が t-構造のとき，**ハート (heart)** $t^{\leq 0} \cap t^{\geq 0}$ はアーベル圏となる（[BBD]）．
(2) $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{T}$ がクラスター傾部分圏のとき，イデアル剰余 $\mathscr{T}/\mathcal{C}$ はアーベル圏となる（[KR],[KZ]）．

注 3.1. 一般に，加法圏 $\mathscr{A}$ の部分圏 $\mathcal{I} \subseteq \mathscr{A}$ に対し，$\mathcal{I}$ の生成するイデアルによる $\mathscr{A}$ の剰余 $\mathscr{A}/\mathcal{I}$ を以下で定義する．

- 対象は $\mathscr{A}$ の対象に同じ．
- 射集合は，任意の $X, Y \in \mathscr{A}/\mathcal{I}$ に対し剰余加群

$$\mathscr{A}/\mathcal{I}(X,Y) = \mathscr{A}(X,Y)/\{f \in \mathscr{A}(X,Y) \mid f \text{ はある } I \in \mathcal{I} \text{ を経由 }\}$$

として定義.

このとき $\mathscr{A}/\mathcal{I}$ も加法圏となり，自然な関手 $\mathscr{A} \overset{\text{quot.}}{\longrightarrow} \mathscr{A}/\mathcal{I}$ は加法関手となる．

これらの構成は，余ねじれ対を用いて同時に一般化される．

定理 3.2 ([N1, Theorem 6.4])**.** $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ を $\mathscr{T}$ 上の余ねじれ対とする．$\mathscr{T}$ の部分圏の列

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & \mathscr{T}^+ \arrow[dr, phantom, "\supseteq" sloped] & & \\ \mathscr{T} \arrow[ur, phantom, "\supseteq" sloped] \arrow[dr, phantom, "\supseteq" sloped] & & \mathcal{H} \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & \mathcal{W} \\ & \mathscr{T}^- \arrow[ur, phantom, "\supseteq" sloped] & & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

を $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, $\mathscr{T}^+ = \mathcal{W} * \mathcal{V}[1]$, $\mathscr{T}^- = \mathcal{U}[-1] * \mathcal{W}$, $\mathcal{H} = \mathscr{T}^+ \cap \mathscr{T}^-$ により定義する．これらの部分圏 $\mathscr{T}, \mathscr{T}^+, \mathscr{T}^-, \mathcal{H}$ の $\mathcal{W}$ による剰余を $\underline{\mathscr{T}}, \underline{\mathscr{T}}^+, \underline{\mathscr{T}}^-, \underline{\mathcal{H}}$ で表す．このとき，$\underline{\mathcal{H}}$ はアーベル圏となる．

例 3.3.

(1) $(\mathcal{U}[-1], \mathcal{V}[1]) = (t^{\leq 0}, t^{\geq 0})$ が t-構造のとき，(3.1) は

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & t^{\geq 0} \arrow[dr, phantom, "\supseteq" sloped] & & \\ \mathscr{T} \arrow[ur, phantom, "\supseteq" sloped] \arrow[dr, phantom, "\supseteq" sloped] & & t^{\geq 0} \cap t^{\leq 0} \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & 0 \\ & t^{\leq 0} \arrow[ur, phantom, "\supseteq" sloped] & & \end{tikzcd}$$

のようになり，$\underline{\mathcal{H}} = t^{\leq 0} \cap t^{\geq 0}$ はハートに一致する．

(2) $\mathcal{U} = \mathcal{V} (= \mathcal{C}$ とおく$)$ のとき，(3.1) は

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & \mathscr{T} \arrow[dr, phantom, "=" sloped] & & \\ \mathscr{T} \arrow[ur, phantom, "=" sloped] \arrow[dr, phantom, "=" sloped] & & \mathscr{T} \arrow[r, phantom, "\supseteq"] & \mathcal{C} \\ & \mathscr{T} \arrow[ur, phantom, "=" sloped] & & \end{tikzcd}$$

のようになり，$\underline{\mathcal{H}} = \mathscr{T}/\mathcal{C}$ はクラスター傾部分圏によるイデアル剰余となる．

