On Lagrangian fibrations

松下大介

平成 24 年 11 月 12 日

表題の Lagrangian fibration とは次のようなものである.

定義 0.1. コンパクトな *Kähler* 多様体で正則非退化 2-形式をもつもの, いわゆる複素シンプレクティック多様体からの写像 $f : X \to S$ が *Lagrangian fibration* とは f が次の 2 つの条件を満たすときをいう.

(1) f の一般ファイバーは *Lagrangian* 部分多様体, すなわち次元が X の半分であり, X の正則非退化 2-形式を制限すると 0 となっている.

(2) f のファイバーはすべて連結.

このような条件は一見人工的見えるが, 複素シンプレクティック多様体のうち「既約」シンプレクティック多様体と呼ばれるものに対しては上のようなファイブレーションが入りうる唯一のものであることがわかっている.

定義 0.2. 複素シンプレクティック多様体 X が既約とは以下のに条件を満たすときをいう.

(1) 単連結である.

(2) $\dim H^0(X, \Omega^2) = 1$.

定理 0.1. *[[Mat01], [Mat99]* X を射影的既約シンプレクティック多様体とする. $f : X \to S$ を X から低次元の多様体 S への写像でファイバーが連結であるものあ るものとする. このとき f はラグランジアンファイブレーションであり, S は *log terminal* と呼ばれる特異点のみを持つ *Picard* 数 1 の *Fano* 多様体となる.

既約シンプレクティック多様体の具体例として知られているもの $\dim X = 6, 10$ を覗くと $K3$ 曲面の対称積, あるいは abel 曲面の対称積 $A^{[n]}$ からの Albanese 写像 $A^{[n]} \to A$ のファイバーとして現れるもののいずれかに変形同値であることが知られている. これらの例に入るラグランジアンファイブレーションの例を２つ上げる.

例 0.1.

(a) S を楕円ファイブレーション $g : S \to \mathbb{P}^1$ を持つ $K3$ 曲面とする. この S の対称積 $S^{[n]}$ は既約シンプレクティック多様体となるが, その構成から楕円ファイブレーションの対称積 $f : S^{[n} \to \mathbb{P}^n$ を持つ. $S^{[n]}$ の正則非退化 2-形式は S から誘導されたものであることを考えると, f は *Lagrangian fibration* であることがわかる.

(b) S を $K3$ 曲面で $\mathbb{P}^n$ の中の完全交叉で得られるものとする. このような $K3$ 曲面は一般に *Picard* 数が 1 となり, その *Picard* 群の生成元を H とおく. S の対称積 $S^{[n]}$ から $(\mathbb{P}^n)^\vee$ への有理写像を

$$S^{[n]} \ni (x_i) \mapsto \{x_i\} \text{ が定める } \mathbb{P}^n \text{ の超平面.} \in (\mathbb{P}^n)^\vee$$

と定める. X から X から S の上の層のモジュライ空間で向井ベクトルが $(0, H, 1)$ であるもの $M_S(0, H, 1)$ に双有理写像が出来, ラグランジアンファイブレーション $M_S(0, H, 1) \to \mathbb{P}^n$ が得られる. 一般ファイバーは線型系 $|H|$ の元の *Jacobian* となる.

既約シンプレクティック多様体にいつラグランジアンファイブレーションが入るか, ということは定理 0.1 が証明されたときから懸案であった. もし既約シンプレクティック多様体 X がラグランジアンファイブレーションをもてば, 底空間の因子を引き戻すことで X 上に因子 L で $L^{\dim X} = 0$ を満たすものが存在することになる. 逆にこうした因子が存在するとき, ラグランジアンファイブレーションが存在するかがどうかが問題となっていた. 今回, $K3$ 曲面の対称積と変形同値であるような射影的既約シンプレクティック多様体についてこの問題が部分的に解決出来たことを報告させて頂く.

系 0.1. *X を $K3$ 曲面 S の対称積 $S^{[n]}$ と変形同値な射影的既約シンプレクティック多様体とする. X 上の因子 L で $L^{2n} = 0$ を満たすものがあり, $n \geq 6$, n は偶数かつ, $n-1$ が平方因子を持たないとき, L が定める線型束 $|L|$ の次元は $n+1$ であり, 誘導される有理写像 $\Phi_{|L|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ に対してあ*

る双有理写像 $\phi : X \dashrightarrow X'$ が存在して, 合成 $\phi \circ \Phi_{|L|} : X' \to \mathbb{P}^n$ はラグランジアンファイブレーションとなる.

