導来同値と 2 圏論的被覆理論
(導来同値の貼り合せ)

浅芝 秀人
(静岡大学理学部)

1. はじめに

この報告書では，I を小圏，G を群，$\Bbbk$ を可換環とする．すべての射集合が $\Bbbk$-加群で，合成が $\Bbbk$-双線形であるような圏を $\Bbbk$-**圏**とよぶ．記号 $\Bbbk$-**Cat**, $\Bbbk$-**Ab**, $\Bbbk$-**Tri** で，小 $\Bbbk$-圏全体（と $\Bbbk$-線型関手と自然変換のなす）2-圏，アーベル小 $\Bbbk$-圏全体の 2-圏，三角小 $\Bbbk$-圏全体の 2-圏を表す．ここでは 2-圏はすべて “強い意味” の 2-圏 (strict 2-categories) とする．2-圏については，例えば Kelly–Street の解説 [20] を参照されたい．以下，圏【2-圏】$\mathcal{C}$ の対象の全体を $\mathcal{C}_0$ で，射の全体を $\mathcal{C}_1$ で【2-射の全体を $\mathcal{C}_2$ で】表す．

P. Gabriel [13], Ch. Riedtmann [22], Bongartz–Gabriel [11] によって，多元環の表現論に被覆理論が導入され，そのクイバーの中に (oriented) cycle を含む多元環 (取り扱いにくい多元環) の表現を，そのクイバーの中に (oriented) cycle をより少なく含む多元環，圏 (より取り扱いやすい多元環，圏) の表現に帰着する方法が与えられた．これにより，特に自己入射多元環 (これはそのクイバーの中に oriented cycle をたくさん含んでいる) の研究が進み，有限表現型自己入射多元環の Auslander-Reiten クイバーの形が決定された ([22, 24, 24])．Waschbuüsch は，[25] で別の流儀の被覆理論を与え，有限表現型自己入射多元環を傾斜多元環からその自明拡大の被覆をとって構成する方法 (Hughes–Waschbüsch [17], [25]) などを与えた．他にも多元環に G-次数を付けて G とスマッシュ積をとることによって被覆を作る流儀 (E. Green [15], Cibils–Marcos[12]) もあり，[5] ではこの操作が軌道圏をとる操作の 2-擬逆であることを示しているが，ここでは，古典的被覆理論といえば，Gabriel [13] の流れを指すものとする．この被覆理論は [1] で導来同値にも使えるように改良され，それを用いて有限表現型自己入射多元環の導来同値分類 ([2]) が与えられ，さらに無限表現型も含む自己入射多元環のあるクラスについても導来同値分類が与えられた ([3])．

この報告書では，まずこの古典的な被覆理論を概観し，次に応用上問題となる仮定を取り除いて改良した理論 ([4]) を紹介する．その際，自然同型の族および 2-圏論的考察が必要になる．[9] はその応用例である．最後に群の作用を圏の (colax) 作用に一般化した理論 ([6, 7]) を紹介する．それによって導来同値を貼り合わすことができるようになるが，このことを例で説明する．

以下，環 A に対して，右 A-加群全体のなす圏を $\operatorname{Mod} A$ で表し，有限生成部分加群からなる充満部分圏を $\operatorname{mod} A$ で表す．

2. 古典的被覆理論

この節では Gabriel による古典的な被覆理論を概観する．以下この節を通して，$\Bbbk$ は代数的閉体とする．

定義 2.1. $\Bbbk$-圏 $\mathcal{C}$ は，次を満たすとき，**局所有限次元**であるという．

(1) $\mathcal{C}$ は **basic** である (すなわち，$x \neq y \Rightarrow x \not\cong y,\ \forall x, y \in \mathcal{C}_0$);
(2) $\mathcal{C}$ は **semiperfect** である (すなわち，$\mathcal{C}(x,x)$ は局所多元環である, $\forall x \in \mathcal{C}_0$);
(3) $\mathcal{C}$ は **Hom-finite** である (すなわち，$\mathcal{C}(x,y)$ は有限次元, $\forall x, y \in \mathcal{C}_0$).

$\mathcal{C}$ は，さらに次を満たすとき，**局所有界**であるという．

(4) $\forall x \in \mathcal{C}_0$, $\{y \in \mathcal{C}_0 \mid \mathcal{C}(x,y) \neq 0$ または $\mathcal{C}(y,x) \neq 0\}$ は，有限集合である．

例 2.2. A を $\Bbbk$ 上の有限次元多元環とし，$1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t_i} e_{ij}$ $(e_{ij}A \cong e_{pq}A \Leftrightarrow i = p)$ を直交する原始冪等元の和とする．$e := \sum_{i=1}^{n} e_i$ $(e_i := e_{i1}, \forall i)$ とおくと，eAe は e を単位元とする多元環で A と森田同値である．この eAe を改めて A とおく．

(1) A を次の $\Bbbk$-圏 $\mathcal{C}$ とみなすと，これは局所有界である: $\mathcal{C}_0 := \{e_1, \dots, e_n\}, \mathcal{C}(x,y) := yAx$ $(x, y \in \mathcal{C}_0)$, 合成 $\mathcal{C}(y,z) \times \mathcal{C}(x,y) \to \mathcal{C}(x,z)$ $(x,y,z \in \mathcal{C}_0)$ は，A の乗法で与える．
(2) 直既約 (右) A-加群の同型類の完全代表系を 1 つ選び，それのなす $\operatorname{mod} A$ の充満部分圏を $\operatorname{ind} A$ で表すと，これは局所有限次元である．

定義 2.3. $\Bbbk$-圏 $\mathcal{C}$ と群準同型 $X\colon G \to \operatorname{Aut}(\mathcal{C})$ の組 $(\mathcal{C}, X)$ を，G-**作用**をもつ $\Bbbk$-圏，あるいは単に G-**圏**とよぶ．混乱の恐れのないとき，$\mathcal{C} = (\mathcal{C}, X)$ と略記する．特に，自明な作用 $G \to \operatorname{Aut}(\mathcal{C}), a \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ $(a \in G)$ を 1 で表し，$\Delta(\mathcal{C}) := (\mathcal{C}, 1)$ とおく．

定義 2.4. $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, X)$ を G-圏とする．

(1) G-作用 X が**自由**であるとは，$\forall a \in G \setminus \{1\}, \forall x \in \mathcal{C}_0$ に対して，$X(a)x \neq x$ となることである．すなわち，$\forall x \in \mathcal{C}_0$ に対して，写像 $G \to Gx, a \mapsto X(a)x$ が単射となることである．ただし，$Gx := \{X(a)x \mid a \in G\}$.
(2) G-作用 X が**局所有界**であるとは，$\forall x, y \in \mathcal{C}_0$ に対して，$\{a \in G \mid \mathcal{C}(X(a)x, y) \neq 0\}$ が有限集合となることである．

注意 2.5. 上の (2) において，$\mathcal{C}(X(a)x, y) \cong \mathcal{C}(x, X(a^{-1})y)$ $(\forall a \in G)$ より，(2) の条件は，$\{a \in G \mid \mathcal{C}(x, X(a)y) \neq 0\}$ が有限集合となることと同値である．

定義 2.6. $\mathcal{C}, \mathcal{B}$ を局所有限次元 $\Bbbk$ 圏とし，$\mathcal{C} = (\mathcal{C}, X)$ の方は自由で局所有界な G-作用 X をもつとする．また，$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ を $\Bbbk$-線型関手とする．このとき

(1) F は，$F = F \cdot X(a)$ $(\forall a \in G)$ を満たすとき，**強い意味で** G-**不変**であるという．
(2) F が群 G をもつ**ガロア前被覆【ガロア被覆】**であるとは，F は強い意味で G-不変であり，次の (a), (b)【(a), (b), (c)】を満たすことである．
  (a) $\forall x \in \mathcal{C}_0$, $F^{-1}(Fx) = Gx$，すなわち，写像 $G \to F^{-1}(Fx)$ $(a \mapsto X(a)x)$ が全単射である（X が自由なので）．
  (b) $\forall x, y \in \mathcal{C}_0$ に対して，F は次の 2 つの $\Bbbk$-加群の同型を導く．
$$\bigoplus_{a \in G} \mathcal{C}(X(a)x, y) \to \mathcal{B}(Fx, Fy),\ (f_a)_{a \in G} \mapsto \sum_{a \in G} F(f_a)$$
$$\bigoplus_{b \in G} \mathcal{C}(x, X(b)y) \to \mathcal{B}(Fx, Fy),\ (f_b)_{b \in G} \mapsto \sum_{b \in G} F(f_b)$$
  (c) $F\colon \mathcal{C}_0 \to \mathcal{B}_0$ は全射である．

次に，自由で局所有界な G-作用をもつ，局所有限次元 $\Bbbk$-圏 $\mathcal{C}$ が与えられたとき，$\mathcal{C}$ からのガロア被覆を構成する．

定義 2.7. $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, X)$ を，自由で局所有界な G-作用をもつ，局所有限次元 $\Bbbk$-圏とする．このとき，$\Bbbk$-圏 $\mathcal{C}/G$ を次のように定義する．$\mathcal{C}/G$ を $\mathcal{C}$ の G による**軌道圏**とよぶ．

- $(\mathcal{C}/G)_0 := \{Gx \mid x \in \mathcal{C}_0\}$.
- $\forall u, v \in (\mathcal{C}/G)_0$ に対して，

$$(\mathcal{C}/G)(u,v) := \left\{ (f_{yx})_{\substack{x\in u\\ y\in v}} \in \prod_{\substack{x\in u\\ y\in v}} \mathcal{C}(x,y) \;\middle|\; X(a)(f_{yx}) = f_{X(a)y, X(a)x}, \forall a \in G, \forall x, y \in \mathcal{C}_0 \right\}$$

