# Rudvalis群と格子

千吉良直紀
熊本大学大学院自然科学研究科

本研究は北詰正顕氏（千葉大学）との共同研究である。

## 1　序

表題にある Rudvalis 群 $Ru$ は 26 個の散在型単純群のうちの 1 つであり、

$$|Ru| = 145,926,144,000 = 2^{14} \times 3^3 \times 5^3 \times 7 \times 13 \times 29$$

である。26 個の散在型単純群うち、20 個はモンスター単純群 $\mathbb{M}$ の部分群あるいは部分群の商群として得られる。残りの 6 個は

$$J_1, \qquad J_3, \qquad Ru, \qquad O'N, \qquad Ly, \qquad J_4$$

である。つまり、この話ではモンスター単純群のなかでは得られない群の１つを扱う。

$Ru$ は 1973 年に Arunas Rudvalis[4] によって rank 3 と呼ばれるグラフの自己同型群として存在の可能性が示され、同じ 1973 年に Conway-Wales[3] によってその構成がなされた。その後、Conway による別の構成方法について書かれた論文 [2]、また、極大部分群の決定については R. A. Wilson[5] および吉荒聡氏 [6] による論文がある。ATLAS[1] にも構成の簡単な説明が書かれている。大体次のようなことがポイントになる。

- $Ru$ は 4060 点上に作用し、1 点の固定部分群の作用で $4060 = 1 + 1755 + 2304$ と分かれる。ここで、1 点の固定部分群は ${}^2F_4(2)$ である。
- $\mathbb{Z}[i]$ 上 28 次元の格子 $L$ があって、$\mathrm{Aut}(L) \cong 4Ru = 2(2 \times Ru)$ となる。
- $Ru$ は $\mathbb{F}_2^{28}$ に作用する、すなわち、$Ru \subseteq GL(28, 2)$.

我々が $Ru$ を考え始めたのは次のことによる。

**Theorem 1** ([7])**.** $Ru$ を自己同型群に持つ 2 元体上の $[4060, 2030]$ 自己双対符号が存在する。実際には、非同型なものが 3 つ存在する。

気分的には $M_{24}$ が Golay code の自己同型群であるように、良い符号で $Ru$ のことがよくわかるものであることを期待した（現在も少し期待している）が、$\mathbb{F}_2^{4060}$ の部分空間というせいもあり、この符号をいじることが簡単ではない。そこで、上に述べたような $Ru$ の性質

を使って理解すべく、まずは、$Ru$ の様子がわかるように $\mathbb{Z}[i]$ 上の格子を出来るだけわかりやすく構成し直したいというのが今回の話の始まりである。気分的には $Co_0$ と Leech 格子と $M_{24}$ のようにわかりやすく記述したいということである。

今回の話の主題は、$Ru \supset U_3(3)$ があり、この位数 6048 の部分群 $U_3(3)$ を使えば、格子をわかりやすくとらえることができるということである。$U_3(3)$ はよく知られている 28 点上の置換表現を持っている。また、$U_3(3)$ は 2 つの異なる 63 点上の置換表現があり、このことから

$$U_3(3) \cong G_2(2)'$$

という例外的な同型が説明できることも注意しておく。

本報告と共に北詰氏の報告 [8] も参照されたい。

## 2 $SU_3(3)$

$V$ を $\mathbb{F}_9$ 上 3 次元ベクトル空間とする。$\bar{z} = z^3$ という Frobenius 自己同型を考える。$\mathbb{F}_9 = \{0, \pm 1, \pm i, \pm 1 \pm i\}$ とおくと、$\overline{a+bi} = a - bi$ となる。Hermitian 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用意して

$$U = \{\sigma \in SL(V) \mid \langle v, v' \rangle = \langle v^\sigma, v'^\sigma \rangle \ (v \in V)\}$$

とおけば、

$$U \cong SU_3(3) \cong U_3(3) \ (= PSU_3(3))$$

である。ここでの記号は ATLAS に従い、カッコの中は 9 ではなく 3 であることに注意する。

$$\Omega = \{v \in V \mid v \neq 0,\ \langle v, v \rangle = 0\}, \quad \Omega^* = \{[v] \mid v \in \Omega\}$$
$$\Gamma = \{u \in V \mid \langle u, u \rangle \neq 0\}, \qquad \Gamma^* = \{[u] \mid u \in \Gamma\}$$