注 0.1. 既約シンプレクティック多様体 X からのラグランジアンファイブレーション $f : X \to S$ を変形同値でつながるものを同一視, すなわちある複素多様体 T とその上のラグランジアンファイブレーションの属 $\mathscr{X} \to \mathscr{S}$ でファイバーになっているものを同一視すると X の次元を固定した場合, 有限個になることが予想されている. 系 *0.1* で得られたラグランジアンファイブレーションは例 *0.1* で示した 2 つあるいは $K3$ 曲面の上の層のモジュライ空間で向井ベクトルが $(0,H,k)$ であるようなもの $M_S(0,H,k)$ から定まるラグランジアンファイブレーションのどれかに双有理変換と変形でつながることがわかる.

系 0.1 は次の定理を介して行われる.

定理 0.2. X をシンプレクティック多様体 L をその上の直線束で, 次の 2 つの条件を満たす *unit disk* Δ 上射影的かつ *smooth* な写像 $\pi : \mathscr{X} \to \Delta$ とその上の直線速 $\mathscr{L}$ があると仮定する.

(1) 原点のファイバー $\mathscr{X}_0$ と X の間に双有理写像 $\phi_0 : X \dashrightarrow \mathscr{X}_0$ があり, $(\phi_0)_*L \cong \mathscr{L}_0$ となっている.

(2) *unit disk* Δ 上の一点 t でのファイバー $\mathscr{X}_t$ はラグランジアンファイブレーション $f' : X' \to \mathbb{P}^n$ を持つシンプレクティック多様体 X' と双有理同値であり, $\mathscr{L}$ の制限 $\mathscr{L}_t$ は双有理写像 $\phi_t : \mathscr{X}_t \dashrightarrow X'$ を介して $(\phi_t)_*\mathscr{L}_t \cong (f')^*\mathscr{O}(1)$ を満たす.

このとき, *unit disk* のある原点およびを含む *Zariski* 開集合 Δ_0 上の射影的かつ *smooth* な写像 $\pi' : \mathscr{X}' \to \Delta_0$ で $\mathscr{X}$ と Δ_0 上の双有理なものが存在し, その双有理写像を ϕ_{Δ_0} とすると, $\mathscr{L}$ の固有変換 $\mathscr{L}' = (\phi_{\Delta_0})_*\mathscr{L}$ は π'-自由であり, ラグランジアンファイブレーションの族 $\mathscr{X} \to \mathbb{P}(\mathscr{L})$ を Δ_0 上定める.

定理 *0.2* の証明の概略. ここでは簡単のために定理の条件 (1), (2) に現れる双有理射 ϕ_0, ϕ_t が共に同型写像であり, $L = \mathscr{L}_0$ が数値的に半正である場合にのみ証明を述べる. まず $\mathscr{L}_t$ のコホモロジーを以下の完全列を使って計算する.

$$0 \to H^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}(1)) \to H^1(\mathscr{X}_t, \mathscr{L}_t) \to H^0(\mathbb{P}^n, R^1(f')_*\mathscr{L}_t)$$

上の系列の最後の大域切断で括弧の中の層には次の同型が存在する.

$$R^1(f')_*\mathscr{L}_t \cong R^1(f')_*\mathscr{O}_{\mathscr{X}_t} \otimes \mathscr{O}(1) \cong \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(1)$$

これから上の系列の最初と最後は 0 であることがわかり, $h^1(\mathscr{L}_t) = 0$ がわかる. よって Δ のある Zariski 開集合 Δ_0 が存在し, $\pi_*\mathscr{L}$ は Δ_0 上自由となる. 写像

$$\pi^*\pi_*\mathscr{L} \to \mathscr{L}$$

は $\mathscr{X}_t$ のまわりで全射なので, 記号の乱用ではあるが, Δ の t を含む Zariski 開集合 Δ_0 があり, $\mathscr{L}$ は Δ_0 上で π-自由かつ自由となる. ここで $L = \mathscr{L}_0$ が数値的に半正という条件から　[Nak87] により $o \cup \Delta_0$ で任意の自然数 k に対し, $\mathscr{L}^{\otimes k}$ は自由となる. したがって大域切断 $H^0(k\mathscr{L}_0)$ と $H^0(k\mathscr{L}_t)$ の次元はすべての k に対して等しく, これから [Kaw85] および [Fuj11] により $\mathscr{L}_0$ はある自然数 k に対して $\mathscr{L}_0^{\otimes k}$ が自由になることがわかる. ここで写像

$$S^m(\pi_*\mathscr{L}) \to \mathscr{L}^{\otimes k}$$

を考えると (S は対称テンソルをあらわす) これは同型であり, $\mathscr{L}_0$ が自由でなければ, どの k に対しても $\mathscr{L}^{\otimes k}$ は自由ではなくなる. よって $\mathscr{L}_0$ は自由であり $o \cup \Delta_0$ 上で $\pi_*\mathscr{L}$ は自由となる. $o \cup \Delta_0$ をあらためて Δ_0 ととると, これはやはり Δ の Zariski 開集合であり, 写像

$$\mathscr{X} \times_\Delta \Delta_0 \to \mathbb{P}(\mathscr{L})$$

が求めるラグランジアンファイブレーションの族を与える. □

系 *0.1* の証明の概略.　ここでは X がある $K3$ 曲面 S の対称積 $S^{[n]}$ となっている場合の証明のみを記す. $S^{[n]}$ の Picard 群と S の Picard 群の間には次のような関係がある.