  $(\mathcal{C}/G)(u,v)$ の各元の表示 $(f_{yx})_{\substack{x\in u\\ y\in v}}$ は，u, v の代表元に依存していないことに注意．
- $\forall u \xrightarrow{f} v \xrightarrow{g} w$, $f = (f_{yx})_{\substack{x\in u\\ y\in v}}$, $g = (g_{zy})_{\substack{y\in v\\ z\in w}}$ に対して，$gf := \left(\sum_{y\in v} g_{zy}\cdot f_{yx}\right)_{\substack{x\in u\\ z\in w}}$.

  gf の各成分は，作用 X が局所有界であることから有限和であることに注意．

定義 2.8. 上と同じ設定のもとで，標準関手 $P\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ を次のように定義する．

$$\forall x \in \mathcal{C}_0, Px := Gx; \quad \forall h\colon x \to y, Ph := (\delta_{a,b}X(a)h)_{\substack{X(a)x\in Gx\\ X(b)y\in Gy}} : Px \to Py.$$

ここで，δ はクロネッカーのデルタ記号である．Ph は，X が自由作用であることから well-defined であることに注意．

命題 2.9. $P\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ は群 G をもつガロア被覆である．

次の命題より，自由で局所有界な G-作用をもつ，局所有限次元 $\Bbbk$-圏 $\mathcal{C}$ からの任意のガロア被覆 $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ は，上の標準関手と同型 $\mathcal{C}/G \to \mathcal{B}$ との合成の形に一意的に書ける．

命題 2.10. 上と同じ設定のもとで，$P\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ は普遍的な強い意味の G-不変関手である．すなわち，それは強い意味の G-不変関手であり，任意の強い意味の G-不変関手 $E\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ に対して，$E = HP$ となる関手 $H\colon \mathcal{C}/G \to \mathcal{C}'$ がただ 1 つ存在する．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "E"] \arrow[dr, "P"'] & & \mathcal{C}' \\ & \mathcal{C}/G \arrow[ur, dashed, "H"'] & \end{tikzcd}$$

このとき，E が群 G をもつガロア被覆であることと，H が同型関手であることとは同値である．

次に，$\mathcal{C}$ 上の加群圏と $\mathcal{C}/G$ 上の加群圏との関係を述べる．

定義 2.11. (1) $\Bbbk$-圏 $\mathcal{B}$ に対して，$\mathcal{B}$ から $\operatorname{Mod}\Bbbk$ への反変関手を **(右)$\mathcal{B}$-加群**とよぶ．それらの全体とそれらの間の自然変換全体のなす圏を $\operatorname{Mod}\mathcal{B}$ とおく．$\mathcal{B}$-加群 M は，表現関手 $\mathcal{B}(\text{-}, x)$ $(x \in \mathcal{B}_0)$ の有限直和 N からの全型射 $N \to M$ をもつとき，**有限生成**であるといい，それら全体のなす充満部分圏を $\operatorname{mod}\mathcal{B}$ で表す．また，有限生成射影 $\mathcal{B}$-加群全体のなす充満部分圏を $\operatorname{prj}\mathcal{B}$ で表す．

(2) $\Bbbk$-圏の間の $\Bbbk$-線型関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して，$F^{\cdot}\colon \operatorname{Mod}\mathcal{B} \to \operatorname{Mod}\mathcal{C}$ を $F^{\cdot}M := M \circ F^{\mathrm{op}}$ で定義する．これを F の**引き上げ**という．$F^{\cdot}$ は左随伴 $F_{\cdot}$ をもつが，これを F の**押し下げ**という．

(3) G-圏 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, X)$ に対して，$\operatorname{Mod}\mathcal{C}$ は，G-作用 $\operatorname{Mod} X \colon G \to \operatorname{Aut}(\operatorname{Mod}\mathcal{C})$ を

$$\forall a \in G, \forall M \in (\operatorname{Mod}\mathcal{C})_0, (\operatorname{Mod} X)(a)M := {}^{a}M := M \circ X(a^{-1}). \tag{2.1}$$

で定義することにより，また G-圏になる．

注意 2.12. (1) 上の (3) において，

$${}^{a}\mathcal{C}(\text{-}, x) = \mathcal{C}(X(a^{-1})(\text{-}), x) \cong \mathcal{C}(\text{-}, X(a)x) \quad (\forall a \in G, \forall x \in \mathcal{C}_0) \tag{2.2}$$

(cf. (4.2)).

(2) $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, X)$ を，自由で局所有界な G-作用をもつ，局所有限次元 $\Bbbk$-圏とし，$P \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ を標準関手とする．このとき，$P_{.}\,\mathcal{C}(\text{-}, x) \cong (\mathcal{C}/G)(\text{-}, Gx)$ であり，(3) において $P_{.}$ は右完全であるから，$P_{.}$ は関手 $\operatorname{mod}\mathcal{C} \to \operatorname{mod}\mathcal{C}/G$ を導く．

次に古典的被覆理論の基本定理 ([13]) を述べる．

定理 2.13. $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, X)$ を自由で局所有界な G-作用をもつ局所有界 $\Bbbk$-圏とし， $P \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ を標準関手とする．このとき，次が成り立つ．

(1) M が直既約 $\mathcal{C}$-加群ならば，$P_{.}\,M$ は直既約 $\mathcal{C}/G$-加群である．
(2) $P_{.} \colon \operatorname{ind}\mathcal{C} \to \operatorname{ind}(\mathcal{C}/G)$ は，群 G をもつガロア前被覆である．
(3) $\mathcal{C}$ が局所有限表現型ならば，上の $P_{.}$ は群 G をもつガロア被覆である．

ただし，(2) で $\operatorname{ind}\mathcal{C}$【$\operatorname{ind}(\mathcal{C}/G)$】は，直既約 $\mathcal{C}$-【$\mathcal{C}/G$-】加群の完全代表系からなる $\operatorname{mod}\mathcal{C}$【$\operatorname{mod}(\mathcal{C}/G)$】の充満部分圏で，$\forall a \in G, \forall M \in \operatorname{ind}\mathcal{C}, {}^{a}M = M$ を満たすものとする．また，$\mathcal{C}$ が**局所有限表現型**であるとは，$\forall x \in \mathcal{C}_0$ に対して，$M(x) \neq 0$ となる直既約 $\mathcal{C}$-加群 M が同型を除いて有限個しかないことである．

次にクイバーを用いて例を挙げる．関係付きクイバーとその Auslander-Reiten クイバーについては，例えば文献 [10] を参照されたい．

例 2.14. $\Bbbk$-圏 $\mathcal{C}$ を関係付きクイバー $(\cdots \to -1 \xrightarrow{\alpha_{-1}} 0 \xrightarrow{\alpha_0} 1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots, \alpha_{i+2}\alpha_{i+1}\alpha_i = 0)$ で与える．G を無限巡回群とし a をその生成元とする．$\mathcal{C}$ への G-作用 X を，$X(a)(i) := i + 2\ (i \in \mathbb{Z})$ で定義する．このとき，$\mathcal{C}/G$ は関係付きクイバー $(1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2, \alpha\beta\alpha = 0 = \beta\alpha\beta)$ で与えられる．標準関手で与えられるガロア被覆 $P \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ は，$P(i) = \begin{cases} 1 & i \in 2\mathbb{Z} + 1 \\ 2 & i \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$ で定義される．以上のことを 1 枚の図で表すと，

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\colon \arrow[d, "P"'] & \cdots \arrow[r] & -1 \arrow[r, "\alpha_{-1}"'] \arrow[rr, bend left] & 0 \arrow[r, "\alpha_0"'] \arrow[rr, bend left] \arrow[d] & 1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & \cdots \\
\mathcal{C}/G\colon & & & 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, bend left, "\beta"] &
\end{tikzcd}$$

このとき，$\mathcal{C}$ は局所有限表現型であり，$P_{\boldsymbol{\cdot}}\colon \operatorname{ind}\mathcal{C} \to \operatorname{ind}(\mathcal{C}/G)$ は次で与えられる．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \cdots \arrow[dr] & & M_3 \arrow[dr] & & M_6 \arrow[dr] & & M_3 & \cdots \\
\operatorname{ind}\mathcal{C}: & & M_2 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & M_5 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & M_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & M_1 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[d, "P_{\boldsymbol{\cdot}}"'] & & M_4 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & M_1 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] \arrow[d] & & \cdots & \\
 & {} & & & & {} & & & \\
 & & & N_3 \arrow[dr] & & N_6 \arrow[dr] & & N_3 & \\
\operatorname{ind}(\mathcal{C}/G): & & N_2 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & N_5 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & N_2 \arrow[ur] & & \\
 & N_1 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & N_4 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & N_1 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

ただし，$\operatorname{ind}\mathcal{C}$ の図は左右に無限に続き，G の生成元 a は頂点を右に 2 つ（同じ記号のところに）移動させるように作用し，$\operatorname{ind}(\mathcal{C}/G)$ の図では同じ記号の加群を同一視する．また，$P_{\boldsymbol{\cdot}}M_i = N_i$ $(i = 1, \ldots, 6)$ である．

3. G-被覆関手と導来同値

この節以降，特に断らなければ $\Bbbk$ は一般の可換環とする．以上のように，被覆理論の古典的な設定では，次の条件が要求されていた：

(1) $\mathcal{C}$ は **basic** である (すなわち，$x \neq y \Rightarrow x \ncong y$);
(2) $\mathcal{C}$ は **semiperfect** である (すなわち，$\mathcal{C}(x, x)$ は局所多元環である, $\forall x \in \mathcal{C}$);
(3) G-作用は**自由**である (すなわち，$1 \neq \forall\alpha \in G, \forall x \in \mathcal{C}, \alpha x \neq x$);
(4) G-作用は**局所有界**である (すなわち，$\forall x, y \in \mathcal{C}, \{\alpha \in G \mid \mathcal{C}(\alpha x, y) \neq 0\}$ は有限集合).

