# ベキ級数の代数点における値の代数的独立性

金子 元* (JSPS, 日本大学理工学部)

## 1 導入

複素数 $\xi$ が超越数であるとは, $\xi$ が代数的数ではないことをいう．すなわち, 0 ではない任意の整係数多項式 $P(X)$ に対して, $P(\xi) \neq 0$ となることである．たとえば, $e$ が超越数であることが, Hermite によって 1873 年に示された．より一般に 0 ではない代数的数 $\alpha$ に対して $e^{\alpha}$ が超越数であることが, Lindemann によって 1882 年に示された．特に $\pi$ が超越数であることがわかる．実際, $\pi$ が代数的数であると仮定すると, $2\sqrt{-1}\pi$ も代数的数である．一方, $e^{2\sqrt{-1}\pi} = 1$ であり, これは Lindemann の結果に矛盾する．

また, $r \geq 1$ 個の複素数 $\xi_1, \ldots, \xi_r$ が代数的独立であるとは, 0 ではない任意の整係数多項式 $P(X_1, \ldots, X_r)$ に対して, $P(\xi_1, \ldots, \xi_r) \neq 0$ となることである．特に, $\xi_1, \ldots, \xi_r$ が代数的独立ならば, 各 $\xi_1, \ldots, \xi_r$ は超越数である．ところが, 超越数 $\xi_1, \ldots, \xi_r$ が与えられたとき, これらが代数的独立であるかを判定する方法は一般には知られていない．例えば, 超越数である $e$ と $\pi$ が代数的独立であるかについては, 未解決の問題である．さらには, $e + \pi$ が無理数であるかについても, 未だに知られていない．ここで代数的独立な複素数の例を紹介する．さて, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ を $\mathbb{Q}$ 上線形独立な代数的数であるとする．すると, $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_r}$ は代数的独立であることが Lindemann により 1882 年に示された．

さらに一般に $S$ を $\mathbb{C}$ の (有限とは限らない) 集合であるとする．このとき, $S$ が代数的独立であるとは, $S$ から任意の個数 $r$ の相異なる元 $\xi_1, \ldots, \xi_r$ をとったとき, それらが代数的独立になることをいう．以上にみたように, 解析数論では解析関数に代数的数を代入した値の超越性および代数的独立性について研究することが主なテーマのひとつである．本稿では, ベキ級数に代数的数を代入した値の超越性および代数的独立性について述べる．

この章の最後に本稿に必要な記号を導入する．さて, $w(n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ を非負整数からなる数列とする．本稿では, 十分大きい $n$ に対して $w(n+1) > w(n)$

*本研究は特別研究員奨励費の助成を受けたものである．

であると仮定する．このとき,

$$f(w(n);X) := \sum_{n=0}^{\infty} X^{w(n)}$$

とおく．すると, $f(w(n);X)$ は収束半径が 1 である．したがって, $0 < |\alpha| < 1$ を満たす代数的数 $\alpha$ に対し, $f(w(n);\alpha)$ の数論的性質を調べることにする．また, 非負整数全体の集合を $\mathbb{N}$ と書くことにする．さらに, $x$ を実数とするとき, その整数部分および小数部分をそれぞれ $[x], \{x\}$ と書くことにする．

## 2 Diophantine 不等式を使った超越性の結果

数列 $w(n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ が

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{w(n+1)}{w(n)} > 1$$

を満たすとき, lacunary であるという．この章では, 数列 $w(n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ が lacunary である場合, $f(w(n);X)$ の値の超越性の結果について述べる．

$b$ を 2 以上の整数とするとき, $f(n!;b^{-1})$ は超越数であることが, Liouville により 1844 年に証明された．これは超越数の最初の例である．証明の方法は, 有理近似の限界式 (Diophantine 不等式) である．まず, Liouville によって与えられた Diophantine 不等式を述べる．$\xi$ を代数的無理数とする．このとき, Liouville の不等式によると, $\xi$ にのみ依存する計算可能な正定数 $C_1(\xi)$ が存在して, 以下を満たす．$p/q$ を任意の有理数 ($p, q$ は互いに素な整数であり, $q \geq 1$) とする．すると,

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C_1(\xi)}{q^{\deg \xi}} \tag{2.1}$$