また，余 t-構造はこのアーベル圏の消滅で特徴づけられる．すなわち，余ねじれ対が余 t-構造を定めることと，$\underline{\mathcal{H}} \simeq 0$（全ての対象が零対象）とは同値である．

4. 随伴性と直交性

この節は，阿部紀行氏との共著 [AN] の内容を含む．$(\mathcal{U},\mathcal{V})$ を余ねじれ対とし，$\mathcal{U},\mathcal{V}$ の $\mathcal{W}$ による剰余をそれぞれ $\underline{\mathcal{U}},\underline{\mathcal{V}}$ と表すことにする．いま $\underline{\mathscr{T}}^+,\underline{\mathscr{T}}^-$ とあわせて，$\underline{\mathscr{T}}$ には 4 つの部分圏 $\underline{\mathcal{U}},\underline{\mathcal{V}},\underline{\mathscr{T}}^+,\underline{\mathscr{T}}^-$ が得られている．

これらの部分圏の $\underline{\mathscr{T}}$ への包含は，それぞれ次の様な随伴関手をもつ．

命題 4.1 ([N1, Corollary 4.4], [AN, Proposition 3.1])**.** 包含関手に対し，以下のように随伴関手が存在．

(1) $\underline{\mathcal{U}} \hookrightarrow \underline{\mathscr{T}}$ は右随伴 $\sigma_{\mathcal{U}}\colon \underline{\mathscr{T}} \to \underline{\mathcal{U}}$ をもつ．
(2) $\underline{\mathcal{V}} \hookrightarrow \underline{\mathscr{T}}$ は左随伴 $\sigma_{\mathcal{V}}\colon \underline{\mathscr{T}} \to \underline{\mathcal{V}}$ をもつ．
(3) $\underline{\mathscr{T}}^+ \hookrightarrow \underline{\mathscr{T}}$ は左随伴 $\tau^+\colon \underline{\mathscr{T}} \to \underline{\mathscr{T}}^+$ をもつ．
(4) $\underline{\mathscr{T}}^- \hookrightarrow \underline{\mathscr{T}}$ は右随伴 $\tau^-\colon \underline{\mathscr{T}} \to \underline{\mathscr{T}}^-$ をもつ．

さらに，直交性 $\underline{\mathcal{U}} \perp \underline{\mathscr{T}}^+$ および $\underline{\mathscr{T}}^- \perp \underline{\mathcal{V}}$ が次のような強い形で存在する．

命題 4.2 ([AN, Corollary 3.2, 3.3, Proposition 3.7, 3.8])**.** 対象 $X \in \mathscr{T}$ に対し，次が成立．

(1) $X \in \underline{\mathcal{U}} \ \Leftrightarrow\ \underline{\mathscr{T}}(X,\underline{\mathscr{T}}^+) = 0 \ \Leftrightarrow\ \tau^+(X) = 0.$
(2) $X \in \underline{\mathcal{V}} \ \Leftrightarrow\ \underline{\mathscr{T}}(\underline{\mathscr{T}}^-,X) = 0 \ \Leftrightarrow\ \tau^-(X) = 0.$
(3) $X \in \underline{\mathscr{T}}^+ \ \Leftrightarrow\ \underline{\mathscr{T}}(\underline{\mathcal{U}},X) = 0 \ \Leftrightarrow\ \sigma_{\mathcal{U}}(X) = 0.$
(4) $X \in \underline{\mathscr{T}}^- \ \Leftrightarrow\ \underline{\mathscr{T}}(X,\underline{\mathcal{V}}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \sigma_{\mathcal{V}}(X) = 0.$

命題 4.1 で得られる随伴関手を合成することで，$\mathscr{T}$ から $\underline{\mathcal{H}}$ へのコホモロジカル関手が構成される．

