# 同変層とそれを用いた不変式論

橋本　光靖

名古屋大学

## 1.　序

同変層とは層に群スキームの作用が乗ったものである．本報告集で扱う同変層は (エタールコホモロジーの話題で現れる constructible sheaf 系の層とは違い) 準連接層系のものである．考えている群が自明の場合には, 代数幾何学で現れる普通の層であり, 考えているスキームが $\operatorname{Spec} k$ の場合, それは代数群の表現である．だから同変層は代数幾何・可換環論と表現論が同時に現れる数学, すなわち広い意味での不変式論を扱うのに大変向いている．不変式論における同変層というのは, 代数幾何における (準連接) 層, (可換) 環論における加群, 表現論における表現と同様に, 大変基本的存在である (べき) と思う．

この報告集の前半では, 同変層の定義と基本となる six operations ($\underline{\mathrm{Hom}}$, $\otimes$, $f_*$, $f^*$, $f^!$, $f_!$) の構成について概説する．ただし, $f_!$ については何も述べない．これらのうち最初の４つ ($\underline{\mathrm{Hom}}$, $\otimes$, $f_*$, $f^*$) はほぼ定義の corollary みたいなものであるが, $f^!$ (捻れ逆像, twisted inverse) の構成は自明ではなく, 本報告集の焦点である．これには Neeman による Brown representability と, 永田コンパクト化の図式版が効いている．同変層には Mumford による $G$-linearized $\mathcal{O}_X$-module とか, 商スタック $[X/G]$ 上の層といった別の見方もあるが, 永田コンパクト化のためには, 現在のところスキームの図式による見方が一番すぐれていると思う．$f^!$ の構成が出来たところで, Grothendieck 双対性の同変版, 同変双対化複体, 同変標準層, 同変局所双対性について述べる．群の作用を考えない代数幾何学との対比で考えれば, これらは基本中の基本と位置づけられるような構成ないしは定理であると思う．

後半では, 前半の構成と結果の応用として, 不変式環の標準層を求めることを中心とした, 概主束 (almost principal bundle) の定義と応用例を述べる．

２節は同変層の定義である．（準連接な）同変層について, いくつか見かけの違う同値な定義についても触れる．３節で six operations (のうちの５つ),

とりわけ捻れ逆像 $f^!$ の構成について述べる. この節の内容は [6] で述べられていることのサーベイである. 捻れ逆像の構成によって, (同変) 双対化複体, (同変) 標準層を系統だって論じることが出来るようになる. このことの応用として, 4 節では局所双対性に代表される局所環論の同変版について述べる. これは大渓正浩氏との共同研究で, 4 節は [8], [9] のまとめになっている. 5 節は概主束という筆者によって最近定義された主束 (トーサー) の一般化について, 標準層の振る舞い, ということにやや力点を置きつつ解説し, 関連した藏野和彦氏, 三内顕義氏, 中嶋祐介氏それぞれとの共同研究にも触れる. 同変層に関する一般論の研究が不変式論に実際に応用される様子を感じて頂ければと思う. 6 節で, 我々のアプローチの抱える課題について触れる.

講演の機会を与えてくださったことに感謝をいたします. 本講演準備中に [3] の存在を教えて下さった馬昭平さんに感謝いたします.

## 2. 同変層の定義

**(2.1)** スキームの射 $\varphi : X \to Y$ が *fpqc* とは, $\varphi$ が忠実平坦で, $Y$ の任意の quasi-compact open subset が $X$ のある quasi-compact open subset の像であることをいう.

これは “**f**idèlment **p**lat et **q**uasi-**c**ompact” の略である. 文字通り「忠実平坦かつ準コンパクト」の意味に使われる場合もあるが, ここでの定義はもう少し弱いことに注意する. そのおかげで, fppf (忠実平坦かつ局所的に有限表示) ならば fpqc である. 詳しくは [3, (1.2.3.2)] 参照.

**(2.2)** 本報告集を通し, $S$ はスキーム, $G$ は $S$ 上 fpqc な $S$ 群スキーム, $X$ は $G$ スキーム, すなわち, $G$ が作用する $S$ スキームとする.

**(2.3)** 同変層には何通りかの見方があるが, 後で出てくる捻れ逆像の構成という目的のためには, スキームの図式による見方が便利であると思う.

$\mathrm{Sch}/S$ で $S$-schemes の圏を表す. $I$ を小さい圏とし, $X_\bullet \in \mathrm{Func}(I^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ とする. 圏 $\mathrm{Zar}(X_\bullet)$ を

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Zar}(X_\bullet)) := \{(i, U) \mid i \in \mathrm{Ob}(I),\ U \in \mathrm{Zar}(X_i)\},$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Zar}(X_\bullet)}((j,V),(i,U)) := \{(\phi, h) \mid \phi \in \mathrm{Hom}_I(i,j),$$
$$h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/S}(V, U),\quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_j & \xrightarrow{X_\phi} & X_i \end{array} \text{ は可換図式}\}$$

で定義する.

$\mathrm{Zar}(X_\bullet)$ に Grothendieck 位相を,

$$\{(j_\lambda, V_\lambda)\} \xrightarrow{\{(\phi_\lambda, h_\lambda)\}} (i, U) \text{ が covering} \iff \\ \forall\lambda\ j_\lambda = i,\ \phi_\lambda = \mathrm{id}_i \text{ かつ } \bigcup_\lambda h_\lambda(V_\lambda) = U$$

で定める.

$\Gamma((i,U), \mathcal{O}_{X_\bullet}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_{X_i})$ と定めることにより, $\mathrm{Zar}(X_\bullet)$ は ringed site となる. $\mathrm{Mod}(\mathrm{Zar}(X_\bullet))$ は単に $\mathrm{Mod}(X_\bullet)$ と書く.

**(2.4)** $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(X_\bullet)$ と $i \in \mathrm{Ob}(I)$ に対して, $\mathcal{M}_i$ を $\Gamma(U, \mathcal{M}_i) = \Gamma((i,U), \mathcal{M})$ で定めると $\mathcal{M}_i \in \mathrm{Mod}(X_i)$. これを $\mathcal{M}$ の $X_i$ への制限という.

