対称群のカルタン行列にまつわる組合せ論

山田裕史
岡山大学理学部

1 きっかけ

2009 年の夏休みのことである．何気なくラスクーたちの論文 [LLT] の最後についている表を見ていて，急に実験をしてみたくなった．表の $p = 2,\ n = 4$ は次のようである．

	(4)	(31)
(4)	1	0
(31)	q	1
(22)	0	q
(211)	q	q^2
(1111)	q^2	0

これを 5 行 2 列の行列と思い $D_4(q)$ と置く．転置と掛け合わせて 2 行 2 列の対称行列 $C_4(q)$ を作れば

$$C_4(q) = \begin{bmatrix} (1+q^2)^2 & q(1+q^2) \\ q(1+q^2) & 1+q^2+q^4 \end{bmatrix}$$

となる．行列式が幸いにすぐに計算できて

$$\det C_4(q) = (1+q^2)^2(1+q^4)$$

であることがわかる．なかなかきれいに因子分解するではないか．これに気を良くしてもう少し大きな例も計算してみる．$p = 2$ の場合の結果を列挙しよう．

$$
\begin{aligned}
\det C_2(q) &= 1+q^2\\
\det C_3(q) &= 1+q^2\\
\det C_4(q) &= (1+q^2)^2(1+q^4)\\
\det C_5(q) &= (1+q^2)^3(1+q^4)\\
\det C_6(q) &= (1+q^2)^4(1+q^4)(1+q^6)\\
\det C_7(q) &= (1+q^2)^6(1+q^4)^2(1+q^6)\\
\det C_8(q) &= (1+q^2)^8(1+q^4)^3(1+q^6)(1+q^8)\\
\det C_9(q) &= (1+q^2)^{11}(1+q^4)^4(1+q^6)^2(1+q^8)\\
\det C_{10}(q) &= (1+q^2)^{14}(1+q^4)^5(1+q^6)^2(1+q^8)(1+q^{10}).
\end{aligned}
$$

ここではたとえば

$$1+q^6=(1+q^2)(1-q^2+q^4)$$

と分解しないで左辺のままで止めておくところがミソである．ラスクーたちの論文には $p=3$ の場合の表（＝おもちゃ）も載っているので同様の操作を行ってみる．

$$
\begin{aligned}
\det C_3(q) &= 1+q^2+q^4\\
\det C_4(q) &= 1+q^2+q^4\\
\det C_5(q) &= (1+q^2+q^4)^2\\
\det C_6(q) &= (1+q^2+q^4)^3(1+q^4+q^8)\\
\det C_7(q) &= (1+q^2+q^4)^5(1+q^4+q^8)\\
\det C_8(q) &= (1+q^2+q^4)^7(1+q^4+q^8)^2\\
\det C_9(q) &= (1+q^2+q^4)^{10}(1+q^4+q^8)^2(1+q^6+q^{12}).
\end{aligned}
$$

ちなみにこの計算はほとんど手でおこなっている．時代遅れと言って下さって結構である．いずれにせよ「これはいったいなんなのだろうか？」という疑問がそもそもの発端である．本記事はこの疑問に答えようとしている途中経過の報告である．発端となった疑問は私の個人的なもので

あるが，現在の研究（[ASY]）は岡山大学での同僚の鈴木武史，博士課程大学院生の安東雅訓と共同でおこなっている．

2 Glaisher 対応

自然数 $p \geq 2$ を固定する．当面 p は素数でなくてもかまわない．分割（＝ヤング図形）$\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \ldots n^{m_n})$ が p-正則とは，すべての i について $m_i < p$ であること．また λ が p-類正則であるとはすべての i に対して $m_{pi} = 0$ であることと定義する．p-正則（resp. p-類正則）な n の分割全体を $\mathcal{P}^{(p)}(n)$ (resp. $\mathcal{P}_{(p)}(n)$) で表そう．ちなみに何も条件を付けない n の分割全体の集合は $\mathcal{P}(n)$ で表す．オイラーの時代からよく知られているように $|\mathcal{P}^{(p)}(n)| = |\mathcal{P}_{(p)}(n)|$ である．具体的な全単射として "Glaisher 対応" と呼ばれているものがある．