条件 (4) は，軌道圏における射の合成の定義で用いられているが，射の定義において，射を行列とみなして列有限かつ行有限という条件を課しても問題なく，そうしておけば，この条件は不要になる．また残り 3 つの仮定のために次の点で，環 R 上の加群圏 $\operatorname{Mod} R$ や有限生成射影 R 加群の有界ホモトピー圏 $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj} R)$ などの加法圏に対して被覆理論を適用することが困難になっている：

- $\operatorname{Mod} R$ や $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj} R)$ が，条件 (2) を満たさないために，直既約対象からなる充満部分圏を代わりに用いなければならないが，そのことにより三角圏の構造が壊される．
- 条件 (1) を満たすために対象の同型類からなる完全代表系で G 作用のもとで安定なものを選ばなければならないが，それは実際の計算上容易なことではない．
- R への G 作用が自由であっても，$\operatorname{Mod} R$ や $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj} R)$ に導かれる G 作用が自由でないことがあるため，条件 (3) を確かめることは，多くの場合困難である．例えば，G が有限群の場合，自由作用の保証がないため理論が適用できなかった．

これらの不自由な条件により，[1] における，導来同値のための被覆理論の主定理の証明が不必要に複雑になり，この定理が応用しにくくなっている．この節では，これらすべての仮定を取り除いて，被覆理論を一般化する．その際，自由作用の仮定を取り去ったため，定理 2.13(1) の一般化は望めないが，主張 (2) は一般化され，これが導来同値で重要な傾部分圏の構成に用いられる．

3a. G-**圏のなす 2-圏と** G-**不変関手．**

定義 3.1. G-圏 $(\mathcal{C}, X)$ から G-圏 $(\mathcal{C}', X')$ への G-**同変関手**とは，関手 $E\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ と自然同型 $\rho_a\colon X'(a)E \Rightarrow EX(a)$ の族 $\rho = (\rho_a)_{a\in G}$ の組 (E, ρ) で，各 $a, b \in G$ に対して次の図式を可換にするものである (cf. 図式 (4.1))：

$$\begin{tikzcd} X'(ba)E \arrow[r, equal] \arrow[d, Rightarrow, "\rho_{ba}"'] & X'(b)X'(a)E \arrow[r, Rightarrow, "X'(b)\rho_a"] & X'(b)EX(a) \arrow[d, Rightarrow, "\rho_b X(a)"] \\ EX(ba) \arrow[rr, equal] & & EX(b)X(a). \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

上の ρ_a がすべて恒等射にとれるとき，すなわち各 $a \in G$ に対して $X'(a)E = EX(a)$ となるとき，E は**強い意味の**G-**同変関手**であるという．

注意 3.2. $\Bbbk$-**Cat** におけるどの関手 $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ に対しても $\Delta F := (F, \mathbb{1})\colon \Delta\mathcal{B} \to \Delta\mathcal{B}'$ は強い意味の G-同変関手である．

定義 3.3. $(E, \rho), (E', \rho')\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を G-同変関手とする．(E, ρ) から (E', ρ') への**射**とは自然変換 $\eta\colon E \Rightarrow E'$ で，各 $a \in G$ に対して次の図式を可換にするものである．

$$\begin{tikzcd} X'(a)E \arrow[r, Rightarrow, "\rho_a"] \arrow[d, Rightarrow, "X'(a)\eta"'] & EX(a) \arrow[d, Rightarrow, "\eta X(a)"] \\ X'(a)E' \arrow[r, Rightarrow, "\rho'_a"'] & E'X(a) \end{tikzcd}$$

補題 3.4. $\mathcal{C} \xrightarrow{(E,\rho)} \mathcal{C}' \xrightarrow{(E',\rho')} \mathcal{C}''$ を G-圏の間の G-同変関手とすると，

$$(E', \rho')(E, \rho) := (E'E, ((E'\rho_a)(\rho'_a E))_{a\in G})\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}''$$

も G-同変関手となる．これを (E, ρ) と (E', ρ') の**合成**という．

命題 3.5. 次で 2-圏が定義される．

- 対象は小 G-圏の全体．
- 射はそれらの間の G-同変関手の全体．
- 2-射は G-同変関手の間の射の全体．
- 射の合成は上の補題で与えられたもの．
- 2-射の垂直合成，水平合成は自然変換に対して普通に定義されるもの．

この 2-圏を G-**Cat** で表す．

注意 3.6. Δ は 2-関手 $\Delta\colon \Bbbk$-**Cat** $\to G$-**Cat** を導く．

定義 3.7. $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, X)$ を G-圏，$\mathcal{B}$ を $\Bbbk$-圏とする．$\mathcal{C}$ から $\Delta(\mathcal{B})$ への G-同変関手 (F, ψ) を $\mathcal{C}$ から $\mathcal{B}$ への G-**不変関手**とよび $(F, \psi)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ と書く．したがって，特に ψ は自然同型 $\psi_a\colon F \Rightarrow FX(a)$ の族 $(\psi_a)_{a\in G}$ である．

注意 3.8. $\psi_1 = \mathbb{1}_F$ であり，各 $a \in G$ に対して，$\psi_a^{-1} = \psi_{a^{-1}} X(a)$ が成り立つ．

定義 3.9. $(F, \psi), (F', \psi')$ を G-不変関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ とする．このとき自然変換 $\eta \colon F \to F'$ は，G-同変関手 $(F, \psi), (F', \psi') \colon \mathcal{C} \to \Delta(\mathcal{B})$ の間の射であるとき，すなわち，各 $a \in G$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, Rightarrow, "\phi_a"] \arrow[d, Rightarrow, "\eta"'] & FX(a) \arrow[d, Rightarrow, "\eta X(a)"] \\ F' \arrow[r, Rightarrow, "\phi'_a"'] & F'X(a) \end{tikzcd}$$

が可換となるとき，(F, ψ) から (F', ψ') への**射**であるという．

記号 3.10. G-圏 $\mathcal{C}$ と $\Bbbk$-圏 $\mathcal{B}$ に対して，G-不変関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ 全体とそれらの間の射全体は圏をなす．この圏を $\mathrm{Inv}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ で表す．

補題 3.4の特別の場合として次が得られる．

補題 3.11. $(F, \psi) \colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ が G-不変関手で $H \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ が関手ならば，$H(F, \psi) := (HF, (H\psi_a)_{a \in G}) \colon \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ も G-不変関手になる．

次に G-被覆関手の定義を与える．そのために，記号と命題を準備する．

記号 3.12. $(F, \psi) \colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ を G-不変関手とし，$x, y \in \mathcal{C}$ とする．$\Bbbk$-加群の準同型 $F^{(1)}_{x,y}, F^{(2)}_{x,y}$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} F^{(1)}_{x,y} \colon \bigoplus_{a \in G} \mathcal{C}(X(a)x, y) \to \mathcal{B}(Fx, Fy), \quad (f_a)_{a \in G} &\mapsto \sum_{a \in G} F(f_a) \cdot \psi_a x \\ F^{(2)}_{x,y} \colon \bigoplus_{b \in G} \mathcal{C}(x, X(b)y) \to \mathcal{B}(Fx, Fy), \quad (f_b)_{b \in G} &\mapsto \sum_{b \in G} \psi_b^{-1} y \cdot F(f_b) \\ &= \sum_{b \in G} \psi_{b^{-1}}(X(b)y) \cdot F(f_b) \end{aligned}$$

命題 3.13. 上において $F^{(1)}_{x,y}$ が同型であることと $F^{(2)}_{x,y}$ が同型であることとは同値である．

定義 3.14. $(F, \psi) \colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ を G-不変関手とする．

(1) (F, ψ) は，各 $x, y \in \mathcal{C}$ に対して $F^{(1)}_{x,y}$ が同型であるとき，G-**前被覆**であるという．（命題 3.13より，この条件は $F^{(2)}_{x,y}$ が同型であることと同値である．）

(2) (F, ψ) が G-前被覆で，関手 F が**稠密**である（すなわち各 $y \in \mathcal{B}$ はある $x \in \mathcal{C}$ によって $Fx \cong y$ とかける）とき，(F, ψ) は G-**被覆**であるという．

3b. **軌道圏.**

定義 3.15. (1) G-圏 $\mathcal{C}$ に対して $\Bbbk$-圏 $\mathcal{C}/G$ を次で定義し，これを $\mathcal{C}$ の G による**軌道圏**とよぶ (cf. [12, 19])．

- $(\mathcal{C}/G)_0 := \mathcal{C}_0$.
- 各 $x, y \in (\mathcal{C}/G)_0$ に対して，

$$(\mathcal{C}/G)(x, y) := \bigoplus_{a \in G} \mathcal{C}(X(a)x, y).$$

- 各 $f\colon x \to y$, $g\colon y \to z$ in $\mathcal{C}/G$ に対して，

$$gf := \left(\sum_{\substack{a,b\in G\\ ba=c}} g_b \cdot X(b) f_a\right)_{c\in G}.$$

(2) **標準関手** $P\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ を次で定義する．
- $\mathcal{C}$ の各対象 x に対して，$Px := x$,
- $\mathcal{C}$ の各射 f に対して，$Pf := (\delta_{a,1}f)_{a\in G}$.

(3) 各 $c \in G, x \in \mathcal{C}$ に対して，$\phi_c x := (\delta_{a,c}\mathbb{1}_{X(c)x})_{a\in G} \in (\mathcal{C}/G)(Px, PX(c)x)$.