$\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(X_\bullet)$, $(\phi : i \to j) \in \mathrm{Mor}(I)$ とする. $\beta_\phi : \mathcal{M}_i \to (X_\phi)_* \mathcal{M}_j$ を

$$\Gamma(U, \mathcal{M}_i) = \Gamma((i,U), \mathcal{M}) \xrightarrow{\mathrm{res}} \Gamma((j, X_\phi^{-1}(U)), \mathcal{M}) \\ = \Gamma(X_\phi^{-1}(U), \mathcal{M}_j) = \Gamma(U, (X_\phi)_* \mathcal{M}_j)$$

で定める.

定義から, 各 $i \in I$ について $\beta_{\mathrm{id}_i} = \mathrm{id}_{(?)_i}$ である. また, $\phi : i \to j$ と $\psi : j \to k$ が $I$ の射の時,

$$\mathcal{M}_i \xrightarrow{\beta_\phi} (X_\phi)_* \mathcal{M}_j \xrightarrow{(X_\phi)_* \beta_\psi} (X_\phi)_*(X_\psi)_* \mathcal{M}_k \cong (X_\phi X_\psi)_* \mathcal{M}_k = (X_{\psi\phi})_* \mathcal{M}_k$$

の合成は $\beta_{\psi\phi}$ である. 逆にこれらの条件をみたす族 $((\mathcal{M}_i)_{i \in I}, (\beta_\phi)_{\phi \in \mathrm{Mor}(I)})$ は $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(X_\bullet)$ を $\Gamma((i,U), \mathcal{M}) = \Gamma(U, \mathcal{M}_i)$ で与える. よって両者は同一視される.

**(2.5)** 随伴性からくる同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(X_i)}(\mathcal{M}_i, (X_\phi)_* \mathcal{M}_j) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(X_j)}(X_\phi^* \mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j)$$

で $\beta_\phi$ に対応する射を $\alpha_\phi : X_\phi^* \mathcal{M}_i \to \mathcal{M}_j$ で表す. すなわち, $\alpha_\phi$ は合成

$$X_\phi^* \mathcal{M}_i \xrightarrow{X_\phi^* \beta_\phi} X_\phi^* (X_\phi)_* \mathcal{M}_j \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{M}_j$$

である. ここに $\varepsilon : X_\phi^* (X_\phi)_* \mathcal{M}_j \to \mathcal{M}_j$ は随伴の counit (例えば [13, (IV.1)] 参照) を表す.

**定義 2.6.** $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(X_\bullet)$ が**同変** (*equivariant*) (または *cartesian*) であるとは, すべての $\phi \in \mathrm{Mor}(I)$ について $\alpha_\phi$ が同型であることをいう. $\mathcal{M}$ が**局所準連接**であるとは, すべての $i \in \mathrm{Ob}(I)$ について $\mathcal{M}_i$ が準連接なことをいう. 局所準連接かつ同変のとき, **準連接** (*quasi-coherent*) という.

次は容易である.

**補題 2.7.**

$$\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_3 \to \mathcal{M}_4 \to \mathcal{M}_5$$

が $\mathcal{O}_{X_\bullet}$-modules の完全列とする.

1. $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_4$, $\mathcal{M}_5$ が局所準連接ならば, $\mathcal{M}_3$ もそうである.

2. すべての $X_\phi$ が平坦のとき, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_4$, $\mathcal{M}_5$ が同変 (または準連接) ならば, $\mathcal{M}_3$ もそうである. 特に準連接 $\mathcal{O}_{X_\bullet}$ 加群層全体 $\mathrm{Qch}(X_\bullet)$ はアーベル圏で, $\mathrm{Mod}(X_\bullet)$ の中で plump (つまり, 空でなく, kernel, cokernel, extension で閉じている) である.

証明は [6, Lemma 7.6] 参照.

**(2.8)** $G$ 同変 $\mathcal{O}_X$ 加群層は $G$ の $X$ への作用に付随したある種のスキームの図式の上の加群層として定義される.

全順序集合 $[n]$ を $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$ で定義する $(n \geq -1)$. 順序集合の圏 Ord の部分圏 $\Delta_M$ を

$$\mathrm{Ob}(\Delta_M) = \{[0], [1], [2]\},$$
$$\mathrm{Hom}_{\Delta_M}([i], [j]) = \{\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ord}}([i], [j]) \mid \gamma \text{ は単射 }\}$$

で定義する.

$\Delta_M$ の射 $[n-1] \to [n]$ で $i \in [n]$ が像に入らないものを $\delta_i(n)$ で表すと, $\Delta_M$ は

$$[2] \;\begin{smallmatrix} \xleftarrow{\delta_0(2)} \\ \xleftarrow{\delta_1(2)} \\ \xleftarrow{\delta_2(2)} \end{smallmatrix}\; [1] \;\begin{smallmatrix} \xleftarrow{\delta_0(1)} \\ \xleftarrow{\delta_1(1)} \end{smallmatrix}\; [0]$$

の形である.

$[i]$ から $[i]$ への射は identity しかなく, $i < j$ のとき $[j]$ から $[i]$ へは射は無く, $[0]$ から $[2]$ への射は $[1]$ を経由し, $\delta_0(2)\delta_0(1) = \delta_1(2)\delta_0(1)$, $\delta_2(2)\delta_0(1) = \delta_0(2)\delta_1(1)$, $\delta_1(2)\delta_1(1) = \delta_2(2)\delta_1(1)$ の 3 つである.

**(2.9)** スキームの図式 $B_G^M(X) \in \mathrm{Func}(\Delta_M^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ を

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, shift left=2, "1_G \times a"] \arrow[r, "\mu \times 1_X"] \arrow[r, shift right=2, "p_{23}"'] & G \times X \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & X \end{tikzcd}$$

で定義する. ここに $a : G \times X \to X$ は作用, $\mu : G \times G \to G$ は積, $p_{23}$, $p_2$ は projection である.

**定義 2.10.** $\mathcal{O}_{B_G^M(X)}$-modules 全体を $\mathrm{Mod}(G, X)$ で表し, その対象を $(G, \mathcal{O}_X)$-*module* と呼ぶ. その中で同変なものを**同変** $(G, \mathcal{O}_X)$-*module* と呼ぶ. その中で準連接なもの全体を $\mathrm{Qch}(G, X)$ で表す. 導来圏について, 例えば $D_{\mathrm{Qch}(G,X)}(\mathrm{Mod}(G, X))$ は $D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ 等と略記する.