一般に分割の (i^m) という部分に対して，$m = pq + r$ $(0 \leq r < p)$ と割り算して $(i^r\ (pi)^q)$ と "細分" する．

$$(*) \quad (i^m) \longmapsto (i^r\ (pi)^q)$$

この操作を繰り返せば最終的に p-正則な分割 $\tilde{\lambda}$ が出来上がる．例で説明しよう．たとえば $p = 2$ として $\lambda = (1^7 3^4 5) \in \mathcal{P}_{(2)}(24)$ を考える．これに対応させたいのは同じサイズの 2-正則分割，すなわちストリクトな分割 $\tilde{\lambda}$ である．上で述べた操作を一つ一つ確認すると

$$\lambda = (1^7 3^4 5) \longmapsto (12^3 3^4 5) \longmapsto (123^4 45) \longmapsto (12456^2) \longmapsto (1245\ 12) = \tilde{\lambda}.$$

さて不定元 Q_i $(i \geq 1)$ を用意して，上の (*) の操作に Q_i^q というウエイトを付与する．$\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n)$ に対して Glaisher 対応のすべてのステップに渡る Q_i たちの積を λ の "Glaisher ウエイト" とよび $w_G(\lambda)$ で表す．上の例では $w_G(\lambda) = Q_1^3 Q_2 Q_3^2 Q_6$ である．

3 宇野ウエイト

p-類正則分割 $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \ldots)$ に対して今ひとつのウエイトを定義しよう．自然数 $k = ap^b$ $(p \nmid a)$ に対して

$$v(k) := Q_a Q_{ap} \cdots Q_{ap^{b-1}} = \prod_{j=1}^{b} Q_{k/p^j}$$

とおいて

$$w_U(\lambda) := \prod_{i\geq 1}\Big(\prod_{k=1}^{m_i} v(k)\Big)$$

を “宇野ウエイト” と呼ぶことにする．たとえば $p=2$ で $\lambda=(1^7 3^4 5)\in\mathcal{P}_{(2)}(24)$ であれば $w_U(\lambda)=Q_1^4Q_2^2Q_3$ である．すべての Q_i に次数 1 を持たせて，単項式としての次数を見れば

$$\deg w_U(\lambda) = \deg w_G(\lambda) = \frac{\ell(\lambda)-\ell(\tilde{\lambda})}{p-1}$$

であることが簡単にわかる．ここで $\ell(\lambda)$ は通常通り，分割 λ の length，すなわちヤング図形の縦の長さを表す.「簡単にわかる」と書いたがこれに気がついたときにはうれしくて論文を書いた ([UY])．当初は $w_G(\lambda)=w_U(\lambda)$ を期待したのだが，上で見た通り成り立たないことがわかる．ちなみに「宇野」とは大阪教育大学の宇野勝博氏のことである．長年に渡り，私の「思いつき」の良き理解者であり，共同研究者でもある．代数学シンポジウムでの講演では座長を務めてもいただいた．唐突だがここで感謝の意を表す．何かの折に大阪で Glaisher ウエイトの話をしたときに「こんなウエイトもあり得るよ」と教えていただいたのが $w_U(\lambda)$ である．p が素数のときの，有限群の p-正則元の中心加群というものからの発想なのだと思われる.「宇野ウエイト」以外の名称は考えられない.（正確に言えば，いろいろ別名も考えたのだが，どれもしっくりこない.）上記 [UY] で示したことは，p が素数のとき，すべての i に対して $Q_i=p$ と特殊化すれば，

$$w_G(\lambda)=w_U(\lambda)=p^{\frac{\ell(\lambda)-\ell(\tilde{\lambda})}{p-1}} \qquad (\lambda\in\mathcal{P}_{(p)}(n))$$

は対称群 $\mathfrak{S}_n$ のカルタン行列の単因子を与える，というものである．

さて我々 (= 安東，鈴木，山田) の最初の結果を述べよう．

定理 3.1.

$$\prod_{\lambda\in\mathcal{P}_{(p)}(n)} w_G(\lambda) = \prod_{\lambda\in\mathcal{P}_{(p)}(n)} w_U(\lambda).$$

後述するが，この両辺は A 型の “岩堀-ヘッケ環” $\mathcal{H}_n(\zeta)$ （ζ は 1 の原始 p-乗根）の “q-カルタン行列” の行列式を与えている．

定理の両辺の $Q_{ap^{b-1}}$ $(p\nmid a,\ b\geq 1)$ の個数を比べることにより次のような分割恒等式が出る．

系 3.2.