補題 3.16. 上において各 $c \in G$ に対して，$\phi_c : (\phi_c x)_{x\in\mathcal{C}}\colon P \Rightarrow PX(c)$ は自然同型であり，$\phi := (\phi_c)_{c\in G}$ とおくと，$(P,\phi)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ は G-不変関手になる．

注意 3.17. (1) 軌道圏の定義において，これまで $\mathcal{C}$ の対象 x の G-軌道 Gx を対象としてきたが，自由作用の仮定を取り去ったため，これではうまく行かなくなる．そのため対象はそのままにしてあるが，G-軌道内の 2 つの対象は互いに軌道圏のなかでは同型になる ($x, y \in \mathcal{C}_0, a \in G, X(a)x = y$ とすると $(\delta_{a,b}\mathbb{1}_y)_{b\in G}\colon x \xrightarrow{\cong} y$ in $\mathcal{C}/G$)．したがって，同型を無視すれば，$\mathcal{C}$ の対象の軌道を対象としたものになっている．

(2) 上では，左右非対称な “第 1 変数に偏った” 軌道圏の定義を述べたが，これは次の節におけるグロタンディーク構成の形に合わせたものである．他にも “第 2 変数に偏った” ものも，もとの Gabriel 式により近い “左右対称” な軌道圏の定義もある．[4] では，左右対称な定義を採用し，それら 3 つの間の同型も具体的に与えた．

例 3.18. $\mathcal{C} = R$ が $\mathbb{k}$-多元環（= ただ 1 つの対象を持つ $\mathbb{k}$-圏）のとき，軌道圏 R/G は歪群環 $R * G$（を圏と見なしたもの）と同型になる．

命題 3.19. 次が成り立つ．
1. (P,ϕ) は G-被覆関手である．
2. (P,ϕ) は，$\mathcal{C}$ からの G-不変関手のなかで**普遍的**である．すなわち，各 G-不変関手 $(F,\psi)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ に対して，$(F,\psi) = H(P,\phi)$ をみたす関手 $H\colon \mathcal{C}/G \to \mathcal{B}$ がただ一つ存在する．

実は，この最後の主張は次のようにもっと精密化される．

系 3.20. 上において (P,ϕ) は **2-普遍的**である．すなわち，誘導される関手

$$(P,\phi)^*\colon\ \mathrm{Fun}(\mathcal{C}/G,\mathcal{B}) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{C},\mathcal{B})$$

は，圏の同型になる（単なる同値ではなく）．ただし，$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}/G,\mathcal{B})$ は，$\mathcal{C}/G$ から $\mathcal{B}$ への関手全体とその間の自然変換全体のなす圏を表す．

例 3.21. $\mathcal{C} = \mathbb{k}$ が体で，G の作用が自明な場合 $\mathcal{C}/G = \mathbb{k}G$ は普通の群環になる．$\mathcal{B} = \mathrm{Mod}\,\mathbb{k}$ を $\mathbb{k}$-ベクトル空間の圏とすると，$\mathrm{Fun}(\mathbb{k}G, \mathrm{Mod}\,\mathbb{k}) = \mathbb{k}G\text{-}\mathrm{Mod}$ は左 $\mathbb{k}G$-加群の圏，$\mathrm{Inv}(\mathbb{k}, \mathrm{Mod}\,\mathbb{k}) = \mathrm{Rep}_{\mathbb{k}} G$ は G の $\mathbb{k}$-表現の圏になる．この場合，上の圏の同型は，よく知られた同型 $\mathbb{k}G\text{-}\mathrm{Mod} \cong \mathrm{Rep}_k G$ を与えている．

注意 3.22. 小圏の範囲内で考えると，上の系 3.20は自然な同型,

$$\mathbb{k}\text{-}\mathbf{Cat}(\mathcal{C}/G,\mathcal{B}) \cong G\text{-}\mathbf{Cat}(\mathcal{C},\Delta\mathcal{B})$$

を与える．このことから，2-関手 $(\text{-}/G)\colon G\text{-}\mathbf{Cat} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ と 2-関手 $\Delta\colon \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat} \to G\text{-}\mathbf{Cat}$ が定義され前者が後者の左随伴になっていることが導かれる．また，G-被覆関手

$$(P,\phi)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/G (= \Delta(\mathcal{C}/G))$$

はこの随伴の unit(の $\mathcal{C}$ 成分) に他ならない．

次の定理は，G-被覆関手の特徴付けを与える．

定理 3.23. G-不変関手 $(F,\psi)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ に対して次は同値である．

(1) (F,ψ) は G-被覆関手である．
(2) (F,ψ) は G-前被覆関手であり，$\mathcal{C}$ からの G-前被覆関手のなかで普遍的である．
(3) (F,ψ) は G-不変関手であり，$\mathcal{C}$ からの G-不変関手のなかで普遍的である．
(3′) (F,ψ) は G-不変関手であり，$\mathcal{C}$ からの G-不変関手のなかで 2-普遍的である．すなわち，(F,ψ) は圏の同型 $(F,\psi)^*\colon \operatorname{Fun}(\mathcal{C}/G,\mathcal{B}) \to \operatorname{Inv}(\mathcal{C},\mathcal{B})$ $(\forall\mathcal{B} : \Bbbk\text{-圏})$ を導く．
(4) G-不変関手として $(F,\psi) \cong H(P,\phi)$ となる圏同値 $H\colon \mathcal{C}/G \to \mathcal{B}$ が存在する．
(5) $(F,\psi) = H(P,\phi)$ となる圏同値 $H\colon \mathcal{C}/G \to \mathcal{B}$ が存在する．

補題 3.4の特別の場合として次の (1) が得られる．

補題 3.24. (1) $\mathcal{C},\mathcal{C}'$ を G-圏，$\mathcal{B}$ を $\Bbbk$-圏とし， $\mathcal{C}' \xrightarrow{(E,\rho)} \mathcal{C} \xrightarrow{(F,\psi)} \mathcal{B}$ において (E,ρ) を G-同変関手，(F,ψ) を G-不変関手とする．このとき，

$$(F,\psi)(E,\rho) := (FE, ((F\rho_a)(\psi_a E))_{a\in G})\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{B}$$

は，G-不変関手になる．

(2) 上において (E,ρ) が G-同変な圏同値で (F,ψ) が G-被覆関手であれば，合成 $(F,\psi)(E,\rho)$ は，G-被覆関手となる．したがって，$\mathcal{C}'/G$ と $\mathcal{B}$ は圏同値になる．

3c. **導来同値．** この節では $\mathcal{C}$ を G-圏とする．

定義 3.25. G-圏 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, X)$ に対して，$\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C})$ で $\operatorname{prj}\mathcal{C}$ における有界復体のなすホモトピー圏を表す．$\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C})$ にも自然に成分ごとに G-作用が定義される．

定義 3.26. (1) $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C})$ の充満部分圏 E は次の性質を持つとき，$\mathcal{C}$ に対する**傾部分圏**であるという：

(a) $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C})(U, V[i]) = 0$ がすべての $U,V \in E$ とすべての $i \neq 0$ に対して成り立つ;
(b) $\mathcal{C}(\text{-},x) \in \operatorname{thick} E$ がすべての $x \in \mathcal{C}$ について成り立つ．ただし，$\operatorname{thick} E$ は E で生成される **thick 部分圏**，すなわち，E を含み，同型と直和因子をとる操作について閉じている，$\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C})$ の最小の充満部分圏である．

(2) $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C})$ の傾部分圏 E は，${}^{\alpha}U \in E$ がすべての $U \in E$ と $\alpha \in G$ に対して成り立つとき，G-**安定**であるという．

(3) 2 つの圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ は，それらの導来圏 $\mathcal{D}(\operatorname{Mod}\mathcal{C})$ と $\mathcal{D}(\operatorname{Mod}\mathcal{C}')$ が三角圏として同値であるとき，**導来同値**であるという．

導来同値に関して，Rickard [21], Keller [18] による次の定理は基本的である．

定理 3.27. $\Bbbk$ が体のとき，$\Bbbk$-圏 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ が導来同値であるためには，$\mathcal{A}$ に対する傾部分圏 E で，E と $\mathcal{B}$ が圏同値であるものが存在することが必要十分である．

古典的被覆理論の基本定理 2.13(2) は次のように一般化される．前者は森田同値に，後者は導来同値に用いることができる．

定理 3.28. $(P,\phi)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ を標準被覆関手とすると，$(P,\phi)_{\bullet}$ は G-前被覆関手

$$(P,\phi)_{\bullet}\colon \operatorname{mod}\mathcal{C} \to \operatorname{mod}(\mathcal{C}/G) \quad \text{および} \quad (P,\phi)_{\bullet}\colon \mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C}) \to \mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C}/G)$$

を導く．

定理 3.23と 3.28 を用いて証明される次の定理は，導来同値のための被覆理論における基本定理である．

定理 3.29. $\Bbbk$ は体とする．$\mathcal{C}$ に対する，G-安定な傾部分圏 E が存在すれば，$\mathcal{C}/G$ と E/G は導来同値である．

証明の概略. E_0 の $(P,\phi)_{\bullet}$ による像で定義される $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{prj}\mathcal{C}/G)$ の充満部分圏 E' はまた傾部分圏であることが示される．したがって，定理 3.27より $\mathcal{C}/G$ と E' は導来同値となる．また，定理 3.28より $(P,\phi)_{\bullet}$ は G-被覆関手 $E \to E'$ を導く．よって定理 3.23より E/G と E' は圏同値となる．したがって，$\mathcal{C}/G$ と E/G は導来同値になる． □

上の定理と補題 3.24(2) から次が得られる．

定理 3.30. $\Bbbk$ は体とし，$\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ を G-圏とする．$\mathcal{C}$ に対する G-安定な傾部分圏 E と，G-同変な圏同値 $E \to \mathcal{C}'$ が存在すれば，$\mathcal{C}/G$ と $\mathcal{C}'/G$ は導来同値である．

注意 3.31. (1) 上の定式化では，まだ E が “強い意味で”G-安定であることが仮定されていることに注意．以下の一般化では，これも “弱い意味” に緩められる．

(2) 論文 [9] では定理 3.30を用いて，有向樹木多元環に導来同値な多元環の一般多重拡大全体の導来同値分類を行った．

4. 2-圏論的被覆理論

4a. **群作用から colax 関手へ.** 群 G を次のような圏 I とみなすことができる：$I_0 := \{*\}$, $I_1 := G$, I の合成は G の乗法．このように見るとき，$\Bbbk$-圏 $\mathcal{C}$ への G-作用とは，関手 $X\colon G \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ で，$X(*) = \mathcal{C}$ となるものに他ならない．以下で，G を一般の圏 I に拡張して，圏の作用を考える．あとで関手 $X\colon I \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ に対してグロタンディーク構成 $\mathrm{Gr}(X)$ という $\Bbbk$-圏が定義されるが，この場合，$\mathrm{Gr}(X) = \mathcal{C}/G$ となる．すなわち，グロタンディーク構成は軌道圏の一般化であると見ることができる．グロタンディーク構成は，関手よりも広い colax 関手に対してまで定義される．また，群の作用を関手だけに限定せず colax 関手にまで広げておくと，圏 $\mathcal{C}$ の自己同型だけでなく，自己同値まで取り扱えるようになって便利である．そこでこの節では，群の作用を圏からの colax 関手に一般化した被覆理論について解説する．まず，colax 関手の定義から始める．これは関手の条件のなかにある等号を，2-射に取り替えて得られる．

定義 4.1. 圏 I から 2-圏 $\mathbf{C}$（例えば $\Bbbk$-$\mathbf{Cat}$）への colax 関手 $X\colon I \to \mathbf{C}$ とは，次のデーターからなり以下の公理を満たすものである．
データー：

- 写像 $X\colon I_0 \to \mathbf{C}_0$,
- 写像 $X\colon I(i,j) \to \mathbf{C}(X(i),X(j))$ $(\forall i,j \in I_0)$,
- $\mathbf{C}$ の 2-射 $X_i\colon X(\mathbb{1}_i) \Rightarrow \mathbb{1}_{X(i)}$ $(\forall i \in I_0)$,

- $\mathbf{C}$ の 2-射 $X_{b,a}\colon X(ba) \Rightarrow X(b)X(a)$ $(\forall i \xrightarrow{a} j \xrightarrow{b} k \text{ in } I_1)$.