以上が同変 $(G, \mathcal{O}_X)$ 加群層の定義であるが, 準連接 $(G, \mathcal{O}_X)$ 加群層にはいくつかの重要な別の見方がある. これらについて簡単に紹介しよう.

**(2.11)** 簡単のため $G$ は $S$ 上アフィンとする. 商スタック $X \to [X/G]$ はある意味 $G$-torsor (後述) になっている, 理想的な商であるが, $[X/G]$ は一般にはスキームではなく, それを一般化したスタックと呼ばれるものでしかない. 商スタックについては, たとえば [16, (7.17)] 参照. 圏同値 $\mathrm{Qch}([X/G]) \cong \mathrm{Qch}(G, X)$ が存在することが知られている [16, (7.21)].

**定義 2.12.** $(\mathcal{M}, \phi)$ が $G$ **線形化された** $\mathcal{O}_X$ **加群層** とは,

1. $\mathcal{M}$ は $\mathcal{O}_X$ 加群層

2. $\phi : a^*\mathcal{M} \to p_2^*\mathcal{M}$ は $\mathcal{O}_{G\times X}$ 線型で次の図式は可換

$$\begin{tikzcd} (1_G \times a)^* a^* \mathcal{M} \arrow[r, "(1_G \times a)^*\phi"] \arrow[d, "\cong"] & (1_G \times a)^* p_2^* \mathcal{M} \arrow[r, "\cong"] & p_{23}^* a^* \mathcal{M} \arrow[d, "p_{23}^*\phi"] \\ (\mu \times 1_X)^* a^* \mathcal{M} \arrow[r, "(\mu \times 1_X)^*\phi"] & (\mu \times 1_X)^* p_2^* \mathcal{M} \arrow[r, "\cong"] & p_{23}^* p_2^* \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

であることをいう. ここに $p_2(g, x) = x$, $p_{23}(g, g', x) = (g', x)$, $a(g, x) = gx$, $\mu(g, g') = gg'$.

図式の可換性は cocycle condition と呼ばれる. 対 $(\mathcal{M}, \phi)$ は商 $X \to [X/G]$ に関する準連接層の descent datum であるとみなされる.

**補題 2.13.** 準連接な線形化された $\mathcal{O}_X$ 加群層の圏は $\mathrm{Qch}(G, \mathcal{O}_X)$ と同値.

準連接な線形化された $\mathcal{O}_X$-module $(\mathcal{M},\phi)$ に対して, $\mathcal{N}_{[0]}=\mathcal{M}$, $\mathcal{N}_{[1]}=a^*\mathcal{M}$, $\mathcal{N}_{[2]}=(a\circ(1_G\times a))^*\mathcal{M}$ とし, たとえば $\alpha_{\delta_0}:a^*\mathcal{N}_{[0]}\to\mathcal{N}_{[1]}$ は identity, $\alpha_{\delta_1}:p_2^*\mathcal{N}_{[0]}\to\mathcal{N}_{[1]}$ は $\phi^{-1}$ とするなどして $\mathrm{Qch}(G,\mathcal{O}_X)$ の対象 $\mathcal{N}$ が対応する. 逆に $\mathcal{N}\in\mathrm{Qch}(G,\mathcal{O}_X)$ とすると, $\mathcal{M}=\mathcal{N}_{[0]}$ とし,

$$a^*\mathcal{M}\xrightarrow{\alpha_{\delta_0}}\mathcal{N}_{[1]}\xrightarrow{\alpha_{\delta_1}^{-1}}p_2^*\mathcal{M}$$

の合成を $\phi$ とおくことによって $(\mathcal{M},\phi)$ は準連接な線形化された $\mathcal{O}_X$-module になる. 以上の対応が同値を与える.

**(2.14)** $R$ は可換環, $S=\operatorname{Spec}R$, $G=\operatorname{Spec}H$ も $X=\operatorname{Spec}B$ もアフィンとする. この場合には加群による準連接 $(G,\mathcal{O}_X)$ 加群の記述がある.

$B$ には $G$ が作用する. $H$ は可換 $R$ 平坦な $R$-Hopf 代数であり, $B$ は (可換な) $H$-comodule algebra である.

$M$ が $(G,B)$*-module* であるとは, $M$ は $G$-module であり, $B$-module でもあり, 両者から来る $R$-module 構造は一致し, 作用 $B\otimes M\to M$ が $G$ 線型であることをいう.

これは $M$ が $(H,B)$-Hopf module ということに他ならない.

**補題 2.15.** 圏 $\mathrm{Qch}(G,X)$ と $(G,B)$-modules の圏は同値である.

**(2.16)** 以上が準連接 $(G,\mathcal{O}_X)$ 加群の同値な定義であった. 例として, 極端な場合を考える.

**例 2.17.** $k$ は代数的閉体, $S=\operatorname{Spec}k$, $G$ は $k$ 上の線型代数群とする. $X=S=\operatorname{Spec}k$ とすると, $\mathrm{Qch}(G,X)$ は $G$ 加群 ($G$ の表現) のなす圏である. これが ($G$ が自明でないとスキームとしては存在しない) $BG:=[(\operatorname{Spec}k)/G]$ の上の準連接層の圏とみなせる.

**例 2.18.** $G$ が自明ならば, $\mathrm{Qch}(G,X)$ は $\mathrm{Qch}(X)$ と同一視される.

以上の２つの例からも分かるように, 同変加群は表現論的な面と代数幾何的な面の両方を併せ持った存在である.

## 3. Six operations (のうちの５つ)

**(3.1)** $\mathcal{M}\in\mathrm{Qch}(B_G^M(X))$ について, $\mathcal{M}_{[0]}\in\mathrm{Mod}(X)$ ($\mathcal{M}$ への $G$ の作用を忘却したもの) を $\mathcal{M}$ としばしば同一視する. これは代数群の表現 $V$ について, 群作用を忘れて単にベクトル空間と思ったものも同じ記号 $V$ で表すのと同様である.

特に, $\mathcal{O}_{B_G^M(X)}$ は単に $\mathcal{O}_X$ (に $G$ 作用がついたもの) と表す. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{B_G^M(X)}}$ や $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{B_G^M(X)}}$ も $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}$ や $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}$ と書いてしまう.