補題 4.3 ([AN, Proposition 4.2])**.** 関手の自然同型 $\tau^+\tau^- \cong \tau^-\tau^+$ が存在する．ただし $\tau^+\tau^-$, $\tau^-\tau^+$ はそれぞれ

$$\underline{\mathscr{T}} \xrightarrow{\tau^-} \underline{\mathscr{T}}^- \hookrightarrow \underline{\mathscr{T}} \xrightarrow{\tau^+} \underline{\mathscr{T}}^+ \hookrightarrow \underline{\mathscr{T}},$$
$$\underline{\mathscr{T}} \xrightarrow{\tau^+} \underline{\mathscr{T}}^+ \hookrightarrow \underline{\mathscr{T}} \xrightarrow{\tau^-} \underline{\mathscr{T}}^- \hookrightarrow \underline{\mathscr{T}}$$

の合成を表す．

特に，任意の $X \in \underline{\mathscr{T}}$ に対し

$$\tau^+\tau^-(X) \cong \tau^-\tau^+(X) \in \underline{\mathscr{T}}^+ \cap \underline{\mathscr{T}}^- = \underline{\mathcal{H}}$$

が成り立つため，これらは $\underline{\mathcal{H}}$ への関手とみなせる．

定理 4.4 ([AN, Theorem 5.7])**.** $\mathscr{T}$ を三角圏，$(\mathcal{U},\mathcal{V})$ を $\mathscr{T}$ 上の余ねじれ対とする．関手の列

$$\mathscr{T} \xrightarrow{\text{quot.}} \underline{\mathscr{T}} \xrightarrow{\tau^+\tau^-} \underline{\mathcal{H}}$$

の合成を H とすると，これはアーベル圏 $\underline{\mathcal{H}}$ へのコホモロジカル関手 $H\colon \mathscr{T} \to \underline{\mathcal{H}}$ を与える．

例 4.5.

(1) $(\mathcal{U}[-1],\mathcal{V}[1]) = (t^{\leq 0},t^{\geq 0})$ が t-構造のとき，τ^+ および τ^- は truncation に他ならず，$H\colon \mathscr{T} \to t^{\leq 0} \cap t^{\geq 0}$ はハートへの標準的なコホモロジカル関手に一致する．これがコホモロジカルとなることは [BBD] で知られている．
(2) $\mathcal{U} = \mathcal{V}(= \mathcal{C})$ のとき，τ^+ および τ^- はいずれも恒等関手であり，$H\colon \mathscr{T} \to \mathscr{T}/\mathcal{C}$ は剰余をとる自然な関手に一致する．これは [KZ] において，コホモロジカルになると示されている．

5. Buan，Marsh の構成との関係

これまでに見たように,「t-構造のハート」と「クラスター傾部分圏による剰余」という二つの構成は，ねじれ対を用いて同時に一般化される．これら二構成のうち，クラスター傾部分圏による剰余を一般化する構成が Buan と Marsh により与えられた．

定理 5.1 ([BM, Theorem 5.1])**.** k を体とする．$\mathscr{T}$ を Hom-有限で *Krull-Schmidt* な k-線型三角圏で *Serre* 関手を有するものとする．$\mathscr{T}$ のリジッドな対象 $T \in \mathscr{T}$ に対し，$\mathcal{X}_T = (\mathrm{add}(T))^{\perp}$ と定めるとき，剰余 $\mathscr{T}/\mathcal{X}_T$ は**整プレアーベル圏 (integral category)** となる．系として，正則射による局所化でアーベル圏 $(\mathscr{T}/\mathcal{X}_T)_{\mathcal{R}}$ が得られる．ただしここで，$\mathrm{add}(T) \subseteq \mathscr{T}$ は T の有限直和の直和因子全体のなす充満部分圏．

注 5.2. $T \in \mathscr{T}$ がクラスター傾対象ならば特にリジッドであり，また $\mathcal{X}_T = \mathrm{add}(T) \subseteq \mathscr{T}$ はクラスター傾部分圏となる．この点で，$\mathcal{X}_T$ はクラスター傾部分圏を一般化したものとみなすことができる．

この構成で Buan と Marsh が用いたのは Rump による結果である．[R] において，任意の整プレアーベル圏から，正則射による局所化でアーベル圏が得られることが示されている．以下，[R] から抜粋して紹介する．

定義 5.3.