とおく。ここで、$[v] = \{cv \mid c \in \mathbb{F}_9^\times\}$ である。$|\Omega^*| = 28,\ |\Gamma^*| = 63$ である。

$u \in \Gamma$ に対して、

$$\begin{array}{cccc} \sigma_u: & V & \longrightarrow & V \\ & \cup\!\!\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\!\shortmid \\ & w & \longmapsto & \sigma_u(w) = w - \frac{2\langle w, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u \end{array}$$

とすると、$U$ の位数 2 の元の集合 $I(U)$ は $I(U) = \{\sigma_u \mid u \in \Gamma\}$ で、$\Gamma^*$ と $I(U)$ は 1 対 1 に対応する。また、

$$[\sigma_u, \sigma_{u'}] = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle u, u' \rangle = 0$$

である。$u \in \Gamma$ に対して

$$X_u = \{[v] \in \Omega^* \mid \langle v, u \rangle = 0\}$$

とし、

$$\mathfrak{X} = \{X_u \mid u \in \Gamma\}$$

とおく。$|X_u| = 4$ で、$|\mathfrak{X}| = 63$ である。

**Lemma 1.** $(\Omega^*, \mathfrak{X})$ は 2-(28, 4, 1) design である。

$P \in Syl_2(U)$ をとると、$Z(P) \cong Z_4$ で、$|I(P)| = 7$ であって、

$$\Omega^* = \bigcup_{\sigma_u \in I(P)} X_u$$

すなわち disjoint な 4 点集合が 7 つあって $\Omega^*$ を分割していることになる。
次に正規直交系の集合

$$\mathfrak{B} = \{\{[u_0], [u_1], [u_2]\} \mid [u_j] \in \Gamma^*, \langle u_j, u_k \rangle = 0\}$$

を考える。$|\mathfrak{B}| = 63$ である。$B = \{[u_0], [u_1], [u_2]\} \in \mathfrak{B}$ に対応してできる部分群 $\langle \sigma_{u_j} \mid j = 0, 1, 2 \rangle \cong Z_2 \times Z_2$ は $4^2 : S_3$ という極大部分群（指数 63）の位数 $2^2$ の基本可換正規部分群に相当する。

$$Y_B = \{[v] \in \Omega^* \mid \prod_{j=0}^{2} \langle v, u_j \rangle \neq 0\}$$

として、

$$\mathfrak{Y} = \{Y_B \mid B \in \mathfrak{B}\}$$

とおくと、$|Y_B| = 16$ で、$|\mathfrak{Y}| = 63$ である。ここで、

$$\sharp\{X \in \mathfrak{X} \mid X \subset Y_B\} = 12 = 4 \times 3$$

となっていて、実際次のようになる。

**Lemma 2.** $Y_B$ は Shrikhande graph と呼ばれるグラフになる。

Shrikhande graph は

| | | | |
|---|---|---|---|
| ○ | ○ | ○ | ○ |
| ○ | ○ | ○ | ○ |
| ○ | ○ | ○ | ○ |
| ○ | ○ | ○ | ○ |

の各行、各列、斜め右上がりの計 12 個の 4 点集合を辺（同じ 4 点集合に入れば結ぶ）とする 16 点からなるグラフである。今の場合、4 点集合が $\mathfrak{X}$ の元になる。
$[u] \in \Gamma^*$ に対して、

$$\mathfrak{L}_{[u]} = \{B \in \mathfrak{B} \mid [u] \in B\}$$

として、

$$\mathfrak{L} = \{\mathfrak{L}_{[u]} \mid [u] \in \Gamma\}$$

とおく。$|\mathfrak{L}_{[u]}| = 3$, $|\mathfrak{L}| = 63$ である。

**Proposition 1.** $(\mathfrak{B}, \mathfrak{L})$ は generalized hexagon of order $(2, 2)$ of classical type となる。

この generalized hexagon の自己同型群が $G_2(2)$ であることから $U_3(3) \cong G_2(2)'$ がわかる。

# 3　$U$ の $\mathbb{C}^{28}$ への作用

$v \in \Omega$ で $v = \overline{v}$ となるものを 1 つ fix する。$v = v_1$ として、相異なる $v_2, \cdots, v_{28} \in \Omega$ を