次に層論では欠かせない, Grothendieck の six operations の構成について見ていこう. Six operations とは, $\underline{\mathrm{Hom}}$, $\otimes$, $f_*$, $f^*$ (およびその導来関手) と $f^!$, $f_!$ のことである. 最初の 4 つに関してはほとんど定義の系である.

**補題 3.2.** $\mathbb{F}, \mathbb{G} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ に対して, $\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} \mathbb{G} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$. また, $\otimes^L_{\mathcal{O}_X}$ は群作用の忘却と可換. つまり, $(\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} \mathbb{G})_{[0]} \cong \mathbb{F}_{[0]} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} \mathbb{G}_{[0]}$.

**注意 3.3.** 特に $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathrm{Qch}(G, X)$ に対して, $\underline{\mathrm{Tor}}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ に $\mathrm{Qch}(G, X)$ の object としての構造が入る. このことは, $S = \mathrm{Spec}\, R$, $G = \mathrm{Spec}\, H$, $X = \mathrm{Spec}\, B$ すべてが affine でも明らかなことではない. $\mathrm{Mod}(G, X)$ まで圏を広げることによって, K-flat resolution を容易にとることができるようになる.

**補題 3.4.** $X$ は locally Noetherian, $G$ は $S$ 上 of finite type とする. $\mathbb{F} \in D^-_{\mathrm{Coh}}(G, X)$, $\mathbb{G} \in D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ のとき, $R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}, \mathbb{G}) \in D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$. また, このとき canonical map

$$R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}, \mathbb{G})_{[0]} \to R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}_{[0]}, \mathbb{G}_{[0]})$$

は同型.

**注意 3.5.** $\mathbb{F}$ が coherent cohomology を持つという仮定は外せない. たとえば, $V$ が無限次元の代数群 $G$ の表現のとき, $V^*$ は (rational な) $G$-module には一般にはならない.

**(3.6)** 次に順像・逆像について論じよう. $I$ が小さい圏, $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ は $\mathrm{Func}(I^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ の射 (つまり自然変換) とする. $f_\bullet^{-1} : \mathrm{Zar}(Y_\bullet) \to \mathrm{Zar}(X_\bullet)$ を $f_\bullet^{-1}(i, U) = (i, f_i^{-1}(U))$ で定めると $f_\bullet^{-1}$ は ringed continuous functor. $f_\bullet^{-1}$ による引き戻し

$$(f_\bullet^{-1})^\# : \mathrm{Mod}(X_\bullet) \to \mathrm{Mod}(Y_\bullet)$$

を順像 $(f_\bullet)_*$ と定める. その左随伴関手を逆像と呼んで $f_\bullet^*$ と表す.

**(3.7)** $f : X \to Y$ が $G$ 射のとき, $\mathrm{Func}(\Delta_M^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ の射 $B_G^M(f) : B_G^M(X) \to B_G^M(Y)$ が

$$\begin{tikzcd}
B_G^M(X): & G \times G \times X \arrow[r, shift left=2, "1_G \times a"] \arrow[r, "\mu \times 1_X"] \arrow[r, shift right=2, "p_{23}"'] \arrow[d, "1_G \times 1_G \times f"'] & G \times X \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] \arrow[d, "1_G \times f"] & X \arrow[d, "f"] \\
B_G^M(Y): & G \times G \times Y \arrow[r, shift left=2, "1_G \times a"] \arrow[r, "\mu \times 1_Y"] \arrow[r, shift right=2, "p_{23}"'] & G \times Y \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

で定まる.

$B_G^M(f)_*: \mathrm{Mod}(G,X) \to \mathrm{Mod}(G,Y)$ を単に $f_*$ と略記する. $B_G^M(f)^*$ は $f^*$ と略記する.

**補題 3.8.** $f: X \to Y$ が $G$ 射のとき, $\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G,Y)$ について $Lf^*\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G,X)$. また, 自然な射 $Lf^*\mathbb{F}_{[0]} \to (Lf^*\mathbb{F})_{[0]}$ は同型.

**補題 3.9.** $f: X \to Y$ が quasi-compact quasi-separated な $G$ 射のとき, $\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G,X)$ について $Rf_*\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G,Y)$. また, 自然な射 $(Rf_*\mathbb{F})_{[0]} \to Rf_*\mathbb{F}_{[0]}$ は同型.

Six operations の 5 個目, $f^!$ の構成について論じよう. これは前の 4 つほどには自明ではなく, [6] で論じられている.

**補題 3.10** (Neeman, Bondal–van den Bergh, H)**.** $I$ は小さい圏, $f_\bullet: X_\bullet \to Y_\bullet$ は (各 $f_i$ が) quasi-compact quasi-separated な $\mathrm{Func}(I^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ の射とすると,

$$R(f_\bullet)_*: D_{\mathrm{Lqc}}(X_\bullet) \to D_{\mathrm{Lqc}}(Y_\bullet)$$

は直和を保つ. また, 各 $i \in I$ について $X_i$ が quasi-compact quasi-separated ならば, 3 角圏 $D_{\mathrm{Lqc}}(X_\bullet)$ は compactly generated. ここに $D_{\mathrm{Lqc}}$ は cohomology 群が局所準連接であることを表す.

Neeman の 3 角関手の右随伴の存在に関する定理 (Brown representability のひとつのバージョン) から, 次を得る.

**系 3.11.** 補題 3.10 と同じ状況で, $R(f_\bullet)_*$ は右随伴関手

$$R(f_\bullet)^\times: D_{\mathrm{Lqc}}(Y_\bullet) \to D_{\mathrm{Lqc}}(X_\bullet)$$

を持つ.

捻れ逆像 $f^!$ の定義のためには, $f$ を open immersion と proper morphism の合成に分け, それぞれについて定義するのが普通である. 次は良く知られた永田コンパクト化 [14], [12] の図式版である.

**定理 3.12** (永田コンパクト化)**.** $G$ は $S$ 上 of finite type とし, $f: X \to Y$ がネーター的 $G$ スキームの間の separated of finite type な $G$ 射とすると, $\mathrm{Func}(\Delta_M^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ における factorization

$$B_G^M(X) \xrightarrow{j} Z_\bullet \xrightarrow{p} B_G^M(Y)$$

が存在して, $j$ は image-dense な open immersion, $p$ は proper (たとえば $p$ が proper とは, 任意の $i \in \mathrm{Ob}(\Delta_M)$ について $p_i$ が proper なことを意味する).