が成り立つ．さて, (2.1) を用いて $\eta := \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n!}$ が超越数であることを示す．$\eta$ の $b$ 進展開は周期的ではないので, $\eta$ は無理数である．したがって, $\eta$ が代数的数であると仮定すると, $\eta$ は Liouville の不等式を満たす．さて, $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$p_N := b^{N!} \sum_{n=0}^{N} b^{-n!}, \ q_N := b^{N!}$$

とおく．さらに, $D := \deg \eta$ とする．Liouville の不等式を $p_N/q_N$ に適用することにより

$$\frac{C_1(\eta)}{q_N^D} \leq \left|\eta - \frac{p}{q}\right| \leq 2b^{-(N+1)!} = \frac{2}{q_N^{N+1}}$$

となる．ゆえに,

$$q_N^{N+1-D} \leq \frac{2}{C_1(\eta)}$$

がすべての $N \in \mathbb{N}$ で成立する. ところが, $N$ が十分大きいとき, 明らかに矛盾である. したがって, $\eta$ は超越数である.

以上にみた通り, 超越性の証明は, 以下の 2 段階からなる.

STEP 1. 代数的数の有理近似による限界を与える.

STEP 2. 超越性を示したい数 $\xi$ の良い近似を得る.

これにより, $\xi$ が代数的数であると仮定すると, STEP 2 における近似は STEP 1 における近似限界に矛盾するので, $\xi$ の超越性が示される.

Liouville の方法による証明では,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{w(n+1)}{w(n)} < \infty$$

である場合, $f(w(n); b^{-1})$ の超越性を証明することができない. ここでは, STEP 1 または STEP 2 を改良することによって得られる超越性の結果を紹介する.

Mahler はある種の関数方程式を満たす解析関数の特殊値について, 超越性を研究した. 例えば, $k$ を 2 以上の整数とする. このとき, $f(k^n; X) = \sum_{n=0}^{\infty} X^{k^n}$ は関数等式

$$f(k^n; X^k) = \sum_{n=0}^{\infty} X^{k^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} X^{k^n} - X = f(k^n; X) \tag{2.2}$$

を満たす. 以降, この章では $\alpha$ は $0 < |\alpha| < 1$ を満たす代数的数であるとする. Mahler [9] は (2.2) を利用して $f(k^n; \alpha)$ に関するよい近似を得ることにより $f(k^n; \alpha)$ が超越数であることを示した. Mahler 型の関数等式を利用した超越性および代数的独立性の証明 (Mahler の方法) については参考文献 [11] を参照されたい.

ところが, 一般の数列 $w(n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ に対して, 必ずしも $f(w(n); X)$ に関する関数等式が成立するとは限らない. したがって, $f(w(n); \alpha)$ に対してよい近似を得られるとは限らない. ここでは, 代数的数の有理近似限界に関する定理を改良することによって得られる超越性の結果を紹介する. $\xi$ を代数的無理数として, $\varepsilon$ を任意の正の実数とする. Roth の定理によると, $\xi$ と $\varepsilon$ に依存する (計算不可能な) 正定数 $C_2(\xi, \varepsilon)$ が存在して, 以下を満たす. $p/q$ を任意の有理数 ($p, q$ は互いに素な整数であり, $q \geq 2$) とする. すると,

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C_2(\xi, \varepsilon)}{q^{2+\varepsilon}}$$

が成立する. さらに, 2 以上の整数が存在して $q = b^n (n = 0, 1, \ldots)$ と書ける場合に, 有理近似限界を考察する. Ridout の定理によると, $\xi, b, \varepsilon$ に依存する (計算不可能な) 正定数 $C_3(\xi, b, \varepsilon)$ が存在して,

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C_3(\xi, b, \varepsilon)}{q^{1+\varepsilon}} \tag{2.3}$$

となる．ここで, (2.3) を利用することで, 以下の超越性の判定法を得ることができる．数列 $w(n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ が

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{w(n+1)}{w(n)} > 1$$

を満たすと仮定する．このとき, 2 以上の整数 $b$ に対して $f(w(n); b^{-1})$ は超越数である．

一般に数列 $w(n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ が lacunary であるとき, $f(w(n); \alpha)$ が超越数であることが Corvaja と Zannier [6] によって証明された． 証明法は, Schmidt の部分空間定理による．すなわち, 部分空間定理を用いることによって得られる, 代数的数を代数的数で近似する際の限界を利用することによって, 超越性を導く．