$$\langle v_1, v_j \rangle = 1$$

となるようにとり、fix する。この 28 個の isotropic vector に

$$e_j = e_{v_j}$$

として、$\mathbb{C}^{28}$ の正規直交基底を対応させる。

一般に $v' \in \Omega$ をとると、$v' = cv_j$ となるように $c = \langle v', v_1 \rangle$ と $j$ $(1 \leq j \leq 28)$ が決まるが、このとき

$$e_{v'} = e_{cv_j} = \chi(c) e_{v_j}$$

と定めることにする。ここで $\chi$ は

$$\begin{array}{cccc} \chi: & \mathbb{F}_9^\times & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ & \Psi & & \Psi \\ & (-1+i)^k & \longmapsto & i^k \end{array}$$

という 2 乗写像 ($\mathbb{F}_9$ では $(-1+i)^2 = i$ なので) のようなものである。$\sigma \in U$ に対しては、

$$(e_{v'})^\sigma = e_{v'^\sigma}$$

と作用させる。また、

$$\begin{array}{cccc} \theta: & V & \longrightarrow & V \\ & \Psi & & \Psi \\ & v & \longmapsto & \overline{v} \end{array}$$

とする。$\theta$ は内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を保たない。しかしながら

$$\langle v_1, \overline{v_j} \rangle = \langle v_j, \overline{v_1} \rangle = \langle v_j, v_1 \rangle = \overline{\langle v_1, v_j \rangle} = 1$$

となるので、$\theta$ は $v_1, \cdots, v_{28}$ の上には置換として作用している。この $\theta$ の $\mathbb{C}^{28}$ への作用を各 $v_j$ に対して

$$(e_{v_j})^\theta = e_{\overline{v_j}}$$

とする。$v' = cv_j$ に対しての作用は、

$$(e_{v'})^\theta = (e_{cv_j})^\theta = (\chi(c) e_{v_j})^\theta = \chi(c) e_{\overline{v_j}} = \chi\left(\frac{c}{\overline{c}}\right) e_{\overline{cv_j}} = \chi(c^2) e_{\overline{v'}}$$

とする。$V$ 上では $\sigma \in U$ に対して $\theta\sigma\theta = \overline{\sigma}$ となるが、$\mathbb{C}^{28}$ への作用では少しずれた話になる。$\chi(c^2) = \pm 1$ であることに注意する。

**Lemma 3.**　(i) $v' \in \Omega$ に対して、$(e_{v'})^{\theta\sigma\theta\overline{\sigma}^{-1}} = \chi(\langle v', v_1 \rangle^2 \langle v', v_1^{\overline{\sigma}^{-1}} \rangle^2) e_{v'}$.

(ii) $\sigma \in U$ に対して、

$$\{[v'] \in \Omega^* \mid \chi(\langle v', v_1\rangle^2 \langle v', v_1^{\overline{\sigma}^{-1}}\rangle^2) = -1\} = \begin{cases} \emptyset & \\ Y_B & {}^{\exists}B \in \mathfrak{B} \\ \Omega^* \setminus Y_B & {}^{\exists}B \in \mathfrak{B} \\ \Omega^* & \end{cases}$$

(i) から、$\theta\sigma\theta\overline{\sigma}^{-1}$ は対角行列で、その対角成分は $\pm 1$ で、(ii) から $-1$ の現れるところを $Y_B$ を使って表示できるということになる。$Y_B$ 達に対称差で和を入れると、2 元体上の $[28, 7, 12]$ 符号ができる。この符号の自己同型群は $S_6(2)$ $(= PSp_6(2))$ である。