証明は [6, Proposition 20.3] 参照.

**(3.13)**　$f : X \to Y$ が定理の通りのとき, $f^! = j^* p^\times$ と定義する．3 角関手 $f^! : D_{\mathrm{Lqc}}(G, Y) \to D_{\mathrm{Lqc}}(G, X)$ は分解 $f = pj$ の取り方によらない．$f^!$ を $f$ による**捻れ逆像** *(twisted inverse)* **関手**と呼ぶ.

次は捻れ逆像の基本性質である.

**補題 3.14.** $G$ は of finite type, $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ はネーター的 $G$ スキームの間の separated of finite type な $G$ 射とする．$\mathbb{F}, \mathbb{G} \in D^+_{\mathrm{Lqc}}(G, Y)$ とする.

1. $(?)^!$ は (contravariant) pseudo-functor [3, (1.3.10)] である．特に, $\mathrm{id}_X^! \cong \mathrm{Id}$, $(gf)^! \cong f^! g^!$.
2. $G$ 作用を忘れる自然な射 $(f^!\mathbb{F})_{[0]} \to f^!\mathbb{F}_{[0]}$ は同型である.
3. $f^!(D^+_{\mathrm{Qch}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ であり，$f^!(D^+_{\mathrm{Coh}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Coh}}(G, X)$ である.
4. $f$ が of finite flat dimension のとき, 自然な射 $f^!\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} Lf^*\mathbb{G} \to f^!(\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_Y} \mathbb{G})$ は同型である.
5. $f$ が smooth で relative dimension $d$ を持つとすると, $f^!\mathbb{F} \cong \bigwedge^d \Omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathbb{F}$.

証明は [6] 参照. 群の作用が無い場合同様, 次が成立する.

**定理 3.15** (同変 Grothendieck duality)**.** $G$ は of finite type, $f : X \to Y$ はネーター的 $G$ スキームの間の proper な $G$ 射とすると, $\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ と $\mathbb{G} \in D^+_{\mathrm{Lqc}}(G, Y)$ について, 圏 $D(G, Y)$ において

$$Rf_* R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}, f^!\mathbb{G}) \cong R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}(Rf_*\mathbb{F}, \mathbb{G}).$$

証明は [6, Theorem 25.2] 参照. 系として, 代数群の表現論における Serre duality が従う.

**系 3.16** (同変 Serre duality)**.** $k$ は代数閉体, $G$ は $k$ 上の簡約群, $T$ は極大トーラス, $B$ はそれを含む (negative な) Borel 部分群, $\lambda \in X(T)$ とすると, $G$-module の同型

$$H^i(G/B, \mathcal{L}(\lambda)) \cong H^{n-i}(G/B, \mathcal{L}(-(\lambda + 2\rho)))^*$$

が存在する．ここに, $n = \dim G/B$, $\rho$ は positive roots の和の半分, $\mathcal{L}(?)$ は 1 次元 $B$ 加群に associate した $G$-linearized ivertible sheaf.

Serre duality に関しては [10, (II.4.2)] 参照.

捻れ逆像を導入するメリットは何と言っても双対化複体の統一的な取り扱いが可能となる点である.

**(3.17)** $G$ は有限型, $X$ はネーター的とする. $\mathbb{I} \in D(G,X)$ が $X$ の ($G$ 同変) 双対化複体であるとは, $\mathbb{I} \in D_{\mathrm{Coh}}(G,X)$ で $i = 0,1,2$ について $\mathbb{I}_{[i]}$ は $(B_G^M(X))_{[i]}$ の双対化複体であることをいう.

**注意 3.18.** $\mathbb{I}$ が $X$ の $G$ 同変双対化複体ならば, $\mathbb{I}$ は有限の入射次元を持つ.

**(3.19)** $G$ は有限型, $X$ は固定された $G$ 同変双対化複体 $\mathbb{I}_X$ を持つネーター $G$ スキームで, $f : Y \to X$ が separated of finite type な $G$ 射の時, $\mathbb{I}_Y := f^!(\mathbb{I}_X)$ は $Y$ の $G$ 同変双対化複体である. これを *the* $G$-equivariant dualizing complex of $Y$ と呼ぶ. さらに $Y$ が non-empty で $G$ 連結の時, $\mathbb{I}_Y$ の 0 でない最初の cohomology 群を $\omega_Y$ で表し, $Y$ の $G$-canonical sheaf と呼ぶ. ただし, $G$ スキーム $Y$ が $G$ 連結とは, $Y = Y_1 \coprod Y_2$, $Y_i$ は空ではない開かつ閉な $G$ 部分スキームと書けないことをいう.

## 4. 局所環論の同変版

**(4.1)** 局所環論の「次数付き版」が存在することは可換環論を学ぶものはたいてい気づいている. これは $\mathbb{G}_m$ (または $\mathbb{G}_m^n$) 同変版だと捉えることが出来る. これをより一般の群スキームの場合に拡張したい. 次は局所スキーム (つまり局所環の Spec) の同変版の定義である.

**定義 4.2.** $X$ が *G-local* であるとは, ある unique な極小な空でない $G$ 不変な閉部分スキーム $Z$ が存在することをいう. このとき $(X,Z)$ が $G$-local であるともいう.

**例 4.3.** $S = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, $G = \mathbb{G}_m$, $X = \operatorname{Spec} B$ のとき, $X$ が $G$-local とは, $B$ が $\mathbb{Z}$-graded ring として後藤・渡辺の意味で $H$-local [4] であることと同じである.

次は $G$-local スキームの性質を用いて示される.

**定理 4.4** (H–大溪)**.** $k$ が体, $G$ が linearly reductive なアフィン $k$ 群スキーム, $X$ が Cohen–Macaulay Noetherian $G$ スキームとする. $\pi : X \to Y$ は幾何学的商でアフィン射とする. このとき $Y$ は Noetherian かつ Cohen–Macaulay である.