# 3 代数的独立性の結果 ($w(n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ が lacunary である場合)

本章では, 数列 $w(n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ を変化させた場合に $f(w(n); X)$ の値の代数的独立性について述べる．まずは数列 $w(n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ が条件

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w(n+1)}{w(n)} = \infty \tag{3.1}$$

を満たす場合に, 知られている結果を紹介する．Schmidt [13] は Liouville の不等式を一般化することにより, ある代数的独立性の十分条件を構成した．$b$ を 2 以上の整数とする．上記の Schmidt の判定法を用いると, 無限集合

$$\left\{ f((ln)!; b^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-(ln)!} \;\middle|\; l = 1, 2, \ldots \right\}$$

が代数的独立であることがわかる．また, Durand [7] は $0 < \alpha < 1$ を満たす代数的数 $\alpha$ に対して, 非加算無限集合

$$\left\{ f([x(n!)]; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{[x(n!)]} \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\ x > 0 \right\}$$

が代数的独立であることを示した．さらに, $\alpha$ が $0 < |\alpha| < 1$ を満たすより一般の代数的数であるとする．このとき, Shiokawa [14] は, Schmidt および Durand の結果を含む代数的独立性の判定法を, 条件 (3.1) のもとで構成した．

次に, 数列 $w(n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ が条件 (3.1) を満たさないが, lacunary である場合について述べる．この場合は, $f(w(n); X)$ が Mahler 型と呼ばれる関数等式を満たす場合に代数的独立性の判定法が研究されている．Mahler の方法

([11] 参照) を用いることにより, Nishioka [10] は $0 < |\alpha| < 1$ を満たす一般の代数的数 $\alpha$ に対して, 集合

$$\left\{ f(k^n; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{k^n} \middle| k = 2, 3, \dots \right\}$$

が代数的独立であることを示した.

# 4　一様分布論および超越数論への応用

一様分布論では, 数列がもつ分布を解析することが主な目標の一つである. 例えば, $b$ を 2 以上の整数とし, $\eta$ を非負実数とする. このとき, $\eta$ の $b$ 進展開における小数第 $n$ 位の digit を $s_n(b, \eta) \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ と記述する. ただし, $\eta = a/b^l$ $(a, l \in \mathbb{Z},\ a, l \geq 0)$ と書けるとき, 十分大きな $n$ に対して $s_n(b, \eta) = 0$ であると仮定する. 数列 $w(n)$ $(n = 0, 1, \dots)$ に対して

$$\xi := f(w(n); b^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-w(n)}$$

とおくと, これは $\xi$ の $b$ 進展開を与える. さて, 超越数とは代数的数ではない複素数のことであった. したがって, 代数的数の $b$ 進展開を研究することにより, 超越性の判定法を構成することができる. よく知られている通り, 有理数の $b$ 進展開は周期的である. 一方, 代数的無理数の $b$ 進展開について知られている事実は少ない. Borel [3] により, すべての代数的数が $b$ 進展開において正規数であると予想されている. 非負実数 $\eta$ が $b$ 進展開において正規数であるとは, $\eta$ の $b$ 進展開に現れる digit の分布が一様となることである. すなわち, 任意の長さ $l$ の word を $v = v_1 v_2 \dots v_l$ とする. このとき, $\eta$ の小数第 1 位から小数第 $N$ 位までに word $v$ が現れる回数を $\lambda(b, \eta, v; N)$ とおく. $\eta$ が $b$ 進展開において正規数であるとは, 任意の $v$ に対して

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\lambda(b, \eta, v; N)}{N} = \frac{1}{b^l} \tag{4.1}$$

が成り立つことである. さて, $\eta$ の $b$ 進展開において小数第 1 位から小数第 $N$ 位までに, 0 ではない digit が現れた回数を $\nu(b, \eta; N)$ と書くことにする. すると, $\eta$ が正規数なら, (4.1) により

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\nu(b, \eta; N)}{N} = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{b-1} \frac{\lambda(b, \eta, i; N)}{N} = \frac{b-1}{b} \tag{4.2}$$

となる. したがって, Borel の予想が正しいならば, 任意の代数的数 $\eta$ は正規数であるため, (4.2) を満たす. ところが, 代数的無理数の中で, 正規数である