$\mathbb{C}^{28}$ に作用する群 $M$ を

$$M = \langle U, \theta, iI\rangle$$

とおく。

**Lemma 4.** $M \cong 4(2^6 : G_2(2)) = 2(2 \times 2^6 : G_2(2))$.

ここで、4 は位数 4 の巡回群 $\langle iI\rangle$ であり、位数 $2^7$ の基本可換 2 部分群が正規部分群で、上の $[28, 7, 12]$ 符号と対応（codeword が $-1$ の diagonal matrix）する。$2^7 \cap \langle iI\rangle = \langle -I\rangle$ である。

# 4 short vectors

ここでは、lattice を生成する自分自身の内積が 4 のベクトルを構成する。$\mathbb{C}^{28}$ の標準内積を ( , ) で表すことにする。

## 4.1 type 1

$X_u$ に関するベクトルを定義する。

$u \in \Gamma$ に対して、$u^\perp$ には $\Omega$ の元が $4 \times 8$ 個ある。そのうち、$a, b \in \Omega \cap u^\perp$ を $\langle a, b\rangle = i$ または $-i$ となるようにとると、

$$a, \qquad b, \qquad a+b, \qquad a-b$$

が $\Omega$ の元になる。この $a, b$ に対して

$$w_1 = e_a + e_b + e_{a+b} + e_{a-b}$$
$$w_1' = e_a + e_b - e_{a+b} - e_{a-b}$$

とおく。$M$-orbit $w_1^M = \{w_1^m \mid m \in M\}$ を考える。

**Lemma 5.** (i) $w_1^M = {w_1'}^M = w_1^U \cup {w_1'}^U$

(ii) $|w_1^U| = 63 \times 4$, $|{w_1'}^U| = 63 \times 3 \times 4$.

(iii) $w, w' \in w_1^M$ $(w \neq w')$ に対して、$(w, w') \in \{0, \pm 1, \pm i\}$, また、$(w, w) = 4$ である。

$$\mathcal{S}_1 = w_1^M, \quad \mathcal{S}_{11} = w_1^U, \qquad \mathcal{S}_{12} = w_1'^U$$

とおく。

## 4.2 type 2

次に $Y_B$ (Shrikhande graph) に関するベクトルを定義する。

$$\text{自分自身の内積は } 4 \text{ で、ほかのベクトルとの内積は } \{0, \pm 1, \pm i\}$$

であるようなベクトルを探す。このとき、5 つのベクトルを足すと 0 になる可能性がある。そこで、type 1 から 3 つのベクトルを互いに内積が $-1$ になるようにとり、それと足して 0 になるようにうまくベクトルを 2 つみつけることを考える。例えば、

$$x_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & 1 & \\ \hline & i & & \\ \hline -1 & & & \\ \hline & & & -i \\ \hline\end{array}\,, \quad x_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & -1 & \\ \hline & & i & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & -i & \\ \hline\end{array}\,, \quad x_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline 1 & i & -1 & -i \\ \hline & & & \\ \hline\end{array}\,.$$

という type 1 のベクトル（マスのある数字は係数で、マスにはある $e_j$ が対応して、その和が type 1 のベクトルを表す）3 つをとって、これらを足すと、

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & i & i & \\ \hline & i & & -i \\ \hline & & -i & -i \\ \hline\end{array}\,.$$

となる。そこで、

$$w = \frac{1}{2} \times \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & -i & -i & \\ \hline & -i & & i \\ \hline & & i & i \\ \hline\end{array}$$

の空欄に $\{\pm 1, \pm i\}$ を入れれば $(w, w) = 4$ となるので、type 1 のベクトル $x$ に対して $(w, x) \in \{\pm 1, \pm i\}$ で特に $(w, x_j) = -1$ $(j = 1, 2, 3)$ となるように決める。

**Lemma 6.** 可能な $w$ は

$$w_{2,\pm} = \frac{1}{2} \times \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \pm i & \pm 1 & \pm i & \pm 1 \\ \hline \pm 1 & -i & -i & \pm 1 \\ \hline \pm i & -i & \pm i & i \\ \hline \pm 1 & \pm 1 & i & i \\ \hline\end{array}\,, \text{ または、} w'_{2,\pm} = \frac{1}{2} \times \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \pm i & \mp 1 & \pm i & \mp 1 \\ \hline \mp 1 & -i & -i & \mp 1 \\ \hline \pm i & -i & \pm i & i \\ \hline \mp 1 & \mp 1 & i & i \\ \hline\end{array}\,.$$