証明の概略. Noether 性は容易なので CM 性が問題. そのためには局所化して $(Y,y)$ は local scheme (つまり局所環の Spec) としてよい. **このとき** $(X,\pi^{-1}(y))$ **は** *G-local.* $X$ の CM 性と同変性によって ある $d$ について $H^i_{\pi^{-1}(y)}(\mathcal{O}_X) = 0$ $(i \neq d)$. このとき $H^i_y(\mathcal{O}_Y) = 0$ $(i \neq d)$. □

詳しくは [8, Theorem 9.5] を参照.

**(4.5)** 同変層との関連で, $G$-local $G$-scheme について, Matlis 双対性と局所双対性の同変版が得られている.

$(X, Y)$ は Noetherian $G$-local とし, $\mathbb{I}_X$ は固定された $X$ の $G$ 双対化複体とする. $\underline{H}^i_Y(\mathbb{I}_X) \neq 0$ となる $i$ はただひとつ. この $i$ が 0 のとき, $\mathbb{I}_X$ は $G$-normalized という. 以下 $\mathbb{I}_X$ は $G$-normalized とする. $\underline{H}^0_Y(\mathbb{I}_X)$ を $\mathcal{E}_X$ で表し, *G-Matlis* **層** と呼ぶ.

**定理 4.6** (Matlis 双対性, H–大溪)**.** 上の状況で, $\mathcal{F}$ で長さ有限の (準) 連接 $(G, \mathcal{O}_X)$-modules 全体を表すとすると, $\mathbb{D} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(?, \mathcal{E}_X)$ は $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}$ 自身への反変同値で, $\mathbb{D}^2 \cong \mathrm{Id}$.

詳しくは [9, (4.17)] を参照.

**定理 4.7** (H–大溪)**.** $(X, Y)$, $\mathbb{I}_X$, $\mathcal{E}_X$ は上の通りとする. このとき, $\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Coh}}(G, X)$ について同型

$$R\,\underline{\Gamma}_Y\,\mathbb{F} \cong R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}, \mathbb{I}_X), \mathcal{E}_X)$$

が存在し, $i \in \mathbb{Z}$ について同型

$$\underline{H}^i_Y(\mathbb{F}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\underline{\mathrm{Ext}}^{-i}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}, \mathbb{I}_X), \mathcal{E}_X)$$

を誘導する.

詳しくは [9, (4.18)] 参照.

## 5. 概主束

この節の内容は新しい結果で, 論文は準備中です.

**(5.1)** $S$ スキームの射 $\varphi : X \to Y$ が $G$ **不変射**とは, $\varphi(gx) = \varphi(x)$ が成立することをいう. $G$ 不変射 $\varphi : X \to Y$ が**自明な** $G$ **バンドル**とは, $G$ 同型かつ $Y$ 同型である射 $X \cong G \times Y$ が存在することをいう.

$\varphi : X \to Y$ が *G-torsor* (または**主** $G$ **バンドル**) であるとは, $\varphi$ が $G$ 不変射で, ある fpqc 射 $f : Y' \to Y$ による base change $\varphi' : X' \to Y'$ が自明な $G$ バンドルであることをいう.

$G$-torsor とは, (fpqc 位相で) 局所自明な $G$-bundle である.

**補題 5.2.** $G$ 不変射 $\varphi : X \to Y$ について次は同値.

1. $\varphi$ は $G$-torsor.

2. $\varphi$ は fpqc で, $\Phi : G \times Y \to X \times_Y X$ ($\Phi(g,x) = (gx,x)$) は同型.

Torsor と同変層の関係ということで挙げられるのは次の Grothendieck による descent theorem である.

**補題 5.3.** $\varphi : X \to Y$ が $G$-torsor とする.

1. $G$ が $S$ 上 quasi-compact, quasi-separated, separated, of finite presentation, affine, proper, finite ならば $\varphi$ もそうである.
2. $S$ が Noether 的で $G$ が of finite type のとき, $G$ は $S$ 上 l.c.i. (local complete intersection) であり, したがって $\varphi$ もそう.
3. (Grothendieck) $\varphi^* : \mathrm{Qch}(Y) \to \mathrm{Qch}(G, X)$ は同値であり, $\mathcal{M} \mapsto (\varphi_* \mathcal{M})^G$ がその準逆である.
4. $X$ の下の同型 $Y \to [X/G]$ が存在する.

証明は [6, (31.14)], [3, (1.4.46)] などを参照.

**(5.4)** $G$-torsor はすばらしい商であるが, 不変式論に現れる射 $\pi : X = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B^G = Y$ はまず $G$-torsor にはならない. そこで $G$-torsor の条件を緩めた次の条件を考える.

**定義 5.5.** $S$ スキームの図式

$$X \xleftarrow{i} U \xrightarrow{\rho} V \xhookrightarrow{j} Y$$

が **有理的概** *$G$-torsor* (**有理的概主** $G$ **束**) であるとは,

1. $G$ は $X$ と $Y$ に作用し, $G$ は $Y$ に自明に作用する.
2. $U$ は $X$ の $G$ 安定な開部分スキームで, $\operatorname{codim}_X(X \setminus U) \geq 2$ である.
3. $V$ は $Y$ の開部分スキームで, $\operatorname{codim}_Y(Y \setminus V) \geq 2$ である.
4. $\rho : U \to V$ は $G$-torsor.

**(5.6)** $\rho : X \dashrightarrow Y$ が有理的概主 $G$ 束とは, ある図式

$$X \xleftarrow{i} U \xrightarrow{\rho} V \xhookrightarrow{j} Y \tag{1}$$

が有理的概主 $G$ 束であることをいう. $\pi : X \to Y$ が**概主** $G$ **束**であるとは, $\pi$ が $G$ 不変射で, 有理的概主 $G$ 束 (1) で $\rho = \pi|_U$ であるものが存在することをいう.

有理的概主 $G$ 束 $\rho : X \dashrightarrow Y$ について, $X$ の $G$-canonical sheaf と $Y$ の canonical sheaf は関係づけられる.

**(5.7)** $S$ はネータ, $G$ は $S$ 上 (有限型かつ) 順滑で, 相対次元 $d$ を持つとする. $\mathcal{I}$ を単位元 $e = \operatorname{Spec} S \to G$ の定義イデアルとする. $G$ は $G$ 自身に随伴作用 $(g \cdot g' = gg'g^{-1})$ するものとすると $\mathcal{I}$ は $\mathcal{O}_G$ の $G$ イデアルであり, $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ は階数 $d$ の局所自由な $(G, \mathcal{O}_S)$ 加群となる. その双対 $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_S)$ を $\operatorname{Lie} G$ で表し, $G$ の随伴表現と呼ぶ.