(1) 加法圏 $\mathscr{A}$ が **プレアーベル (preabelian)** であるとは，任意の射の核と余核が存在するときをいう．

(2) (i) プレアーベル圏 $\mathscr{A}$ が **左半アーベル (left semi-abelian)** であるとは，$\mathscr{A}$ における任意の引き戻し

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & B \arrow[d, "\gamma"] \\ C \arrow[r, "\delta"'] & D \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

で，δ が余核射（すなわち，なにか射 $\lambda\colon C' \to C$ を用いて $\delta = \mathrm{cok}(\lambda)$ と表せる射）ならば α が全射となるときをいう．

(ii) **右半アーベル圏 (right semi-abelian category)** も，押し出しを用いて双対的に定義する．

(iii) 左半アーベルかつ右半アーベルのとき，単に**半アーベル (semi-abelian)** であるという．

(3) (i) プレアーベル圏 $\mathscr{A}$ が **左整 (left integral)** であるとは，$\mathscr{A}$ における任意の引き戻し (5.1) において，δ が全射ならば α も全射となるときをいう．

(ii) **右整 (right integral)** 条件も，押し出しを用いて双対的に定義する．

(iii) 左整かつ右整のとき，単に**整 (integral)** であるという．

特に，加法圏 $\mathscr{A}$ に対する性質の間に

$$\text{abelian} \Rightarrow \text{integral} \Rightarrow \text{semi-abelian} \Rightarrow \text{preabelian}$$

という関係が成り立つ．次が Rump により示された．

定理 5.4 ([R])**.** $\mathscr{A}$ が整のとき，$\mathscr{A}$ を正則射（= 全射かつ単射）の全体のなす射のクラス $\mathcal{R}$ で局所化して得られる圏 $\mathscr{A}_{\mathcal{R}}$ はアーベル圏となる．

従って整プレアーベル圏が与えられれば，局所化により「自動的に」アーベル圏が得られることになる．

6. ねじれ対のペアへの拡張

ここで，Buan と Marsh により得られた次の観察に注目する．

補題 6.1 ([BM, Lemma 1.2])**.** $\mathscr{T}$ を，定理 *5.1* と同じ仮定を満たす三角圏とする．$T \in \mathscr{T}$ がリジッドのとき，次が成立する．

- $(\mathrm{add}(T), \mathcal{X}_T)$ および $(\mathcal{X}_T, \mathcal{X}_T^{\perp})$ はともに $\mathscr{T}$ 上のねじれ対をなす．
- $\mathscr{T}(\mathrm{add}(T), \mathcal{X}_T^{\perp}[1]) = 0$ が成立する．

これをもとに，余ねじれ対による構成を少し修正して，Buan と Marsh の構成を一般の三角圏上で扱うことを考える．目標となるのは,「余ねじれ対からのアーベル圏の構成」と「Buan と Marsh による構成」の同時一般化である．Rump の結果から，整アーベル圏の構成を目指せばよい．

設定 6.2. 三角圏 $\mathscr{T}$ 上の余ねじれ対のペア $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ および $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ が，条件

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}, \mathcal{V}) = 0$$

を満たすとする．このとき，$\mathscr{T}$ の部分圏の列

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathscr{T}^+ & & \\ & \rotatebox{30}{$\supseteq$} & & \rotatebox{-30}{$\supseteq$} & \\ \mathscr{T} & & & & \mathcal{H} \ \supseteq \ \mathcal{W} \\ & \rotatebox{-30}{$\supseteq$} & & \rotatebox{30}{$\supseteq$} & \\ & & \mathscr{T}^- & & \end{array} \tag{6.1}$$

を $\mathcal{W} = \mathcal{T} \cap \mathcal{U}$, $\mathscr{T}^+ = \mathcal{W} * \mathcal{V}[1]$, $\mathscr{T}^- = \mathcal{S}[-1] * \mathcal{W}$, $\mathcal{H} = \mathscr{T}^+ \cap \mathscr{T}^-$ により定義する．