このように 5 つの和が 0 になるということで制限することにより、ベクトルが定まる。また、このことから type 2 のベクトルの $M$-orbit の様子もわかる（後述の Lemma 8 参照）。

## 4.3 type 3

最後に

$$z = \frac{1}{b}(a, 1, \cdots, 1)$$

というベクトルで、

- $(z, z) = 4$
- $x \in \mathcal{S}_1$ に対して $(x, z) \in \{0, \pm 1, \pm i\}$
- $(w_{2,\pm}, z) \in \{0, \pm 1, \pm i\}$ あるいは $(w'_{2,\pm}, z) \in \{0, \pm 1, \pm i\}$

を満たすものを探す。

**Lemma 7.** (i) $w_{2,\pm}$ に対しては

$$z_1 = \alpha \times \frac{1}{2+2i} \left\{ (1-2i)e_1 + \sum_{j=2}^{28} e_j \right\}$$

で $\alpha \in \{\pm 1, \pm i\}$ となる。

(ii) $w'_{2,\pm}$ に対しては

$$z'_1 = \alpha \times \frac{1}{2-2i} \left\{ (1+2i)e_1 + \sum_{j=2}^{28} e_j \right\}$$

で $\alpha \in \{\pm 1, \pm i\}$ となる。

これをみると複素共役になっていることがわかり、$w'_{2,\pm} = -\overline{w_{2,\pm}}$ であるから、結局複素共役で移りあう 2 種類のものが出来上がったことになる。これらは $M$ で移り合わない。

**Lemma 8.** (i) $w^M_{2,+} = w^M_{2,-} = \bigcup_{\alpha \in \{\pm 1, \pm i\}} (\alpha w_{2,+})^U$ で、$|w^U_{2,+}| = 2016$ となる。

(ii) $z^M_1 = z^U_1 \cup \bigcup_{\alpha \in \{\pm 1, \pm i\}} (\alpha z^Y_1)^U \cup (z^{Y'}_1)^U$ である。ここで $Y, Y' \in M$ は $\mathfrak{Y}$ の元と同一視される元で、$[v_1] \in Y$, $[v_1] \notin Y'$ となるものとする。また、$|z^U_1| = 28 \times 4$, $|(z^Y_1)^U| = 1008$, $|(z^{Y'}_1)^U| = 756 \times 4$ となる。

(iii) $w'_{2,\pm}$, $z'_1$ についても同様。

$$\begin{array}{llll} \mathcal{S}_2 = w^M_{2,+}, & \mathcal{S}'_2 = {w'_{2,+}}^M, & \mathcal{S}_3 = z^M_1, & \mathcal{S}'_3 = {z'_1}^M \\ \mathcal{S}_{21} = w^U_{2,+}, & \mathcal{S}_{31} = z^U_1, & \mathcal{S}_{32} = (z^Y_1)^U, & \mathcal{S}_{33} = (z^{Y'}_1)^U \\ \mathcal{S}'_{21} = {w'_{2,+}}^U, & \mathcal{S}'_{31} = {z'_1}^U, & \mathcal{S}'_{32} = ({z'_1}^Y)^U, & \mathcal{S}'_{33} = ({z'_1}^{Y'})^U \end{array}$$

とおいて、

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3, \quad \mathcal{S}' = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}'_2 \cup \mathcal{S}'_3$$

とおくと、

$$|\mathcal{S}| = 4060 \times 4 = |\mathcal{S}'|$$

である。このように $4060 \times 4$ 個からなるベクトルの組が 2 種類作られることがわかる。

以下、$\mathcal{S}$ の方を考えることにする。$\mathcal{S}'$ でも同様である。

**Lemma 9.** $x, y \in \mathcal{S}$ に対して

(i) $(x, y) \in \{0, \pm 1, \pm i\}$

(ii) $(x, x) = 4$

$$f_k = \frac{1}{2+2i} \left\{ (1-2i)e_k + \sum_{j=1}^{28} \chi(\langle v_k, v_j \rangle) e_j \right\}$$