**(5.8)**

$$X \xleftarrow{i} U \xrightarrow{\rho} V \xhookrightarrow{j} Y$$

は有理的概主 $G$ 束とし, $S$ は固定された双対化複体 $\mathbb{I}_S$ を持つネータースキームで, $X$ と $Y$ は空でなく $S$ 上分離的かつ有限型で $G$ 連結正規な $S$ スキームとする.

**定理 5.9.** 上記設定のもとで,

1. (Knop, H) $G$ は $S$ 上順滑で相対次元 $d$ を持つとする. $\Theta = \bigwedge^d \operatorname{Lie} G$ とおく. このとき $(G, \mathcal{O}_X)$ 同型 $\omega_X \cong i_*\rho^*j^*\omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} (f^*\Theta)^*$ と $\mathcal{O}_Y$ 同型 $\omega_Y \cong (j_*\rho_*i^*(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\Theta)))^G$ が存在する. ここに $f : X \to S$ は構造射.

2. $S = \operatorname{Spec} k$, $k$ は体とし, $G$ は有限な線型簡約群スキームとする. このとき $(G, \mathcal{O}_X)$ 同型 $\omega_X \cong i_*\rho^*j^*\omega_Y$ と $\mathcal{O}_Y$ 同型 $\omega_Y \cong (j_*\rho_*i^*\omega_X)^G$ が存在する.

**注意 5.10.** $k$ が体, $G$ は $k$ 上のアフィン代数群とする. $d = \dim G$, $\Theta = \bigwedge^d \operatorname{Lie} G$ とする. $\Theta$ は $G$ の 1 次元表現である.

1. $G$ が有限群ならば $\Theta$ は自明.

2. $G$ が (連結) 簡約群ならば $\Theta$ は自明.

3. (Knop) $G^\circ$ が簡約群でも $\Theta$ は自明とは限らない.

$\rho : X \dashrightarrow Y$ 有理的概主 $G$ 束で $X, Y$ が正規のとき, (主に $Y$ の) 次のような情報が取り出せる場合がある.

1. $\omega_Y$ (上のとおり)

2. $Y$ の reflexive sheaves の圏の情報

3. $Y$ の因子類群の情報

4. (三内顕義氏との共同研究, 標数 $p$ で) $F^e_*\mathcal{O}_Y$ の reflexive sheaf としての分解の情報, とりわけ $Y$ が finite $F$-representation type かどうか, $Y$ がネーター局所環の Spec のとき, $F$-signature.

**(5.11)** (有理的) 概主束の例を見ていこう. 最初は有限群の例である.

$k$ が代数閉体, $B = k[x_1, \dots, x_n]$, $V = \bigoplus_i kx_i$ とし, $G \subset \mathrm{GL}(V)$ は有限部分群とする. $A = B^G$ とし, $\pi : X = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A = Y$ は自然な射とする.

**定義 5.12.** $g \in \mathrm{GL}(V)$ が**擬鏡映** *(pseudo-reflection)* とは, $\operatorname{codim}_V \{v \in V \mid gv = v\} = 1$ であることをいう.

**補題 5.13.** $\pi : X \to Y$ が概主 $G$ 束であることと $G$ が擬鏡映を持たないことは同値である.

次は概主束の一般論から直ちに従う.

**補題 5.14.** $G$ が擬鏡映を持たないとする. このとき

1. $\mathrm{Cl}(Y) \cong X(G)$ である.
2. $\omega_B \cong (B \otimes_A \omega_A)^{**}$ かつ $\omega_A \cong \omega_B^G$ である.
3. $(?)^G : \mathrm{Ref}(G, B) \to \mathrm{Ref}(A)$ は同値である.

ここに $\mathrm{Ref}(G, B)$ は $B$-module として有限生成 reflexive module であるような $(G, B)$-modules の圏で, $\mathrm{Ref}(A)$ は有限生成 reflexive $A$-modules の圏である.

Canonical modules の関係式から次が従う. これは $G$ の位数が $k$ の標数で割れないときは渡辺敬一 [17], [18] によって, 一般の場合は Braun [1] によって示されている.

**系 5.15** (渡辺敬一, Braun)**.** $G$ が擬鏡映を持たないとき, 次は同値.

1. $\omega_B \cong B$;
2. $G \subset \mathrm{SL}(V)$;
3. $\omega_A \cong A$;
4. $A$ は quasi-Gorenstein (つまり $\omega_A$ は射影加群).

次は $V_i$ が自明表現の場合は渡辺・吉田 [19, Theorem 4.2] が, また $\mathrm{SL}_2$ の有限部分群による不変式環を含む 2 次元の $F$-regular double point について同じ結果を原・沢田 [5, Lemma 4.10] が示している.

**定理 5.16** (渡辺・吉田, 原・沢田, H–中嶋)**.** $k$ が標数 $p>0$ の代数的閉体で, $G$ が擬鏡映をもたず, $(|G|,p)=1$ とする. $V_1,\dots,V_r$ を $G$ の既約表現全体とし, $M_i=(B\otimes_k V_i)^G$ とする. $e>0$ に対して,

$$F_*^e(A)\cong M_1^{\oplus c_{e,1}}\oplus\cdots\oplus M_r^{\oplus c_{e,r}}$$

と一意的に書け, 各 $i$ について,

$$\lim_{e\to\infty}\frac{c_{e,i}}{p^{ne}}=\frac{\dim V_i}{|G|}.$$

**(5.17)** 有限群の例から離れて, 次に, トーラスの作用に関する概主束の例を挙げる.

$R$ は固定された双対化複体 $\mathbb{I}_R$ をもつネーター環, $Y$ は準射影的連結正規 $R$ スキーム, $D_1,\dots,D_r$ は $Y$ の Weil 因子とし, $\sum_i \mathbb{Z}\cdot D_i$ はアンプルな Cartier 因子を含むとする. $V=Y_{\mathrm{reg}}$ とし,

$$\mathcal{B}=(\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^r}\mathcal{O}(\sum_i\lambda_iD_i)t^\lambda)|_V,$$

$U=\underline{\mathrm{Spec}}_V\,\mathcal{B}$, $B=\Gamma(V,\mathcal{B})$, $X=\mathrm{Spec}\,B$ とおく.

$$B=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^r}\Gamma(Y,\mathcal{O}(\sum_i\lambda_iD_i))t^\lambda\subset k(Y)[t_1^{\pm1},\dots,t_r^{\pm1}]$$

を $D_1,\dots,D_r$ の *multi-section ring* という. さらに $D_1,\dots,D_r$ が $\mathrm{Cl}(Y)$ の自由基底のとき, $B$ を $Y$ の *Cox* **環**という.