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_{(p)}(n)}\lfloor\frac{m_a}{p^b}\rfloor=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_{(p)}(n)}\sum_{i\geq 1\ p\nmid i}\ell_p\lfloor\frac{m_i}{ap^b}\rfloor.$$

ここで $\ell_p(m)$ は自然数 m を p-進展開したときの桁数を表す.

今回のような話を進めていくと，このような分割の恒等式がやたらに登場する．通常，なかなか思いつかないものだろうが，一旦気がつけば（我々の等式を用いずとも）母函数の方法で証明される．たとえば次のようなものもある．

命題 3.3.

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_{(p)}(n)}m_a=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_{(p)}(n)}\sum_{i\geq 1\ p\nmid i}\ell_p\lfloor\frac{m_i}{a}\rfloor$$

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}(n)}m_a=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}(n)}\sum_{i\geq 1\ p\nmid i}\ell_p\lfloor\frac{m_i}{a}\rfloor.$$

4　Hill ウエイトと土岡量

この節では David Hill の仕事 [H] に触発されて考えついた Hill ウエイトについて述べる．記号の準備から．分割の組の集合を考える．

$$\mathcal{M}_{p-1}(d):=\{\underline{\lambda}=(\lambda^1,\ldots,\lambda^{p-1});\ \sum_{i=1}^{p-1}|\lambda^i|=d\}.$$

また p-コアの集合も必要だ.

$$\mathcal{C}(k):=\{\chi;\ p\text{−core},|\chi|=k\}.$$

これらの直積集合を考える.

$$\mathcal{Q}_p(n):=\bigsqcup_{0\leq d\leq\lfloor\frac{n}{p}\rfloor}\mathcal{M}_{p-1}(d)\times\mathcal{C}(n-pd).$$

ここの元 $(\underline{\mu},\chi)$ に対して，その “Hill ウエイト” を

$$w_H(\underline{\mu},\chi):=\prod_{i\geq 1\ p\nmid i}Q_1\cdots Q_{m_i}w_U(\widehat{\mu^{p-1}})$$

により定義する．ここで $\mu^{p-1}=(1^{m_1}2^{m_2}\ldots)$, $\widehat{\mu^{p-1}}=(\ldots\widehat{p^{m_p}}\ldots\widehat{(2p)^{m_{2p}}}\ldots)$ と置いた．右辺の^は取り去ることを意味する．ここで $\widehat{\mu^{p-1}}$ は p-類正則なので宇野ウエイト $w_U(\widehat{\mu^{p-1}})$ が付与されている．定義より Hill ウエイトは分割の最後の成分 μ^{p-1} にしかよらない．我々の結果は次の通り．

定理 4.1. 多重集合として

$$\{w_U(\lambda);\lambda\in\mathcal{P}_{(p)}(n)\}=\{w_H(\underline{\mu},\chi);(\underline{\mu},\chi)\in\mathcal{Q}_p(n)\}.$$

従って特に

$$\prod_{\lambda\in\mathcal{P}_{(p)}(n)}w_U(\lambda)=\prod_{(\underline{\mu},\chi)\in\mathcal{Q}_p(n)}w_H(\underline{\mu},\chi).$$

新たな量を定義しては，等式を提示する，という無味乾燥なことをやっているが，最後にもう一つだけ許してもらおう．$d\geq 0,\ \ell\geq 1$ に対して

$$A_\ell(d):=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}(d)}\frac{m_\ell}{p-1}\prod_{j\geq 1}\binom{m_j+p-2}{m_j}$$

と置く．量子普遍包絡環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_p})$ の基本表現の “ Shapovalov 形式 ” のグラム行列式に関連して，土岡俊介氏によって導入された量なのでここでは “土岡量” と呼ぶことにしよう．母函数のテクニックで

$$A_\ell(d)=\sum_{\underline{\mu}\in\mathcal{M}_{p-1}(d)}m_\ell(\mu^{(p-1)})$$

であることが確かめられる．

定理 4.2.

$$\prod_{\ell=1}^{d}Q_\ell^{A_\ell(d)}=\prod_{\underline{\mu}\in\mathcal{M}_{p-1}(d)}w_H(\underline{\mu},\emptyset).$$

5 背景

上に述べたことの背景をちょっとだけ紹介しよう．ラスクー達（[LLT]）は量子普遍包絡環（量子群）$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_p})$ のフォック表現を取り上げた．フォック空間は