とおく。$f_j \in \mathcal{S}_{31}$ $(1 \leq j \leq 28)$ である。

**Lemma 10.** $\{f_k \mid k = 1, \cdots, 28\}$ は $\mathbb{C}^{28}$ の基底となる。

# 5 rank 3 graph

$\mathcal{S}$ で生成される $\mathbb{Z}[i]$ 格子 $L$ を考える。

$$\mathcal{S}^* = \{[x] \mid x \in \mathcal{S}\}$$

とおく。ここで、$[x] = \{\alpha x \mid \alpha \in \{\pm 1, \pm i\}\}$ とする。$[x]$, $[y]$ に edge を $(x, y) = 0$ で定義する。$\mathcal{S}^*$ を $U$-orbits に分けると、

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}^*| &= |\mathcal{S}^*_{11}| + |\mathcal{S}^*_{12}| + |\mathcal{S}^*_{21}| + |\mathcal{S}^*_{31}| + |\mathcal{S}^*_{32}| + |\mathcal{S}^*_{33}| \\ &= 63 + 63 \times 3 + 63 \times 32 + 28 + 28 \times 36 + 28 \times 27 \\ &= 63 + 189 + 2016 + 28 + 1008 + 756 \end{aligned}$$

と分かれる。

$\mathcal{S}$ の元を $f_1, \cdots, f_{28}$ を用いて表し、mod $(1+i)L$ での様子を調べる。$x, y \in \mathcal{S}$ に対して、

$$\begin{aligned} x &= f_{j_1} + \cdots + f_{j_m} + f_{j_{m+1}} + \cdots + f_{j_k} + (1+i)x' \\ y &= f_{j_1} + \cdots + f_{j_m} + f_{j'_{m+1}} + \cdots + f_{j'_t} + (1+i)y' \end{aligned}$$

（ここで、$x', y' \in L$）と書けているとする。初めのの $m$ 個は同じであとは異なるとする。内積の値を mod $(1+i)$ で考える。$(f_j, f_j) = 4 \equiv 0 \pmod{1+i}$ であり、$j \neq k$ に対して $(f_j, f_k) \in \{\pm 1, \pm i\}$ より $(f_j, f_k) \equiv 1 \pmod{1+i}$ となるので、

$$(x, y) \equiv m \times (t-1) + (k-m) \times t \equiv m + kt \pmod{1+i}$$

となり、したがって

$$(x, y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad m \equiv kt \pmod 2$$

であることになる。

$\mathcal{S}$ の元の $f_1, \cdots, f_{28}$ による表示 (mod $(1+i)L$) を用いて 28 点上の design を構成する。すなわち、上述の $x$ の場合には対応する block は

$$\{f_{j_1}, \cdots, f_{j_k}\}$$

とする。このとき

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{S}_{11}^* & : & \text{2-}(28,4,1)\text{ design} \\ \mathcal{S}_{12}^* & : & \text{2-}(28,20,95)\text{ design} \\ \mathcal{S}_{21}^* & : & \text{2-}(28,16,640)\text{ design} \\ \mathcal{S}_{32}^* & : & \text{2-}(28,9,96)\text{ design} \\ \mathcal{S}_{33}^* & : & \text{2-}(28,17,272)\text{ design} \end{array}$$

となる。これらの design の自己同型群は $U_3(3)$ あるいは $U_3(3):2$ である。また、$\mathcal{S}_{31}^*$ は 1 点からなる 28 個の block と思うことにする。前述の考察から次のことがわかる。

**Theorem 2** ([9]). $\mathcal{S}_{11}^* \cup \mathcal{S}_{12}^* \cup \mathcal{S}_{21}^* \cup \mathcal{S}_{32}^* \cup \mathcal{S}_{33}^* \cup \mathcal{S}_{31}^*$ の block $W, W'$ に

$$|W \cap W'| \equiv |W| \times |W'| \pmod 2$$

で edge を決めると、$Ru$ が作用する rank 3 graph になる。

このように $U_3(3)$ の作用する design をうまくとるとそれから $Ru$ の作用する rank 3 のグラフが構成できることがわかる。また、$L/(1+i)L$ で考えることにより、$GL(28,2)$ での表現がわかることにも注意しておく。