ことが証明されている例はない．また, Borel の予想に関する反例も知られていない．実際, $\eta$ が代数的数の場合,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\nu(b,\eta;N)}{N} > 0 \tag{4.3}$$

が成立するかについても知られていない．$b=2$ の場合に, Bailey, Borwein, Crandall, Pomerance [2] は (4.3) に対する部分的な結果として, 以下の評価式を与えた: 代数的無理数 $\eta$ に対して $D=\deg\eta$ とおく．すると, $\eta$ に依存する正定数 $C(\eta)$ と $C'(\eta)$ が存在して, $N \geq C'(\eta)$ ならば,

$$\nu(2,\eta;N) \geq C(\eta)N^{1/D}$$

である．なお, $C(\eta)$ は計算可能な定数である．ある性質を満たす代数的無理数 $\eta$ に対して Rivoal [12] は $C(\eta)$ を改良した．さて, $b$ が 2 以上の一般の整数である場合は, $C(\eta)$ と $C'(\eta)$ をそれぞれ $b,\xi$ に依存する正定数 $C(b,\eta)$ と $C'(b,\eta)$ に置き換えることにより, 一般化をすることができる．すなわち, $b=2$ の場合と同様の手法を用いることで, $N \geq C'(b,\xi)$ ならば

$$\nu(b,\eta;N) \geq C(b,\eta)N^{1/D} \tag{4.4}$$

であることを証明できる．評価式 (4.4) において, $C'(\eta)$ は計算不可能な正定数である．Effective な評価については, Bugeaud [4] は以下のものを与えた: 次数 $D$ の代数的無理数 $\eta$ が与えられたとき, $1+\{\eta\}$ の最小多項式を $A_DX^D + A_{D-1}X^{D-1} + \cdots + A_0 \in \mathbb{Z}[X]$ $(A_D > 0)$ とおく．さらに,

$$H := \max\{|A_i| \mid 0 \leq i \leq D\}$$

とおく．すると, $N > (20b^D D^2 H)^{2D}$ ならば,

$$\nu(b,\eta;N) \geq \frac{1}{b-1}\left(\frac{N}{2(D+1)A_D}\right)^{1/D} \tag{4.5}$$

が成り立つ．代数的無理数の $b$ 進展開については, [1, 5] も参照されたい．

さて, (4.4) もしくは (4.5) を用いることにより次の結果が得られる: $d$ は整数, $p$ は実数であり, $2 \leq D < p$ であるとする．このとき,

$$\zeta_p(b^{-1}) := f([n^p];b^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-[n^p]}$$

は次数 $D$ 以下の代数的数ではない．また, (4.4) もしくは (4.5) より次の超越性の判定法も得られる: 数列 $w(n)$ $(n=0,1,\ldots)$ は, 任意の正数 $R$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w(n)}{n^R} = \infty$$

を満たすならば, $f(w(n);b^{-1})$ は超越数である. この判定法により, 必ずしも lacunary であるとは限らない数列 $w(n)$ $(n=0,1,\ldots)$ に対しても, 超越性が証明される. たとえば, 正の実数 $y$ に対して,

$$\beta_y(n) := \left[\exp\left((\log n)^{1+y}\right)\right]$$

とおく. なお, $n=0$ のとき, $\beta_y(n)$ は定義されないため, 便宜上 $n$ は 1 以上であるとする. すると, $n^R = \exp(R\log n)$ により, 数列 $\beta_y(n)$ $(n=1,2,\ldots)$ は (4.6) を満たす. したがって,

$$\mu_y(b^{-1}) := f(\beta_y; b^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} b^{-\beta_y(n)}$$

は超越数である. ここで,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_y(n+1)}{\beta_y(n)} = 1$$

より, 数列 $\beta_y(n)$ $(n=1,2,\ldots)$ は lacunary ではない. したがって 1 章で述べた手法では $\mu_y(b^{-1})$ の超越性を証明することができない.

# 5　主結果

$b$ を 2 以上の整数とする. 4 章では, 必ずしも lacunary とは限らない数列 $w(n)$ $(n=0,1,\ldots)$ に対して, $f(w(n);b^{-1})$ の超越性に関する判定法を紹介した. この章では, 数列 $w(n)$ $(n=0,1,\ldots)$ を変化させた際の $f(w(n);b^{-1})$ の代数的独立性について述べる. (4.4) または (4.5) を用いることにより, $\mu_y(b^{-1})$ は超越数であることが証明された. この数に関する代数的独立性の結果を述べる.

