有限群のブロックの超焦点部分群と超焦点部分代数

渡邉アツミ (熊本大学大学院自然科学研究科)

はじめに．有限群のモジュラー表現論において 1990 年ころ提起された可換不足群を持つブロックに対する Broué 予想は最も関心が持たれている問題の一つである．代数学シンポジウムでも講演が幾度かあった ([16])．可換不足群を持つブロックは, その Brauer 対応子と導来同値ではないかと言う予想である．その後 2000 年ころ Rouquier [24] は Broué 予想の非可換不足ブロックへの拡張として, 有限群のブロックの超焦点部分群が可換であるとき, ブロックは超焦点部分群の正規化群における Brauer 対応子と導来同値ではないかと予想している．講演では Puig [19] で導入されたブロックの超焦点部分群, 超焦点部分代数及び Rouquier 予想を紹介した．　本報告では講演の内容より少し詳しく述べている．説明不足の用語については [15], [25] を参照されたい.

1　有限群の p-超焦点部分群

以下において p を素数, G を有限群とする．この節では P を G の Sylow p-部分群とする．

$$f_G(P) = \langle\ [\ T,\ N_G(T)\ ]\mid T \le P\ \rangle$$

を G の p-焦点部分群と呼ぶ. 但し $[\ T,\ N_G(T)\ ]$ は交換子群 $\langle t^{-1}n^{-1}tn \mid t\in T,\ n\in N_G(T)\rangle$ を表す．G の正規部分群のうち剰余群が可換 p-群となる最小の正規部分群を $G'(p)$ と書くとき,

$$f_G(P) = P\cap G'(p) = P\cap G',$$

$$G/G'(p)\cong P/f_G(P)$$

が成り立つことが知られている (Higman の定理, [9], 7.3). G の正規部分群のうち剰余群が p-群となる最小の正規部分群を $O^p(G)$ で表す．$O^p(G)$ は G の p'-元全体 $G_{p'}$ で生成される．

$$h_G(P) = \langle\ [\ T,\ O^p(N_G(T))\ ]\mid T\le P\ \rangle$$

を G の p-超焦点部分群 (p-hyperfocal subgroup) と呼ぶ.

$$h_G(P) = P\cap O^p(G)$$

が成り立つ (Puig の定理, 証明は [2], 補題 2.2 又は [6], 定理 1.33 を参照されたい)．特に $h_G(P)=1$ のとき, G は p-冪零である．実際 $C_G(h_G(P))$ は p-冪零である ([19], 命題 4.2). また P が G の正規部分群ならば $h_G(P) = [P,\ O^p(G)]$.

Frobenius 圏 $\mathcal{F}_P(G)$ の対象は P の部分群で, 任意の $S,\ T \le P$ に対して射は

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{F}_P(G)}(S,\ T) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(S,\ T) \mid \varphi = c_{x|_S}\ (\exists x \in G)\},$$

但し c_x は x による共役写像である. Burnside の定理 から P がアーベル群ならば $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(N_G(P))$. 次の命題は後に述べる Rouquier 予想を考察する中で得られた. 後に述べる定理 2 の特別な場合 (b が 主ブロックの場合) である.

命題 1 (奥山- 渡邉 [17]) $Q = h_G(P)$ とおく. Q がアーベル群ならば $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(N_G(Q))$.

この命題は Glauberman の定理 (Gorenstein-Lyons-Solomon, The classification of the finite simple groups, vol. 40, No.2, Prop.16.20) から導ける (熊本大学千吉良直紀氏の指摘) この定理を用いると $f_G(P)$ についても同様のことが言える.

2 ブロックの超焦点部分群

$\mathcal{O}$ を標数 0 の完備な離散付値環で, その剰余体 k が標数 p の代数閉体であるものとする.

$$\mathcal{O}G = \bigoplus_{\tau=1}^{t} \mathcal{O}G b_\tau$$

を群環 $\mathcal{O}G$ のブロック分解とする, b_τ はブロック冪等元である. b_τ を G のブロックと言う. $Bl(G) := \{b_1, b_2, \cdots, b_t\}$. $\mathcal{O}G$ から kG への自然な準同型による $a \in \mathcal{O}G$ の像を $\bar{a}$ で表す.

$$kG = \bigoplus_{\tau=1}^{t} kG\overline{b_\tau}$$

は kG のブロック分解である.