# 6 Lattice

$L$ を $\mathbb{R}^{56}$ に自然に埋め込んで $\widetilde{L}$ と書くことにする。

**Proposition 2.** $\widetilde{L}$ は even unimodular lattice.

そこで theta series を書いてみる。

$$\Theta_{\widetilde{L}}(z) = \sum_{x \in L} \exp(\pi i (x,x) z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad a_n = |\{x \in \widetilde{L} \mid (x,x) = 2n\}|, \quad q = \exp(2\pi i z).$$

よく知られているように $\mathbb{R}^n$ の even unimodular lattice の theta series は weight $\frac{n}{2}$ の modular form になる。また modular form のなす algebra は $\mathbb{C}[E_4, E_6]$ に同型である。ここで、$E_4$, $E_6$ は normalized Eisenstein series である。$\widetilde{L}$ の場合 $n = 56$ であるから、theta series $\Theta_{\widetilde{L}}$ は weight 28 の modular form となり、したがって $\Theta_{\widetilde{L}} \in \mathbb{C}[E_4^7, E_4^4 E_6^2, E_4 E_6^4]$ なる。このことから、$a_0$, $a_1$, $a_2$ の値がわかれば $\Theta_{\widetilde{L}}$ が決まる。

**Theorem 3.** (i) $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 16240 = 4060 \times 4$,

(ii) $\Theta_{\widetilde{L}}(z) = E_4^7 - 1680 E_4^4 \cdot \Delta + 364000 E_4 \cdot \Delta^2$,

ここで $\Delta = \dfrac{E_4^3 - E_6^2}{1728}$ とする。

## 7 まとめ

今回の話は、位数の小さい部分群 $U_3(3)$ の置換表現をうまく使って簡潔に $Ru$（及びその格子）が記述できるということであった。$Ru$ がよくわかったので、Theorem 1 の code の性質を詳しく調べることができるのではないかと思っている。これからの課題の 1 つである。また、$Ru$ が扱いやすくなったので、$Ru$ のまだ知られていないようないろいろな性質がわかるのではないかということも期待している。また、よく知られているように Leech lattice は $M_{24}$ の言葉でうまく定義でき、Leech lattice の自己同型群は $.O = Co_0$ で、ここから単純群 $Co_1$ が作られる。今回の話は $Ru$ という 1 つの単純群だけの話ではあったが、他の単純群でも似たような状況が起こっていて、小さい群の置換表現をうまく使って大きい群を捉えることができるのではないかと期待している。

## 参考文献


[1] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson, "Atlas of finite groups", Clarendon Press, Oxford, 1985.

[2] J. H. Conway, A quaternionic construction for the Rudvalis group, Topics in group theory and computation (Proc. Summer School, University Coll., Galway, 1973), 69–81, Academic Press, London, 1977.

[3] J. H. Conway and D. B. Wales, The construction of the Rudvalis simple group of order $145,926,144,000$, J. Algebra **27** (1973) 538–548.

[4] A. Rudvalis, A rank 3 simple group of order $2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$, I, J. Algebra **86** (1984) 181-218.

[5] R. A. Wilson, The geometry and maximal subgroups of the simple group of A. Rudvalis and J. Tits, Proc. London Math. Soc. **48** (1984) 533-563.

[6] S. Yoshiara, Maximal subgroups of the sporadic simple group of Rudvalis, Nihonkai Math. J. **2** (1991) 1–24.

[7] 北詰正顕，散在型単純群の周辺，第 53 回代数学シンポジウム報告集 (2008).

[8] 北詰正顕，Rudvalis 群に対する複素格子について，数理解析研究所講究録 **1811** (2012) 50–59.

[9] 千吉良直紀，Rudvalis 群と符号、第 28 回代数的組合せ論シンポジウム報告集 (2011) 24–27.