**定理 5.18** (H–藏野, H)**.** 上の設定の下で, $G=\mathbb{G}_m^r$ とおくと,

$$X\xleftarrow{i}U\xrightarrow{\rho}V\xrightarrow{j}Y$$

は有理的概主 $G$ 束.

これは $Y$ が体上の projective normal variety の場合に, [7] において本質的に示された. このことから次が直ちに従う.

**系 5.19** (H–藏野, H)**.** $B$ は $R$ 上有限生成と仮定する. $\omega_Y=\mathcal{O}(K_Y)$ とすると, multi-section ring $B$ の graded canonical module $\omega_B$ は

$$\Gamma(X,i_*\rho^*j^*\omega_Y)=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^r}\Gamma(Y,\mathcal{O}(K_Y+\sum_i\lambda_iD_i)).$$

**(5.20)** 次に一般線型群の作用に関する概主束の例を観察する.

$S = \operatorname{Spec} k$, $m, n, t \in \mathbb{Z}$, $m, n \geq t \geq 2$ とする. $V = k^n$, $W = k^m$, $E = k^{t-1}$ とおく. $X = \operatorname{Hom}(E, W) \times \operatorname{Hom}(V, E)$, $Y = \{\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \operatorname{rank} \varphi < t\}$ と定義する. $\pi : X \to Y$ を $\pi(f, g) = f \circ g$ で定義する.

**補題 5.21** (De Concini–Procesi, H)**.** $\pi : X \to Y$ は概主 $\mathrm{GL}(E)$ 束である.

De Concini と Procesi [2] は $\pi$ が categorical quotient であることを示している. 補題から次が直ちに従う.

**系 5.22.**

1. (Bruns) $\mathrm{Cl}(Y) \cong X(\mathrm{GL}(E)) \cong \mathbb{Z}$.
2. (Svanes) 次は同値.
   (a) $m = n$.
   (b) $(\mathrm{GL}(E), \mathcal{O}_X)$ 加群として $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$.
   (c) $\mathcal{O}_Y$ 加群として $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y$.
   (d) $Y$ は Gorenstein.

## 6. 終わりに

**(6.1)** 最後に, 今回ご紹介したアプローチの抱える課題について触れておく.

Technical な理由から, (strictly) simplicial scheme を $[0], [1], [2]$ だけに truncate して考えているので, ‘cohomological descent’ ([15], [11] 参照) は (ほとんどの場合) 成り立たない.

Cohomological descent の成立する strictly simplicial scheme で考えてうまくいくかどうかは考え中です. 少なくとも, $G$-dualizing complex は有限の入射次元を持つとは限らなくなる. 何かご存知の方, 教えてください.

## References


[1] A. Braun, On the Gorenstein property for modular invariants, *J. Algebra* **345** (2011), 81–99.

[2] C. De Concini and C. Procesi, A characteristic free approach to invariant theory, *Adv. Math.* **21** (1976), 330–354.

[3] B. Fantechi et al., "Fundamental Algebraic Geometry. Grothendieck's FGA explained," *Mathematical Surveys and Monographs* **123**, Amer. Math. Soc. (2005).

[4] S. Goto and K.-i. Watanabe, On graded rings, I, *J. Math. Soc. Japan* **30** (1978), 179–213.

[5] N. Hara and T. Sawada, Splitting of Frobenius sandwiches, *Higher Dimensional Algebraic Geometry,* RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B24**, pp. 121–141.

[6] M. Hashimoto, Equivariant twisted inverses, *Foundations of Grothendieck Duality for Diagrams of Schemes* (J. Lipman, M. Hashimoto), Lecture Notes in Math. **1960**, Springer (2009), pp. 261–478.

[7] M. Hashimoto and K. Kurano, The canonical module of a Cox ring, *Kyoto J. Math.* **51** (2011), 855–874.

[8] M. Hashimoto and M. Ohtani, Local cohomology on diagrams of schemes, *Michigan Math. J.* **57** (2008), 383–425. Errata: **58** (2009), 599–600.

[9] M. Hashimoto and M. Ohtani, Equivariant Matlis and the local duality, *J. Algebra* **324** (2010), 1447–1470.

[10] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups,* Second edition, AMS (2003).

[11] G. Laumon and L. Moret-Bailly, *Champs Algébriques,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge **39**, Springer (2000).

[12] W. Lütkebohmert, On compactification of schemes, *Manuscripta Math.* **80** (1993), 95–111.

[13] S. Mac Lane, "Categories for the Working Mathematician," 2nd ed., Graduate Texts in Math. **5**, Springer (1978).

[14] M. Nagata, A generalization of the imbedding problem of an abstract variety in a complete variety, *J. Math. Kyoto Univ.* **3** (1963), 89–102.

[15] B. Saint-Donat, Techniques de descente cohomologique, Exposé $\mathrm{V}^{\mathrm{bis}}$, *SGA4, Théorie des Thopos et Cohomologie Étale des Schémas,* Lecture Notes in Math. **270**, Springer (1972).

[16] A. Vistoli, Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces, *Invent. Math.* **97** (1989), 613–670.

[17] K.-i. Watanabe, Certain invariant subrings are Gorenstein. I, *Osaka J. Math.* **11** (1974), 1–8.

[18] K.-i. Watanabe, Certain invariant subrings are Gorenstein. II, *Osaka J. Math.* **11** (1974), 379–388.

[19] K.-i. Watanabe and K.-i. Yoshida, Minimal relative Hilbert–Kunz multiplicity, *Illinois J. Math.* **48** (2004), 273–294.