G の部分群 T に対し, $(\mathcal{O}G)^T = \{a \in \mathcal{O}G \mid t^{-1}at = a\ (\forall t \in T)\}$ とおく. $((\mathcal{O}G)^T)^\times$ は $(\mathcal{O}G)^T$ の単元の全体を表す. T が p-部分群であるとき, $(\mathcal{O}G)^T$ から $kC_G(T)$ の Brauer 準同型を Br_T で表す :

$$\mathrm{Br}_T(\sum_{x \in G} a_x x) = \overline{\sum_{x \in C_G(T)} a_x x}.$$

$(\mathcal{O}G)^T$ の原始冪等元の $((\mathcal{O}G)^T)^\times$-共役類 α を T の点 (point) という. T と α の組 T_α を点群 (pointed group) という. T の点 α は $\mathrm{Br}_T(\alpha) \neq \{0\}$ のとき T の局所点 (local point), T_α を**局所点群** (local pointed group) という. T の局所点と $kC_G(T)$ の既約加群の同型類は自然に一対一に対応する. 点群 T_α と U_β は,

$$T \le U \ \ \text{かつ},\ \exists i \in \alpha,\ \ \exists j \in \beta \ \ s.t.\ \ ij = ji = i$$

となるとき T_α は U_β に含まれると言い

$$T_\alpha \le U_\beta$$

と書く．点群 $G_{\{b\}}$ に含まれる点群の全体には G が共役によって作用する．T_α の安定化群は $N_G(T_\alpha)$ で表す．

以下 G のブロック b を固定する．

T が G の p-部分群であるとき, $e \in Bl(C_G(T))$ に対し, 組 (T, e) を **Brauer 対**と言う．$\bar{e} = \mathrm{Br}_T(b)\bar{e}$ であるとき, $e^G = b$ と書き, (T, e) を b-Brauer 対と言う．b-Brauer 対の全体には G が共役によって作用する．(T, e) の安定化群を $N_G(T, e)$ で表す．局所点群 T_α に対し

$$\bar{e}\mathrm{Br}_T(i) = \mathrm{Br}_T(i)\bar{e} = \mathrm{Br}_T(i) \quad (\forall i \in \alpha)$$

ならば, T_α は (T, e) に associate されるという．T_α にとって (T, e) は一意的に決まる．また (T, e) が b-Brauer 対ならば, $T_\alpha \leq G_{\{b\}}$.

Brauer 対 (T, e) と (U, f) は, (U, f) に associate される局所点群 U_β に対し, 局所点群 $T_\alpha \leq U_\beta$ が (T, e) に associate されるとき, (T, e) は (U, f) に含まれるといい,

$$(T, e) \leq (U, f)$$

と書く．Brauer 対 (U, f) と $T \leq U$ に対し, (U, f) に含まれる Brauer 対 (T, e) が一意的に存在することが分かっている．極大 b-Brauer 対 を一つ選び, それを (P, b_P) で表す．極大なものは G-共役を度外視して一意的に決まり, P は b の**不足群**である．各 $T \leq P$ に対し (P, b_P) に含まれる b-Brauer 対を (T, b_T) で表す．一方 (P, b_P) に associate される局所点群を P_γ で表す．$G_{\{b\}}$ に含まれる局所点群は P_γ のある G-共役に含まれることが分かっている．以上の記号のもとに

定義 (Puig [19], 1.7)

$$h_{(G,b)}(P, b_P) = \langle\ [T,\ O^p(N_G(T, b_T))] \mid T \leq P\ \rangle$$
$$= \langle\ [U,\ O^p(N_G(U_\delta))] \mid U_\delta \in \mathcal{S}_\mathcal{L}(P_\gamma)\ \rangle,$$