公理：

(a) 各 $a\colon i \to j$ in I_1 に対して次はどちらも可換である：

$$\begin{tikzcd} X(a\mathbb{1}_i) \arrow[r, Rightarrow, "X_{a,\mathbb{1}_i}"] \arrow[dr, equal] & X(a)X(\mathbb{1}_i) \arrow[d, Rightarrow, "X(a)X_i"] \\ & X(a)\mathbb{1}_{X(i)} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X(\mathbb{1}_j a) \arrow[r, Rightarrow, "X_{\mathbb{1}_j,a}"] \arrow[dr, equal] & X(\mathbb{1}_j)X(a) \arrow[d, Rightarrow, "X_j X(a)"] \\ & \mathbb{1}_{X(j)}X(a) \end{tikzcd} .$$

(b) 各 $i \xrightarrow{a} j \xrightarrow{b} k \xrightarrow{c} l$ in I_1 に対して次は可換である：

$$\begin{tikzcd} X(cba) \arrow[r, Rightarrow, "X_{c,ba}"] \arrow[d, Rightarrow, "X_{cb,a}"'] & X(c)X(ba) \arrow[d, Rightarrow, "X(c)X_{b,a}"] \\ X(cb)X(a) \arrow[r, Rightarrow, "X_{c,b}X(a)"'] & X(c)X(b)X(a). \end{tikzcd}$$

例 4.2. ただ 1 つの対象 $*$ とただ 1 つの射 $\mathbb{1}_*$ からなる圏 1 から小圏全体のなす 2-圏 $\mathbf{Cat}$ への colax 関手 $X\colon 1 \to \mathbf{Cat}$ は，小圏 $\mathcal{C} := X(*)$ 上の comonad $T := X(\mathbb{1}_*)$ に他ならない．

定義 4.3. 2-圏 $\mathbf{C}$ に対して，

- $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$:=($\mathbf{C}$ から射を逆向きにして得られる 2-圏)
- $\mathbf{C}^{\mathrm{co}}$:=($\mathbf{C}$ から 2-射を逆向きにして得られる 2-圏)
- $\mathbf{C}^{\mathrm{coop}} := (\mathbf{C}^{\mathrm{co}})^{\mathrm{op}} = (\mathbf{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{co}}$.
- **Lax 関手** $I \to \mathbf{C}$ とは，colax 関手 $I \to \mathbf{C}^{\mathrm{co}}$ のことである．
- **擬関手** $I \to \mathbf{C}$ とは，colax 関手 $X\colon I \to \mathbf{C}$ で，すべての $X_i, X_{b,a}$ が 2-同型となっているものである．
- **関手** $I \to \mathbf{C}$ とは，colax 関手 $X\colon I \to \mathbf{C}$ で，すべての $X_i, X_{b,a}$ が恒等 2-射となっているものである．

4b. **グロタンディーク構成.** この節では，軌道圏の一般化であるグロタンディーク構成の定義 (cf. [16]) を与える．

定義 4.4. $X\colon I \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ を colax 関手とする．このとき，$\Bbbk$-圏 $\mathrm{Gr}(X)$ を次で定義する．

- $\mathrm{Gr}(X)_0 := \bigcup_{i\in I_0}\{i\} \times X(i)_0 = \{{}_ix := (i,x) \mid i \in I_0, x \in X(i)_0\}$.
- 各 ${}_ix, {}_jy \in \mathrm{Gr}(X)_0$ に対して，

$$\mathrm{Gr}(X)({}_ix, {}_jy) := \bigoplus_{a\in I(i,j)} X(j)(X(a)x, y).$$

- 各 ${}_ix, {}_jy, {}_kz \in \mathrm{Gr}(X)_0$ と各 $f = (f_a)_{a\in I(i,j)} \in \mathrm{Gr}(X)({}_ix, {}_jy)$, $g = (g_b)_{b\in I(j,k)} \in \mathrm{Gr}(X)({}_jy, {}_kz)$ に対して,

$$g \circ f := \left(\sum_{\substack{a\in I(i,j)\\ b\in I(j,k)\\ c=ba}} g_b \circ X(b)f_a \circ X_{b,a}x \right)_{c\in I(i,k)}$$

とおく．すなわち，総和の各項は次の合成である：

$$X(ba)x \xrightarrow{X_{b,a}x} X(b)X(a)x \xrightarrow{X(b)f_a} X(b)y \xrightarrow{g_b} z.$$

- 各 ${}_ix \in \mathrm{Gr}(X)_0$ に対して，恒等射 $\mathbb{1}_{{}_ix}$ は次で与えられる：

$$\mathbb{1}_{{}_ix} = (\delta_{a,\mathbf{1}_i} X_i\, x)_{a\in I(i,i)} \in \bigoplus_{a\in I(i,i)} X(i)(X(a)x, x).$$

例 4.5. A を $\Bbbk$-多元環とする（対象がただ 1 つの $\Bbbk$-圏とみる）．$X := \Delta(A)\colon I \to \Bbbk$-**Cat** を次で定義する．$\forall i \in I_0, X(i) := A, \forall a \in I_1, X(a) := \mathbb{1}_A$．このとき，次が成り立つ．

(1) I がクイバー $(1 \to 2)$ の自由圏 (free category) であれば，$\mathrm{Gr}(X)$ は A 上の三角行列多元環になる：$\mathrm{Gr}(X) \cong \begin{bmatrix} A & 0 \\ A & A \end{bmatrix}$. より一般に次の (2), (3) が成り立つ．

(2) I がクイバー Q の自由圏であれば，$\mathrm{Gr}(X) \cong AQ$ (A 上の Q の道圏).

(3) $I = S$ が半順序集合のとき，$\mathrm{Gr}(X) \cong AS$ (A 上の S の隣接圏).

(4) $I = G$ がモノイドのとき，$\mathrm{Gr}(X) \cong AG$ (A 上の G のモノイド多元環).

4c. **誘導擬関手**. ここでは，2-圏から 2-圏への colax 関手，およびそれら colax 関手全体のなす 2-圏が必要になる．

定義 4.6. (1) 2-圏 $\mathbf{B}$ から 2-圏 $\mathbf{C}$ への colax 関手 $X\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ とは，次のデーター（定義 4.1と異なる部分に下線を引いた）からなり以下の公理を満たすものである．
データー：

- 写像 $X\colon \mathbf{B}_0 \to \mathbf{C}_0$,
- <u>関手</u> $X\colon \mathbf{B}(i,j) \to \mathbf{C}(X(i), X(j))$ $(\forall i, j \in \mathbf{B}_0)$,
- $\mathbf{C}$ の 2-射 $X_i\colon X(\mathbb{1}_i) \Rightarrow \mathbb{1}_{X(i)}$ $(\forall i \in \mathbf{B}_0)$
- $\mathbf{C}$ の 2-射 $X_{b,a}\colon X(ba) \Rightarrow X(b)X(a)$ ($\forall i \xrightarrow{a} j \xrightarrow{b} k$ in $\mathbf{B}_1$, <u>natural in a, b</u>)

公理：定義 4.1の I_1 を $\mathbf{B}_1$ に取り替えたもの．

ただし，natural in a, b とは，$\forall a, a'\colon i \to j, \forall b, b'\colon j \to k$ in $\mathbf{B}_1$, $\forall \alpha\colon a \Rightarrow a', \beta\colon b \Rightarrow b'$ in $\mathbf{B}_2$ に対して次の図式が可換であることを意味する：

$$\begin{tikzcd} X(ba) \arrow[r, Rightarrow, "X_{b,a}"] \arrow[d, Rightarrow, "X(\beta*\alpha)"'] & X(b)X(a) \arrow[d, Rightarrow, "X(\beta)*X(\alpha)"] \\ X(b'a') \arrow[r, Rightarrow, "X_{b',a'}"] & X(b')X(a'). \end{tikzcd}$$

(2) **Lax 関手** $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ とは，colax 関手 $\mathbf{B} \to \mathbf{C}^{\mathrm{co}}$ のことである．

(3) **擬関手** $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ とは，colax 関手 $X\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ で，すべての $X_i, X_{b,a}$ が 2-同型となっているものである．

(4) **2-関手** $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ とは，colax 関手 $X\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ で，すべての $X_i, X_{b,a}$ が恒等 2-射となっているものである．

注意 4.7. 圏 I を，2-射が恒等 2-射のみからなる 2-圏と見れば，上の定義を I に適用したものは定義 4.1 と一致する．

定義 4.8. 2 つの 2-圏 $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ に対して，colax 関手 $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ の全体を対象とする 2-圏 $\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(\mathbf{B}, \mathbf{C})$ を次のように定義する．

1-射．X, X' を colax 関手 $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ とする．X から X' への **1-射** (lax 変換) とは，次のデーターの組 (F, ψ) で以下の公理を満たすものである：
データー：