$$\mathrm{Pic} S^{[n]} \cong \mathrm{Pic} S \oplus \frac{1}{2}\mathbb{Z}[E]$$

ここで E は Hilbert-Chow morphism $S^{[n]} \to S^{(n)}$ の例外因子である. 因子 L はこの同型を用いて,

$$L = \alpha H + \beta E, H \in \mathrm{Pic}(S)$$

と書ける. さて, 仮定 $L^{\dim X} = 0$ より, L　は $\mathrm{Pic} S^{[(n)]}$ に定義される Beauville-Bogomolov 二次形式にかんして 0 である. 上記の同型はこの二次形式を保つので,

$$L^2 = \alpha^2 H^2 - 2(n-1)\beta^2 = 0$$

となる. ここで S と H の組の変形の倉西空間を $\mathrm{Def}(S,H)$ とし, その上の普遍族を $\mathscr{S}$ とする. $\mathrm{Def}(S,H)$ 上の対称積 $\mathscr{S}^{[n]}$ を考えると, この族の上には H の普遍族 $\mathscr{H}$ が存在するので, $\mathscr{L} = \alpha\mathscr{H} + \beta\mathscr{E}$ ($\mathscr{E}$ は Hilbert-Chow 写像 $\mathscr{S}^{[n]} \to \mathscr{S}^{(n)}$ 例外因子) と定義することにより, $S^{[n]}$ と L の組の変形 $(\mathscr{S}^{[n]}, \mathscr{L})$ が得られる. n にかんする仮定, $n \geq 6$ かつ n は偶数, $n-1$ は平方因子を持たない, という条件から β/α は整数である. よって β/α は 0 または 1 以上の整数となる. 前者の場合, S は楕円 $K3$ 曲面となり, $S^{[n]}$ は自然にラグランジアンファイブレーションの構造をもつ. 後者の場合, $\mathrm{Def}(S,H)$ の十分に一般の点　p を取る. すると対応する点のファイバーの Picard 群は 1 となり, $\mathscr{H}_p$ で生成される. $\beta = \alpha$ とすると, $\mathscr{L}_p = \alpha\mathscr{H}_p + \beta\mathscr{E}_p$ は数値的に半正とはならない. ここでの仮定は L は数値的に半正としていたので, 十分に一般な点 p に対して $\mathscr{L}_p$ は数値的に半正でなければならず, この場合は起こり得ない. よって $\beta/\alpha \geq 2$ となり, $S^{[n]}$ は [Saw07] および [Mar06] により $S^{[n]}$ はラグランジアンファイブレーションを持つ. よって reference point o と $\mathrm{Def}(S,H)$ の十分一般の点を結ぶ unit disk を取り, $\mathscr{S}^{[n]}$ をそこに制限することで, 定理 0.1　の仮定の条件を満たす族を構成することができる. $\square$

参考文献

[Fuj11] Osamu Fujino. On Kawamata's theorem. In *Classification of algebraic varieties*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 305–315. Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.

[Kaw85] Y. Kawamata. Pluricanonical systems on minimal algebraic varieties. *Invent. Math.*, 79(3):567–588, 1985.

[Mar06] Dimitri Markushevich. Rational Lagrangian fibrations on punctual Hilbert schemes of $K3$ surfaces. *Manuscripta Math.*, 120(2):131–150, 2006.

[Mat99] Daisuke Matsushita. On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold. *Topology*, 38(1):79–83, 1999.

[Mat01] Daisuke Matsushita. Addendum: "On fibre space structures of a projective irreducible symplectic manifold" [Topology **38** (1999), no. 1, 79–83; MR1644091 (99f:14054)]. *Topology*, 40(2):431–432, 2001.

[Nak87] Noboru Nakayama. The lower semicontinuity of the plurigenera of complex varieties. In *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, volume 10 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 551–590. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[Saw07] Justin Sawon. Lagrangian fibrations on Hilbert schemes of points on $K3$ surfaces. *J. Algebraic Geom.*, 16(3):477–497, 2007.