但し, $\mathcal{S}_\mathcal{L}(P_\gamma)$ は P_γ に含まれる局所点群の全体を表す．$h_{(G,b)}(P, b_P)$ を b の **超焦点部分群** (hyperfocal subgroup) という．

融合定理 (§3, 定理 2) を用いて

$$h_{(G,b)}(P, b_P) = \langle\ [T,\ O^p(N_G(T, b_T))] \mid (T, b_T) \leq (P, b_P) \text{ は extremal } \rangle$$

が示される (extremal の定義は §3 参照)

以下

$$Q := h_{(G,b)}(P, b_P).$$

- b が主ブロックならば $Q = h_G(P)$
- P がアーベル群のときは $Q = [P,\ N_G(P, b_P)]$
- P が G の正規部分群ならば $Q = [P,\ O^p(N_G(P, b_P))]$
- $Q = 1$ のとき b は**冪零ブロック**とよばれる
- 任意の $T \leq P$ について b_T の超焦点部分群は Q の部分群と G-共役である

命題 2 (Puig [19], 命題 4.2) b_Q は不足群 $C_P(Q)$ をもち, 冪零ブロックである．特に $Q_\delta \leq P_\gamma$ を満たす Q の局所点 δ は唯一である．

3　Rouquier 予想

A を $\mathcal{O}$ 上有限生成な多元環とする．有限生成 (左) A-加群の, 上下に有界な複体のなす圏を $C^b(\mathrm{mod}\ A)$, そのホモトピー圏を $K^b(\mathrm{mod}\ A)$, さらにその導来圏を $D^b(\mathrm{mod}\ A)$ で表す．A-加群の複体 $\boldsymbol{C}$ の双対複体を $\boldsymbol{C}^*$, 又 A の反対多元環は A^o で表す．B を $\mathcal{O}$ 上有限生成な多元環とする．A と B が対称多元環であるとき, A と B が導来同値である, つまり, 三角圏として $D^b(\mathrm{mod}\ A) \approx D^b(\mathrm{mod}\ B)$ であるための条件は, $K^b(\mathrm{mod}\ A \otimes_{\mathcal{O}} A^o)$ において

$$\boldsymbol{C} \otimes_B \boldsymbol{C}^* \cong A \tag{1}$$

かつ $K^b(\mathrm{mod}\ B \otimes_{\mathcal{O}} B^o)$ において

$$\boldsymbol{C}^* \otimes_A \boldsymbol{C} \cong B \tag{2}$$

を満たす $\boldsymbol{C} \in K^b(\mathrm{mod}\ A \otimes_{\mathcal{O}} B^o) \cap K^b(\mathrm{proj}\ A) \cap K^b(\mathrm{proj}\ B^o)$ が存在することである, 但し proj A は有限生成射影 A-加群の圏を表す．([21], [22], [23])

以下

$$Q = h_{(G,b)}(P, b_P),\ b_0 = {b_P}^{N_G(P)}, c = {b_P}^{N_G(Q)}$$

とおく．b_0 は b の Brauer 対応子で, b_0 と c の不足群は P である．さらに

$$B = \mathcal{O}Gb,\ B_0 = \mathcal{O}N_G(P)b_0$$

とおく．B と B_0 が導来同値で (このとき b と b_0 は導来同値であるという), (1) と (2) を満たす $\boldsymbol{C}$ の各項の直既約成分が $\mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}P} \mathcal{O}N_G(P)$ の直和成分であるとき, b と b_0 は splendidly Rickard equivalent という．

Broué 予想 (1990)([4], [23]) P がアーベル群ならば b と b_0 は導来同値である．さらに splendidly Rickard equivalent であろうと予想されている．

Rouquier 予想 (2001)([24]) Q がアーベル群ならば b と c は basic Rickard equivalent である．

basic Rickard equivalence の定義については [18] を参照されたい．splendidly equivalent ならば basic Rickard equivalent である．Broué 予想については多くの検証例があるが, Rouquier 予想の検証例はまだ余り知られていない．

Rouquier 予想の検証例:

・ $p = 3$, $G = SL_2(8) \rtimes C_3$, b 主ブロック ([10], [11])