- $\mathbf{C}$ の 1-射 $F(i)\colon X(i) \to X'(i)$ の族 $F := (F(i))_{i \in \mathbf{B}_0}$
- $\mathbf{C}$ の 2-射 $\psi(a)\colon X'(a)F(i) \Rightarrow F(j)X(a)$

$$\begin{tikzcd} X(i) \arrow[r, "F(i)"] \arrow[d, "X(a)"'] & X'(i) \arrow[d, "X'(a)"] \arrow[dl, Rightarrow, "\psi(a)"'] \\ X(j) \arrow[r, "F(j)"'] & X'(j) \end{tikzcd}$$

の族 $\psi := (\psi(a))_{a \in \mathbf{B}_1}$ で，各 $\alpha\colon a \Rightarrow b$ in $\mathbf{B}(i, j)$ に対して次の図式が可換であるもの ($\mathbf{B} = I$ のときは無条件)

$$\begin{tikzcd} X'(a)F(i) \arrow[r, Rightarrow, "X'(\alpha)F(i)"] \arrow[d, Rightarrow, "\psi(a)"'] & X'(b)F(i) \arrow[d, Rightarrow, "\psi(b)"] \\ F(j)X(a) \arrow[r, Rightarrow, "F(j)X(\alpha)"'] & F(j)X(b), \end{tikzcd}$$

すなわち，関手の自然変換

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B}(i,j) \arrow[r, "X'"] \arrow[d, "X"'] & \mathbf{C}(X'(i), X'(j)) \arrow[d, "\mathbf{C}(F(i),X'(j))"] \arrow[dl, Rightarrow, "\psi_{ij}"'] \\ \mathbf{C}(X(i), X(j)) \arrow[r, "\mathbf{C}(X(i),F(j))"'] & \mathbf{C}(X(i), X'(j)) \end{tikzcd} \qquad (i, j \in \mathbf{B}_0)$$

の族．

公理：

(a) 各 $i \in \mathbf{B}_0$ に対して，次は可換である：

$$\begin{tikzcd} X'(\mathbb{1}_i)F(i) \arrow[r, Rightarrow, "\psi(\mathbf{1}_i)"] \arrow[d, Rightarrow, "X'_i F(i)"'] & F(i)X(\mathbb{1}_i) \arrow[d, Rightarrow, "F(i)X_i"] \\ \mathbb{1}_{X'(i)}F(i) \arrow[r, equal] & F(i)\mathbb{1}_{X(i)} \end{tikzcd} \quad ;$$

(b) 各 $i \xrightarrow{a} j \xrightarrow{b} k$ in $\mathbf{B}_1$ に対して，次は可換である (cf. 図式 (3.1))：

$$\begin{tikzcd} X'(ba)F(i) \arrow[r, Rightarrow, "X'_{b,a}F(i)"] \arrow[d, Rightarrow, "\psi(ba)"'] & X'(b)X'(a)F(i) \arrow[r, Rightarrow, "X'(b)\psi(a)"] & X'(b)F(j)X(a) \arrow[d, Rightarrow, "\psi(b)X(a)"] \\ F(k)X(ba) \arrow[rr, Rightarrow, "F(k)\,X_{b,a}"'] & & F(k)X(b)X(a). \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

1-射 (F, ψ) は，すべての $a \in \mathbf{B}_1$ に対して，$\psi(a)$ が $\mathbf{C}$ の 2-同型であるとき，I-**同変**であるという．

2-射. $X, X' \colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ を colax 関手とし，$(F, \psi), (F', \psi')$ を 1 射 $X \to X'$ とする．(F, ψ) から (F', ψ') への 2-**射** (modification) とは，$\mathbf{C}$ の 2-射 $\zeta(i) \colon F(i) \Rightarrow F'(i)$ の族 $\zeta = (\zeta(i))_{i \in \mathbf{B}_0}$ で，各 $a \colon i \to j$ in $\mathbf{B}_1$ に対して，次を可換にするものである：

$$\begin{tikzcd} X'(a)F(i) \arrow[r, Rightarrow, "X'(a)\zeta(i)"] \arrow[d, Rightarrow, "\psi(a)"'] & X'(a)F'(i) \arrow[d, Rightarrow, "\psi'(a)"] \\ F(j)X(a) \arrow[r, Rightarrow, "\zeta(j)X(a)"] & F'(j)X(a). \end{tikzcd}$$

注意 4.9. I を，2-射が恒等 2-射のみからなる 2-圏と見て $\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \mathbf{C})$ を考える．この 2-圏構造によって colax 関手 $X, X' \colon I \to \mathbf{C}$ の間の同値を，一般論に従って次のように定義することができる：X と X' が**同値**であるとは，射 $(F, \psi) \colon X \to X'$ と $(F', \psi') \colon X' \to X$，および 2-同型 $(F', \psi')(F, \psi) \cong \mathbb{1}_X$, $(F, \psi)(F', \psi') \cong \mathbb{1}_{X'}$ が存在することである．

定義 4.10. $\mathcal{C} \in \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}_0$ とし，$(F, \psi) \colon X \to \Delta(\mathcal{C})$ を $\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat})$ の 1-射とする．このとき，

(1) (F, ψ) が ($\mathcal{C}$ の) I-**前被覆**であるとは，$\Bbbk$-加群の準同型

$$(F, \psi)^{(1)}_{x,y} \colon \bigoplus_{a \in I(i,j)} X(j)(X(a)x, y) \to \mathcal{C}(F(i)x, F(j)y)$$
$$(f_a \colon X(a)x \to y)_{a \in I(i,j)} \mapsto \sum_{a \in I(i,j)} F(j)(f_a) \circ \psi(a)(x)$$

がすべての $i, j \in I_0$ と $x \in X(i)_0$, $y \in X(j)_0$ に対して同型となることである．

(2) I-前被覆 (F, ψ) は，**稠密**であるとき，すなわち，各 $c \in \mathcal{C}_0$ に対して，ある $i \in I_0$ とある $x \in X(i)_0$ によって $F(i)(x)$ が $\mathcal{C}$ において c と同型になるとき，I-**被覆**であるという．

注意 4.11. グロタンディーク構成は，2-関手 $\mathrm{Gr} \colon \overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}) \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ に拡張でき，これは $\Delta \colon \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat} \to \overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat})$ の左随伴になる．注意 3.22 と同様に，この随伴の unit $\mathbb{1}_{\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat})} \Rightarrow \Delta \cdot \mathrm{Gr}$ が I-被覆 $(P_X, \phi_X) \colon X \to \Delta(\mathrm{Gr}\, X)$ を与える．

次の擬関手を，colax 関手の "加群圏" と "導来圏" を定義するのに用いる．

例 4.12. 次の Mod' は 2-関手で，Mod と $\mathcal{D}$ は擬関手である．

- $\mathrm{Mod}' \colon \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Ab}^{\mathrm{coop}}$, $\mathrm{Mod}' := \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}((\text{-})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Mod}\, \Bbbk)$,
  $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}') \mapsto (\mathrm{Mod}\, \mathcal{C}' \xrightarrow{(\text{-}) \circ F^{\mathrm{op}}} \mathrm{Mod}\, \mathcal{C})$.

- $\mathrm{Mod}\colon \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Ab}$, $(\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}') \mapsto (\mathrm{Mod}\,\mathcal{C} \xrightarrow{\text{-}\otimes_{\mathcal{C}}\overline{F}} \mathrm{Mod}\,\mathcal{C}'), \overline{F} := \mathcal{C}'(\text{-}, F(?))$.
- $\mathcal{D}\colon \Bbbk\text{-}\mathbf{ModCat} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Tri}$, $(\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{A}') \mapsto (\mathcal{D}\mathcal{A} \xrightarrow{\mathbf{L}F} \mathcal{D}\mathcal{A}')$

ただし，$\Bbbk\text{-}\mathbf{ModCat}$ は，$\Bbbk\text{-}\mathbf{Ab}$ の 2-部分圏で次のものから構成されるものである：

- 対象： $\mathrm{Mod}\,\mathcal{C}$ $(\mathcal{C} \in \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}_0)$,
- 1-射：対象間の関手で完全右随伴をもつもの
- 2-射：1-射の間の自然変換の全体

このとき，上で定義された擬関手 $\mathrm{Mod}\colon \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Ab}$ は，擬関手 $\Bbbk\text{-}\mathbf{Cat} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{ModCat}$ と見られることに注意.

定理 4.13. $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ を 2-圏，$V\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ を擬関手とする．このとき，V との合成は擬関手

$$\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(\mathbf{B}, V)\colon \overleftarrow{\mathrm{Colax}}(\mathbf{B}, \mathbf{C}) \to \overleftarrow{\mathrm{Colax}}(\mathbf{B}, \mathbf{D})$$

を導く.

注意 4.14. (1) 上で，V が colax 関手のときは，$\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(\mathbf{B}, V)$ がうまく定義できない.

(2) 2-圏 $\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(\mathbf{B}, \mathbf{C})$ の代わりに擬関手と強変換 (lax 変換の 2-射が同型であるもの) と modifications からなる bicategories に設定を変えれば，Gordon–Power–Street [14] の結果から上の定理に対応する主張が従う.

上の定理を colax 関手と擬関手の列

$$I \xrightarrow{X} \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat} \xrightarrow{\mathrm{Mod}} \Bbbk\text{-}\mathbf{ModCat} \xrightarrow{\mathcal{D}} \Bbbk\text{-}\mathbf{Tri}$$

に適用して次が得られる.