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{Q}(\lambda)$$

で定義される．ここで $\mathcal{P}$ は分割全体の集合である．この空間に $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_p})$ の作用が与えられ，既約分解する．その際，基本表現 $L(\Lambda_0) = U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_p}) \cdot \emptyset$ が重複度 1 で現れる．$L(\Lambda_0)$ には Kashiwara lower global crystal basis

$$\{G(\mu);\ \mu \in \mathcal{P}^{(p)}\}$$

が存在するのでそれをフォック空間の通常の基底で展開する．

$$G(\mu) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} d_{\lambda\mu}(q)\lambda.$$

[LLT] の結果は以下の通りである．

(1) $d_{\lambda\mu}(q) \in \mathbb{Z}[q]$.
(2) $d_{\mu\mu}(q) = 1;\ d_{\lambda\mu}(0) = 0$ if $\lambda \neq \mu$.
(3) $d_{\lambda\mu}(q) = 0$ unless $|\lambda| = |\mu|$, same p-core, and $\lambda \leq \mu$ in dominance order.

彼らは行列

$$D_n(q) = (d_{\lambda\mu}(q))_{\lambda \in \mathcal{P}(n), \mu \in \mathcal{P}^{(p)}(n)}$$

を計算し，$q = 1$ を代入したとき，つまり $D_n(1)$ が岩堀-ヘッケ環 $\mathcal{H}_n(\zeta)$（ζ は 1 の原始 p-乗根）の "分解行列" に一致することを予想した．その予想は有木進氏によって肯定的に解決されたことは有名である ([A]).

$$C_n(q) := {}^tD_n(q)\ D_n(q)$$

と置く．$q = 1$ のときはこれは $\mathcal{H}_n(\zeta)$ のカルタン行列になる．p が素数ならば対称群 $\mathfrak{S}_n$ のカルタン行列に「似て」おり，実際，単因子や行列式は岩堀-ヘッケ環のそれに一致する．実は代数学シンポジウムの講演後に，ある方から，自分の知っているカルタン行列と違う，との指摘を受けた．おっしゃる通り．リー環の単純ルート同志の内積を表すカルタン

行列とは別物である．ここでは [射影加群：既約加群] の重複度を行列に書いたものをカルタン行列と呼んでいる．もともと両者は無関係のはずだったのに，だんだん関係がわかってきてしまっている．そこで一方を “Lie-Cartan matrix” と呼ぶ論文も出てきている．

閑話休題．それでは q をつけたまま，すなわち “q-カルタン行列” $C_n(q)$ について何がわかるだろうか，というので本記事の冒頭につながる．表現論的な意味は当初は不明だったが，実は “Khovanov-Lauda-Rouquier 代数” ([KL1],[KL2], [R]) という次数付き代数 $\widetilde{\mathcal{H}_n(q)}$ のカルタン行列になっていることが既に示されている ([BK2]) ことを後になって知った.「次数付き表現論」は現在のトレンドらしい．

一方で岩掘-ヘッケ環 $\mathcal{H}_n(\zeta)$ のカルタン行列式は対応する普遍包絡環 $U(\widehat{\mathfrak{sl}_p})$ の基本表現 $L(\Lambda_0)$ の不変内積である “Shapovalov 形式” のグラム行列式に一致する ([BK1]) ことが知られている．土岡氏はこれを量子化し $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_p})$ の Shapovalov 形式のグラム行列式を計算した．そこで導入されたのが先程述べた “土岡量” である．結果的に土岡氏は $\mathcal{H}_n(\zeta)$ の q-カルタン行列のブロック行列式を求めたことになる．正確に述べれば次のようになる．

定理 5.1. （土岡俊介 [T]）
$\prod_{\ell=1}^{d} Q_\ell^{A_\ell(d)}$ は $Q_\ell = \frac{1-q^{2p\ell}}{1-p^{2\ell}}$ と特殊化したとき，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_p})$ の基本表現 $L(\Lambda_0)$ において Shapovalov 形式をウエイト $\Lambda_0 - d\delta$ に制限したときのグラム行列式に等しい．

以上をふまえて我々の結果をまとめる．上のブロック行列式をうまい具合に掛け合わせれば「フルの」カルタン行列式の値が出る．冒頭に掲げた一覧表の意味，計算方法がわかる，というものである．

定理 5.2.