**定理 5.1** ([8])**.** $b$ を 2 以上の整数とする. このとき, 非加算無限集合

$$\{\mu_y(b^{-1}) \mid y \in \mathbb{R},\ y \geq 1\}$$

は代数的独立である.

定理 5.1 では, 集合 $\{\mu_y(b^{-1}) \mid y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ が代数的独立であるかについては判定できない. ところが, この集合から任意に異なる 2 個の元をとると, それらは代数的独立であることが次の定理からわかる.

**定理 5.2.** $b$ を 2 以上の整数とする. また, $x$ と $y$ を相異なる正の実数とする. このとき, $\mu_x(b^{-1})$ と $\mu_y(b^{-1})$ は代数的独立である.

最後に $\zeta_p(b^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-[n^p]}$ に関する数論的性質を述べる. まず, $D$ を 4 以上の整数とすると, 多項式 $(1-X)^D + (D-1)X - 1$ は区間 $(0,1) \subset \mathbb{R}$ に唯一つの零点 $\sigma_D$ を持つ. このとき, 次の定理が成立する.

**定理 5.3.** 数列 $w(n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ は以下の *2* 条件を満たすと仮定する.

*1.* すべての正数 $R$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w(n)}{n^R} = \infty.$$

.

*2.*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{w(n+1)}{w(n)} < \infty.$$

さらに, 整数 $D$ と実数 $p$ について, $1 \leq D \leq 3$ ならば, $p > D$ を満たすとする. また, $D \geq 4$ ならば, $p > \sigma_D^{-1}$ であるとする. このとき, 任意の整数 $b \geq 2$ に対して集合

$$\{\zeta_p(b^{-1})^i f(w(n); b^{-1})^j \mid 0 \leq i \leq D,\ 0 \leq j\}$$

は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

例えば, $\sigma_4^{-1} = 5.278\ldots,\ \sigma_5^{-1} = 8.942\ldots,\ \sigma_6^{-1} = 13.60\ldots$ である. さて, 複素数 $\xi_1$ と $\xi_2$ が代数的独立であるとは, 集合 $\{\xi_1^i \xi_2^j \mid 0 \leq i, j\}$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立となることである. したがって, 定理 5.3 は代数的独立性について部分的な結果を与える.

# 参考文献


[1] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, On the complexity of algebraic numbers. I. Expansions in integer bases, Ann. of Math. **165** (2007), 547-565.

[2] D. H. Bailey, J. M. Borwein, R. E. Crandall and C. Pomerance, On the binary expansions of algebraic numbers, J. Théor. Nombres Bordeaux **16** (2004), 487-518.

[3] É. Borel, Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne, C. R. Acad. Sci. Paris **230** (1950), 591-593.

[4] Y. Bugeaud, Distribution modulo one and diophantine approximation, Cambridge Tracts in Math. 193, Cambridge, 2012.

[5] Y. Bugeaud and J.-H. Evertse, On two notions of complexity of algebraic numbers, Acta Arith. **133** (2008), 221-250.

[6] P. Corvaja and U. Zannier, Some new applications of the subspace theorem, Compositio Math. **131** (2002), 319-340.

[7] A. Durand, Indépendance algébrique de nombres complexes et critère de transcendance, Compositio Math. **35** (1977), 259-267.

[8] H. Kaneko, Algebraic independence of real numbers with low density of nonzero digits, Acta Arith. **154** (2012), 325-351.

[9] K. Mahler, Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen, Math. Ann. **101** (1929), 342-366.

[10] K. Nishioka, Algebraic independence by Mahler's method and $S$-unit equations, Compositio Math. **92** (1994), 87-110.

[11] K. Nishioka, Mahler Functions and Transcendence, Lecture Notes in Math. 1631, Springer, 1996.

[12] T. Rivoal, On the bits counting function of real numbers, J. Aust. Math. Soc. **85** (2008), 95-111.

[13] W. M. Schmidt, Simultaneous approximation and algebraic independence of numbers, Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 475-478.

[14] I. Shiokawa, Algebraic independence of certain gap series, Arch. Math. **38** (1982), 438-442.