系 4.15. 次の 2 つは擬関手である：

$$\begin{aligned}\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \mathrm{Mod})\colon \overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}) &\to \overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Ab}),\\ X &\mapsto \mathrm{Mod}\,X\\ \overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \mathcal{D}\circ\mathrm{Mod})\colon \overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}) &\to \overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Tri}).\\ X &\mapsto \mathcal{D}(\mathrm{Mod}\,X)\end{aligned}$$

注意 4.16. $X\colon I \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ を colax 関手とすると，colax 関手 $\mathrm{Mod}\,X, \mathcal{D}(\mathrm{Mod}\,X)$ は次の形になる：

- $\mathrm{Mod}\,X\colon I \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Ab}$, $(i \xrightarrow{a} j) \mapsto (\mathrm{Mod}\,X(i) \xrightarrow{\text{-}\otimes_{X(i)}\overline{X(a)}} \mathrm{Mod}\,X(j))$,
- $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}\,X)\colon I \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Tri}$, $(i \xrightarrow{a} j) \mapsto (\mathcal{D}(\mathrm{Mod}\,X(i)) \xrightarrow{\text{-}\overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{X(i)}\overline{X(a)}} \mathcal{D}(\mathrm{Mod}\,X(j)))$.

特に，$X(i)(\text{-}, x) \in \mathrm{Mod}\,X(i)$ $(i \in I_0, x \in X(i)_0)$ に対して，次が成り立つ (cf. (2.2))：

$$((\mathrm{Mod}\,X)(a))(X(i)(\text{-}, x)) = X(i)(\text{-}, x) \otimes_{X(i)} \overline{X(a)} \cong X(j)(\text{-}, X(a)x). \tag{4.2}$$

定義 4.17. $X, X' \in \overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat})_0$ とする．X と X' が**導来同値**であるとは，2-圏 $\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Tri})$ において，$\mathcal{D}(\mathrm{Mod}\,X)$ と $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}\,X')$ が同値であることである.

命題 4.18. $X, X' \in \overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat})_0$ とするとき，次は同値である.

(1) X と X' は導来同値である.

(2) 次を満たす 2-圏 $\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Tri})$ の 1-射 $(F, \psi)\colon \mathcal{D}(\mathrm{Mod}\, X) \to \mathcal{D}(\mathrm{Mod}\, X')$ が存在する．
- $F(i)\colon \mathcal{D}(\mathrm{Mod}\, X(i)) \to \mathcal{D}(\mathrm{Mod}\, X'(i)$ が三角同値 $(\forall i \in I_0)$ で，
- $\psi(a)\colon$ が自然同型 $(\forall a \in I_1)$（すなわち，(F, ψ) が I-同変．）

5. 導来同値の貼り合わせ

定義 5.1. (1) $\Bbbk\text{-}\mathbf{Add}$ を，加法的 $\Bbbk$-圏全体のなす $\Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ の充満 2-部分圏とする．擬関手 $\mathrm{prj}\colon \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Add}$ を $\mathrm{Mod}\colon \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Ab} \hookrightarrow \Bbbk\text{-}\mathbf{Add}$ の部分擬関手として定義する (各 $\mathcal{C} \in \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}_0$ に対して $\mathrm{prj}\, \mathcal{C}$ は有限生成射影的 $\mathcal{C}$-加群全体のなす $\mathrm{Mod}\, \mathcal{C}$ の充満部分圏)．

(2) 各 $\mathcal{C} \in \Bbbk\text{-}\mathbf{Add}$ に対して，$\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ のなかの有界複体全体のなすホモトピー圏とおくことにより，2-関手 $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}\colon \Bbbk\text{-}\mathbf{Add} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Tri}$ が自然に定義される．このとき，合成擬関手 $\mathcal{K}^{\mathrm{b}} \circ \mathrm{prj}\colon \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Tri}$ は，$\mathcal{D} \circ \mathrm{Mod}\colon \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat} \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Tri}$ の部分擬関手とみなせる．

注意 5.2. $\mathcal{C} \in \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}_0$ とすると，定義から明らかに

$$\Delta(\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}\, \mathcal{C})) = \mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}\, \Delta(\mathcal{C})).$$

が成り立つ．

定理 3.28は次のように一般化される．

定理 5.3. 擬関手 $\mathcal{K}^{\mathrm{b}} \circ \mathrm{prj}$ は，I-前被覆を保つ．すなわち，$(F, \psi)\colon X \to \Delta(\mathcal{C})$ $(\mathcal{C} \in \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}_0)$ が $\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat})$ における I-前被覆ならば，

$$\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}(F, \psi))\colon \mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}\, X) \to \Delta(\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}\, \mathcal{C}))$$

も $\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Tri})$ における I-前被覆である．

定義 5.4. $X\colon I \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ を colax 関手とする．

(1) $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}\, X)$ の colax 部分関手 $\mathcal{T}$ は，各 $i \in I_0$ に対して，$\mathcal{T}(i)$ が $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}\, X(i))$ の傾部分圏であるとき，**傾 colax 部分関手**であるという．

(2) $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}\, X)$ の傾 colax 部分関手 $\mathcal{T}$ は，I-同変な包含射 $(\sigma, \rho)\colon \mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}\, X)$ をもつとき，X に対する**傾 colax 関手**であるという．

注意 5.5. I-同変な包含射の存在が，定理 3.30での G-安定性の条件に対応する．

次の定理 ([6, Theorem 5.6]) は，Rickard [21], Keller [18] による導来同値に関する森田型定理 (定理 3.27) を，colax 関手に一般化するものである．

定理 5.6. $X, X' \in \overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat})_0$ とするとき，次の条件を考える．

(1) X と X' は導来同値である．
(2) $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}\, X)$ と $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}\, X')$ は，$\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Tri})$ において同値である．
(3) $\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat})$ において X' に同値であるような，X に対する傾 colax 関手 $\mathcal{T}$ が存在する．

このとき，

(a) (1) が成り立てば，(2) が成り立つ．
(b) (2) が成り立てば，(3) が成り立つ．

(c) $\Bbbk$ が体ならば，(3) から (1) が導かれる．

次の定理 ([7, Theorem 8.1]) は，2 つの colax 関手が導来同値であるとき，それらのグロタンディーク構成も導来同値になることを保証する．証明は，定理 3.29の証明の議論を定理 5.3を用いて一般化することによって得られる．

定理 5.7. $\Bbbk$ は体とし，$X, X' \in \overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat})$ とする．$\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat})$ において X' に同値であるような，X に対する傾 colax 関手 $\mathcal{T}$ が存在する (定理 5.6の条件 (3)) ならば，$\mathrm{Gr}(X)$ と $\mathrm{Gr}(X')$ は導来同値である．

$\Bbbk$-圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}'$ が導来同値ならば，colax 関手 $\Delta(\mathcal{C})$ と $\Delta(\mathcal{C}')$ は導来同値であることは直ちにわかるので，例 4.5から次が得られる．

系 5.8. $\Bbbk$ が体のとき，$\Bbbk$-多元環 A と A' が導来同値ならば，

(1) すべてのクイバー Q に対して，AQ と $A'Q$ は導来同値である．
(2) すべての半順序集合 S に対して，AS と $A'S$ は導来同値である．
(3) すべてのモノイド G に対して，AG と $A'G$ は導来同値である．

上の定理により，導来同値を "貼り合わせる" ことができる．このことを次の例で説明する．

例 5.9. $\Bbbk$ は体とする．$3 \le n \in \mathbb{Z}$ とし，I を次のクイバー Q で定義される自由圏とする：

$$2 \xrightarrow{a_2} 3 \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} n.$$

関手 $X, X' \colon I \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ を次で定義する．各 $i \in I_0 = \{2, \dots, n\}$ に対して，$X(i)$ を次の関係付きクイバーで定義される $\Bbbk$-圏とする：

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha_1"] & 2 \arrow[l, bend left, "\beta_1"] \arrow[r, bend left, "\alpha_2"] & 3 \arrow[l, bend left, "\beta_2"] \arrow[r, bend left, "\alpha_3"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\beta_3"] \arrow[r, bend left, "\alpha_{i-1}"] & i \arrow[l, bend left, "\beta_{i-1}"] \end{tikzcd}$$

関係：$\alpha_{j+1}\alpha_j = 0,\ \beta_j\beta_{j+1} = 0,\ \alpha_j\beta_j = \beta_{j+1}\alpha_{j+1}\ (\forall j = 1, \dots, i-1),\ \alpha_1\beta_1\alpha_1 = 0,\ \beta_{i-1}\alpha_{i-1}\beta_{i-1} = 0$. 各 $a_i \colon i \to i+1$ in I_1 に対して，$X(a_i) \colon X(i) \to X(i+1)$ を包含関手とする．これによって関手 $X \colon I \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ が定義される．

各 $i \in I_0 = \{2, \dots, n\}$ に対して，$X'(i)$ を次の関係付きクイバーで定義される $\Bbbk$-圏とする：

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\gamma_1"] & 2 \arrow[r, "\gamma_2"] & 3 \arrow[r, "\gamma_3"] & \cdots \arrow[r, "\gamma_{i-1}"] & i \arrow[llll, bend left, "\gamma_i"] \end{tikzcd}$$

関係：$\gamma_{j+i} \cdots \gamma_{j+1}\gamma_j = 0\ (\forall j \in \mathbb{Z}/i\mathbb{Z})$. 各 $a_i \colon i \to i+1$ in I_1 に対して，$X(a_i) \colon X(i) \to X(i+1)$ を次の対応で定義される関手とする：$1 \mapsto 1,\ j \mapsto j+1,\ \alpha_1 \mapsto \alpha_2\alpha_1,\ \alpha_j \mapsto \alpha_{j+1}$ $(\forall j = 2, \dots i)$. これによって関手 $X' \colon I \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ が定義される．

論文 [1] で解説されているように，$X(i)$ に対する傾部分圏 $\mathcal{T}(i)$ を，次の i 個の $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}\,X(i))$ の対象からなる充満部分圏として定義できる：

$$
\begin{aligned}
T(i)_1 &:= (\underline{P_1}),\\
T(i)_2 &:= (\underline{P_2} \xrightarrow{P(\alpha_2)} P_3 \xrightarrow{P(\alpha_3)} \cdots \xrightarrow{P(\alpha_{i-1})} P_i),\\
T(i)_3 &:= (\underline{P_2} \xrightarrow{P(\alpha_2)} P_3 \xrightarrow{P(\alpha_3)} \cdots \xrightarrow{P(\alpha_{i-2})} P_{i-1}),\\
&\ \ \vdots\\
T(i)_i &:= (\underline{P_2}),
\end{aligned}
$$