・ $p = 2$, $G = S_5$, b 主ブロック ([29], [5])：このとき S_5 の 2-Sylow 部分群 P は位数 8 の二面体群で S_4 に含まれるものが取れる．2-超焦点部分群 Q は Klein の四元群である．従って $N_G(Q) = S_4$ で c は S_4 の主ブロックである．これらの主ブロックは splendidly Rickard equivalent である．実際 $A := \mathcal{O}Gb$ と $C = N_G(Q)c$ はそれぞれ 2 個の（同型を度外視して)

主直既約加群 $P_1,\ P_2, Q_1, Q_2$ をもつ, ここで $P_1,\ Q_1$ は自明な既約加群に対応するものとする. (A,C)-両側加群 ${}_AA_C$ の射影被覆は

$$P_1 \otimes_{\mathcal{O}} {Q_1}^* \oplus P_2 \otimes_{\mathcal{O}} {Q_2}^* \xrightarrow{\delta} {}_AA_C$$

の形をし, 求める (A,C)-両側加群の複体として次が取れる.

$$\boldsymbol{C}:\ 0 \longrightarrow P_2 \otimes_{\mathcal{O}} {Q_2}^* \overset{\delta_{|P_2\otimes_{\mathcal{O}}{Q_2}^*}}{\longrightarrow} {}_AA_C \longrightarrow 0.$$

さて **Brauer 圏** $\mathcal{F}_{(P,b_P)}(G,b)$ の対象は P の部分群で, 任意の $S,\ T \le P$ に対して射は

$$\mathrm{mor}_{\mathcal{F}_{(P,b_P)}(G,b)}(S,T) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(S,T)$$
$$\mid \exists x \in G\ s.\ t.\ \varphi = c_{x|_S}\ and\ (S,b_S)^x \le (T,b_T)\}.$$

b が G の主ブロック, つまり自明な $\mathcal{O}G$-加群 $\mathcal{O}_G$ に対して $b\mathcal{O}_G \neq 0$ ならば, $P \in Syl_p(G)$ で

$$\mathcal{F}_{(P,b_P)}(G,b) = \mathcal{F}_P(G).$$

b-Brauer 対 (T,b_T) は, $N_P(T)$ が $N_G(T,b_T)$ のブロックとしての b_T の不足群であるとき, (P,b_P) において extremal と言う. $(T,b_T)(\neq (P,b_P))$ は, $Z(T)$ が $C_G(T)$ のブロックとしての b_T の不足群で, $N_G(T,b_T)/TC_G(T)$ が真の strongly p-embedded subgroup を持つとき essential と言う ([1]; [25], §48 参照).

$$\mathcal{C} := \{(P,b_P)\} \cup \{(T,b_T) \subseteq (P,b_P) \mid (T,b_T)\ \text{は}\ (P,b_P)\ \text{において extremal かつ essential}\}.$$

定理 1 (**融合定理** Linckelmann [14], 定理 5.2) $(T,b_T) \subseteq (P,b_P)$ と $(T,b_T)^g \subseteq (P,b_P)$ を満たす $g \in G$ に対して,

$$\begin{cases} (T,b_T) \subseteq (R_1,b_{R_1}), \\ (T,b_T)^{g_1\cdots g_i} \subseteq (R_{i+1},\ b_{R_{i+1}}),\ 1 \le i < n, \\ c_{g_{|T}} = (c_{g_n}c_{g_{n-1}}\cdots c_{g_1})_{|T} \end{cases}$$

を満たす $(R_1,b_{R_1}),(R_2,b_{R_2}),\cdots,(R_n,b_{R_n}) \in \mathcal{C}$ と $g_i \in N_G(R_i,b_{R_i})$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が存在する.

上の定理は fusion system に対する融合定理を Brauer category に適用したものである. 次の定理, (i) は上の融合定理を用いて証明された.