定理 6.3 ([N2, Theorem 5.4, 6.3])**.** $(\mathcal{S}, \mathcal{T}), (\mathcal{U}, \mathcal{V})$ を設定 *6.2* のとおりとするとき，次が成立する．

(1) 剰余 $\mathcal{H}/\mathcal{W}$ は半アーベル圏となる．
(2) さらに，条件

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S} * \mathcal{T} \quad \text{または} \quad \mathcal{T} \subseteq \mathcal{U} * \mathcal{V} \tag{6.2}$$

が満たされるならば，$\mathcal{H}/\mathcal{W}$ は整となる．

例 6.4. 以下の場合には，条件 (6.2) を満たすねじれ対のペアが得られる．

(1) $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ が $\mathscr{T}$ 上のねじれ対のとき，$(\mathcal{S}, \mathcal{T}) = (\mathcal{U}, \mathcal{V})$ とおくと設定 6.2 の条件が満たされる．このペアに付随する部分圏の列 (6.1) は，定理 3.2 の部分圏の列 (3.1) に一致．特に，定理 3.2 により $\mathcal{H}/\mathcal{W}$ はアーベル圏となる．
(2) $\mathscr{T}$ が定理 5.1 の仮定を満たす三角圏，$T \in \mathscr{T}$ がリジッドな対象のとき，$(\mathrm{add}(T)[1], \mathcal{X}_T), (\mathcal{X}_T, \mathcal{X}_T^{\perp}[-1])$ は設定 6.2 の条件を満たす．このとき (6.1) は

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathscr{T} & & \\ & \rotatebox{30}{$=$} & & \rotatebox{-30}{$=$} & \\ \mathscr{T} & & & & \mathscr{T} \ \supseteq \ \mathcal{X}_T \\ & \rotatebox{-30}{$=$} & & \rotatebox{30}{$=$} & \\ & & \mathscr{T} & & \end{array}$$

のようになり，$\mathcal{H}/\mathcal{W} = \mathscr{T}/\mathcal{X}_T$ となる．
(3) $(\mathcal{S}, \mathcal{T}), (\mathcal{U}, \mathcal{V})$ が設定 6.2 の条件を満たすペアとする．$(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ もしくは $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ のいずれか一方が余 t-構造ならば，条件 (6.2) が満たされる．

References

[AN] Abe, N.; Nakaoka, H.: *General heart construction on a triangulated category (II): associated homological functor*, Appl. Categ. Structures, **20** (2012) no.2, 161-174.

[BBD] Beĭlinson, A. A.; Bernstein, J.; Deligne, P.: *Faisceaux pervers* (French) [Perverse sheaves] Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), 5–171, Astérisque, **100**, Soc. Math. France, Paris, 1982.

[BM] Buan, A. B.; Marsh, R. J.: *From triangulated categories to module categories via localization II: calculus of fractions*, J. London Math. Soc. (2012) doi: 10.1112/jlms/jdr077.

[IY] Iyama, O.; Yoshino, Y.: *Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules* (English summary), Invent. Math. **172** (2008) no. 1, 117–168.

[KR] Keller, B.; Reiten, I.: *Cluster-tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi-Yau*, Adv. Math. **211** (2007) no. 1, 123–151.

[KZ] Koenig, S.; Zhu, B.: *From triangulated categories to abelian categories: cluster tilting in a general framework*, Math. Z. **258** (2008) no. 1, 143–160.

[N1] Nakaoka, H.: *General heart construction on a triangulated category (I): unifying t-structures and cluster tilting subcategories*, Appl. Categ. Structures, **19** (2011) no.6, 879-899.

[N2] Nakaoka, H.: *General heart construction for twin torsion pairs on triangulated categories*, arxiv: 1111.1820

[R] Rump, W.: *Almost abelian categories*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle. Catég. **42** (2003) no. 3, 163–225.

Department of Mathematics and Computer Science, Kagoshima University, 1-21-35 Korimoto, Kagoshima, 890-0065 Japan

E-mail address: nakaoka@sci.kagoshima-u.ac.jp