ただし，$P_j := X(i)(\text{-}, j) \in \mathrm{prj}\,X(i)$ $(\forall j \in X(i)_0)$, $P(\alpha) := X(i)(\text{-}, \alpha)$ $(\forall \alpha \in X(i)_1)$ であり，下線は次数 0 の位置を表す．再び [1] により，$\mathcal{T}(i)$ は $X'(i)$ と同じ関係付きクイバーで表示され，同型 $F(i)\colon X'(i) \to \mathcal{T}(i)$ が，j を $T(i)_j$ に移し $(\forall j = 1, \dots, i)$，$\gamma_j$ を射 $\delta(i)_j\colon T(i)_j \to T(i)_{j+1}$ に移す $(\forall j \in \mathbb{Z}/i\mathbb{Z})$ ことによって定義される．ただし，$\delta(i)_1 := (\underline{P(\alpha_1)})$, $\delta(i)_j := (\underline{\mathbb{1}_{P_2}}, \dots, \mathbb{1}_{P_{i-j+1}}, 0)$ $(\forall j = 2, \dots, i-1)$, $\delta(i)_i := (\underline{P(\beta_1)})$. よって，$\mathcal{T}(i)$ は $X(i)$ と $X'(i)$ の間の導来同値を与える．

各 $a_i\colon i \to i{+}1$ in I_1 に対して，関手 $\mathcal{T}(a_i)\colon \mathcal{T}(i) \to \mathcal{T}(i{+}1)$ を対応 $T(i)_1 \mapsto T(i{+}1)_1$, $T(i)_j \mapsto T(i+1)_{j+1}$, $\delta(i)_1 \mapsto \delta(i+1)_2\delta(i+1)_1$, $\delta(i)_j \mapsto \delta(i+1)_{j+1}$ $(\forall j = 2, \dots, i)$ によって定義する．以上によって，関手 $\mathcal{T}\colon I \to \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ が定義される．このとき $\Bbbk\text{-}\mathbf{Cat}$ において，各 $i \in I_0$ に対して強い意味の可換図式 (a strict commutative diagram)

$$
\begin{tikzcd}
X'(i) \arrow[r, "F(i)"] \arrow[d, "X'(a_i)"'] & \mathcal{T}(i) \arrow[d, "\mathcal{T}(a_i)"] \\
X'(i+1) \arrow[r, "F(i+1)"'] & \mathcal{T}(i+1)
\end{tikzcd}
$$

が存在するので，X' と $\mathcal{T}$ が $\overleftarrow{\mathrm{Colax}}(I, \Bbbk\text{-}\mathbf{Cat})$ において同値になる．最後に，$\mathcal{T}(a_i)$ の定義より，I 同変包含関手 $(\sigma, \rho)\colon \mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}\,X)$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(i) \arrow[r, hook, "\sigma(i)"] \arrow[d, "\mathcal{T}(a_i)"'] & \mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}\,X(i)) \arrow[d, "\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}\,X(a_i))"] \arrow[dl, Rightarrow, "\rho(a_i)"', "\cong"] \\
\mathcal{T}(i+1) \arrow[r, hook, "\sigma(i+1)"'] & \mathcal{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{prj}\,X(i+1)).
\end{tikzcd}
$$

の存在が容易にわかる．したがって，定理 5.7により，$X(i)$ と $X'(i)$ の間の導来同値を貼り合わせて，$\mathrm{Gr}(X)$ と $\mathrm{Gr}(X')$ の間の導来同値を構成することができる．例えば $n = 5$

の場合，これらは次のクイバー

$$
\mathrm{Gr}(X) = \begin{tikzcd}
1 \arrow[r, bend left, "\alpha_1"] \arrow[d] & 2 \arrow[l, bend left, "\beta_1"] \arrow[d] & & & \\
1 \arrow[r, bend left, "\alpha_1"] \arrow[d] & 2 \arrow[l, bend left, "\beta_1"] \arrow[r, bend left, "\alpha_2"] \arrow[d] & 3 \arrow[l, bend left, "\beta_2"] \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r, bend left, "\alpha_1"] \arrow[d] & 2 \arrow[l, bend left, "\beta_1"] \arrow[r, bend left, "\alpha_2"] \arrow[d] & 3 \arrow[l, bend left, "\beta_2"] \arrow[r, bend left, "\alpha_3"] \arrow[d] & 4 \arrow[l, bend left, "\beta_3"] \arrow[d] & \\
1 \arrow[r, bend left, "\alpha_1"] & 2 \arrow[l, bend left, "\beta_1"] \arrow[r, bend left, "\alpha_2"] & 3 \arrow[l, bend left, "\beta_2"] \arrow[r, bend left, "\alpha_3"] & 4 \arrow[l, bend left, "\beta_3"] \arrow[r, bend left, "\alpha_4"] & 5 \arrow[l, bend left, "\beta_4"]
\end{tikzcd}
, \quad
\mathrm{Gr}(X') = \begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d] & 2 \arrow[l, bend left, "\gamma_2"] \arrow[dr] & & & \\
1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d] & 2 \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[dr] & 3 \arrow[ll, bend left, "\gamma_3"] \arrow[dr] & & \\
1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d] & 2 \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[dr] & 3 \arrow[r, "\gamma_3"] \arrow[dr] & 4 \arrow[lll, bend left, "\gamma_4"] \arrow[dr] & \\
1 \arrow[r, "\gamma_1"] & 2 \arrow[r, "\gamma_2"] & 3 \arrow[r, "\gamma_3"] & 4 \arrow[r, "\gamma_4"] & 5 \arrow[llll, bend left, "\gamma_5"]
\end{tikzcd}
$$

と，論文 [8] で一般的に与えられている関係で表示される．ここで，圏 I として上と同じクイバー Q と関係 $a_{i+1}a_i = 0$ $(\forall i = 2, \ldots, n-2)$ で定義されたものをとると，$\mathrm{Gr}(X)$ および $\mathrm{Gr}(X')$ は，それぞれ上の対応する関係付きクイバーと垂直方向の長さ 2 の道が 0 という関係を追加して表示することができる．もちろん，そのようにして得られた，$\mathrm{Gr}(X)$ と $\mathrm{Gr}(X')$ も導来同値である．このようにして，I の方の関係式を変えて，導来同値な多元環の組をいろいろとつくることもできる．

参考文献

[1] Asashiba, H.: *A covering technique for derived equivalence*, J. Alg., **191** (1997), 382–415.

[2] Asashiba, H.: *The derived equivalence classification of representation-finite selfinjective algebras*, J. Alg., **214** (1999), 182–221.

[3] Asashiba, H.: *Derived and stable equivalence classification of twisted multifold extensions of piecewise hereditary algebras of tree type*, J. Algebra **249** (2002), 345–376.

[4] Asashiba, H.: *A generalization of Gabriel's Galois covering functors and derived equivalences*, J. Algebra **334** (2011), 109–149.

[5] Asashiba, Hideto: *A generalization of Gabriel's Galois covering functors II: 2-categorical Cohen-Montgomery duality*, preprint arXiv: 0905.3884.

[6] Asashiba, H.: *Derived equivalences of actions of a category*, Appl. Categor. Struct. DOI 10.1007/s10485-012-9284-5.

[7] Asashiba, H.: *Gluing derived equivalences together*, preprint, arXiv:1204.0196.

[8] Asashiba, H. and Kimura, M.: *Presentations of Grothendieck constructions*, to appear in Comm. in Alg., (arXiv:1111.3845).

[9] Asashiba, H. and Kimura, M.: Derived equivalence classification of generalized multifold extensions of piecewise hereditary algebras of tree type, in preparation.

[10] Assem, I. Simson, D. Skowroński, A.: Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, London Math. Soc. Student Texts **65**, Cambridge Univ. Press.

[11] Bongartz, K. and Gabriel, P.: *Covering spaces in representation theory*, Invent. Math. **65**, 1982, 331–378.

[12] Cibils, C. and Marcos, E.: *Skew category, Galois covering and smash product of a k-category*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (1), (2006), 39–50.

[13] Gabriel, P.: The universal cover of a representation-finite algebra, *in* Lecture Notes in Mathematics, Vol. **903**, Springer-Verlag, Berlin/New York (1981), 68–105.

[14] Gordon, R., Power, A. J. and Street, R.: *Coherence for tricategories*. Mem. Amer. Math. Soc., **117** (558):vi+81, 1995.

[15] Green, E. L.: *Graphs with relations, coverings and group-graded algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **279**(1), 1983, 297–310.

[16] Grothendieck, A.: Revêtements étales et groupe fondamental, Springer-Verlag, Berlin, 1971. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1), Lecture Notes in Mathematics, Vol. **224**.

[17] Hughes, D. and Waschbüsch, J.: *Trivial extensions of tilted algebras*, Proc. London Math. Soc. (3), **46**, 1983, 347–364.

[18] Keller, B.: *Deriving DG categories*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. **27**, 1994, 63–102.

[19] Keller, B.: *On triangulated orbit categories*, Doc. Math. **10** (2005), 551-581.

[20] Kelly, G. M. and Street, R.: *Review of the Elements of 2-Categories*, Lecture Notes in Mathematics, **420**, Springer-Verlag (1974), 75–103.

[21] Rickard, J.: *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc., **39** 1989, 436–456.

[22] Ch. Riedtmann: *Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück*, Comm. Math. Helv. **55** (1980), 199–224.

[23] Ch. Riedtmann: *Representation-finite selfinjective algebras of class* A_n, *in* Lecture Notes in Mathematics Vol. **832** Springer-Verlag, Berlin/New York (1980), 449–520.

[24] Ch. Riedtmann: *Representation-finite selfinjective algebras of class* D_n, Compositio Mathematica **49** (1983), 231–282.

[25] J. Waschbüsch, J.: *Universal coverings of selfinjective algebras*, Representations of algebras, Lecture Notes in Mathematics 903 (Springer, Berlin, 1981), pp. 331-349.

422-8021 静岡市駿河区大谷 836, 静岡大学理学部数学教室