$$\det C_n(q) = \prod_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n)} w_G(\lambda) = \prod_{\lambda \in \mathcal{P}_{(p)}(n)} w_U(\lambda) = \prod_{(\underline{\mu},\chi) \in \mathcal{Q}_p(n)} w_H(\underline{\mu},\chi).$$

ただし $Q_\ell = \frac{1-q^{2p\ell}}{1-q^{2\ell}}$ と置いている．

最後に**希望**を書いておこう．ここでは p を素数とする．

(1) Shapovalov 形式をウエイト $\Lambda_0 - d\delta$ に制限したときのグラム行列の，$\mathbb{Q}[q,q^{-1}]$ 上の単因子は

$$\{w_H(\underline{\mu},\emptyset);\underline{\mu}\in\mathcal{M}_{p-1}(d)\}$$

を対角成分に持つ行列の単因子に等しい．

(2) q-カルタン行列 $C_n(q)$ の $\mathbb{Q}[q,q^{-1}]$ 上の単因子は

$$\{w_U(\lambda);\lambda\in\mathcal{P}_{(p)}(n)\}=\{w_H(\underline{\mu},\chi);(\underline{\mu},\chi)\in\mathcal{Q}_p(n)\}$$

を対角成分に持つ行列の単因子に等しい。

我々は $p=2,\ n\le 13$，および $p=3,\ n\le 10$ では確かめている．さすがにコンピュータを使った．講演で述べたときには，p が素数，という本質的な仮定を言い忘れており，後で座長の宇野氏から指摘された．さらに講演時には「単因子型が等しい」よりも強く,「宇野ウエイトやら Hill ウエイトやらが単因子そのものを与える」と思っており，実際にそのように述べた．これに関しては土岡氏から「整除関係だけをみても反例がある」と教えられ，深く恥じ入った次第である．

あとは $p=2$ の場合のブロックについて詳しい議論があるのだが，今回はここで止めておく．詳しくは論文 [ASY] を見て欲しい．ごく最近には $A_{2\ell}^{(2)}$ に対応する議論も進みつつある．今後，益々面白くなることを期待している．

このような報告集で「楽しい読み物」を期待する向きがあるのは承知しているが，根が真面目なせいか，そういう書き方ができず事実の羅列に終わってしまった．下ネタをそれとなく忍ばせておく，ということもやっていないので見つけようとしても無駄である．もしそのようなものがあったとすればそれはあなたの深読みにすぎない．

東京大学 IPMU の土岡俊介氏は岡山で，また京都でいろいろ教えて下さった．書きかけの原稿 [T] も見せて下さった．感謝する．そして共同研究者の鈴木氏，安東氏には本当にお世話になっているのでこの機会にちゃんとお礼を申し上げる．どうもありがとう．

参考文献

[A] S. Ariki, On the decomposition numbers of the Hecke algebra $G(m,1,n)$, J. Math., Kyoto Univ. 36 (1996), 789-808.

[ASY] M. Ando, T. Suzuki and H. -F. Yamada, *Combinatorics for graded Cartan matrics for the Iwahori-Hecke algebras of type A,* preprint, 2011.

[BK1] J. Brundan and A. S. Kleshchev, Cartan determinants and Shapovalov forms, Math. Ann. 324 (2002), 431-449.

[BK2] J. Brundan and A. S. Kleshchev, Graded decomposition numbers for cyclotomic Hecke algebras, Adv. Math. 222 (2009), 1883-1942.

[H] D. Hill, Elementary divisors of the Shapovalov form on the basic representation of Kac-Moody algebras, J. Algebra 319 (2008), 5208-5246.

[KL1] M. Khovanov and A. Lauda, A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I, Represent. Theory 13 (2009), 309-347.

[KL2] M. Khovanov and A. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II*, arXiv:0804.2080.

[LLT] A. Lascoux, B. Leclerc and J.-Y. Thibon, Hecke algebras at root of unity and crystal bases of quantum affine algebras, Commun. Math. Phys. 81 (1996), 105-263.

[R] R. Rouquier, *2-Kac-Moody algebras*, arXiv:0812.5023.

[T] S. Tsuchioka, *Graded Cartan determinants and Shapovalov forms,* preprint 2011.

[UY] K. Uno and H.-F. Yamada, Elementary divisors of Cartan matrices for symmetric groups, J. Math. Soc. Japan 58 (2006), 1031-1036.