定理 2 以上の記号のもとに,
(i) (奥山 - 渡邉 [17]) Q がアーベル群ならば

$$\mathcal{F}_{(P,b_P)}(G,b) = \mathcal{F}_{(P,b_P)}(N_G(Q),c).$$

特に $Q = h_{(N_G(Q),c)}(P,b_P)$.
(ii) ([28], 定理 1) $Q \le Z(P)$ ならば

$$\mathcal{F}_{(P,b_P)}(G,b) = \mathcal{F}_{(P,b_P)}(N_G(P),b_0).$$

特に $Q = h_{(N_G(P),b_0)}(P,b_P) = [P, O^p(N_G(P,b_P))]$.

さらに, E を $N_G(P, b_P)$ における p-補群 とするとき, $Q \leq Z(P)$ ならば

$$P = Q \times C_P(E)$$

([28], 命題 2).

定理 3 ([28], 定理 2) G は p-可解であると仮定する.
(i) Q がアーベル群ならば b と c は *basic Morita equivalent.*
(ii) $Q \leq Z(P)$ ならば b と b_0 は *basic Morita equivalent.*

この定理の証明は [12] の議論をほぼそっくり辿ることによって確認される. [27] と命題 1 より,

命題 3 $Q \leq Z(P)$ で $Q \lhd G$ ならば b と b_0 は *basic Morita equivalent.*

従って次が予想される.

Rouquier 予想 2 : $Q \leq Z(P)$ ならば b と b_0 は 導来同値である.

4 ブロックの超焦点部分代数

一般に $\mathcal{O}$ 上の多元環 A は群 G が多元環自己同型として作用するとき G-代数 (G-algebra) という. 又 群 G からの群準同型 $G \to A^\times$ が存在するとき内的 G-代数 (interior G-algebra) と呼ばれる. b を前節のように極大局所点群 P_γ をもつ G のブロックとする. γ の元 j を b のソース冪等元という.

$$S = j\mathcal{O}Gj$$

を b のソース代数と言う. S は内的 P-代数である. ソース代数 S は $B = \mathcal{O}Gb$ と森田同値で, b の一般分解定数や加群のヴァーテックス等が S から得られるなどブロックにとって重要な部分多元環である. S は $\mathcal{O}P$-分離的である : (S, S)-両側加群として

$$S \mid S \otimes_{\mathcal{O}P} S$$

([13], 命題 5).

定理 4 (Puig [19], 定理 1.8)

$$D \cap \mathcal{O}Pj = \mathcal{O}Qj, \quad S = \bigoplus_{u \in P/Q} Du \tag{3}$$

を満たす P-安定な (つまり $u^{-1}Du = D$ $(u \in P)$) S の部分多元環 D が $(S^P)^\times$-共役を無視して一意的に存在する.

内的 Q-代数 D は b の **超焦点部分代数** とよばれる. 実際, 超焦点部分代数は (3) を満たす S の部分環のうち極小のものである ([19], 命題 4.2).

・b が主ブロックのとき, [20], 定理 9.5 からソース冪等元 j を $\mathcal{O}O^p(G)$ から選ぶことが出来る. $j\mathcal{O}O^p(G)j$ は b の超焦点部分代数である.
・b が 冪零であるならば D は $\mathcal{O}$ 上の全行列環と同型である ([20], 系 13.13).

超焦点部分代数 D は b の局所的な情報を含む.

定理 5 (Puig [19], 命題 13.5) $T \leq P$ とする. i が D^T の局所的な, つまり $\mathrm{Br}_T(i) \neq 0$ を満たす原始冪等元ならば, i は $(\mathcal{O}G)^T$ の局所的な原始冪等元である.

命題 4 ([26], 定理 1) D は $\mathcal{O}Q$-分離的である. 従って任意の D-加群 V に対して

$$V \mid D \otimes_{\mathcal{O}Q} V.$$

P はアーベル群とする. このとき $P = Q \times C_P(N_G(P, b_P))$ が成り立つ. $R = C_P(N_G(P, b_P))$ とおく.

命題 5 ([26], 定理 2) $\bar{A} = A/J(\mathcal{O})A$ とおく. P がアーベル群ならば,

$$\bar{S} \cong \bar{D} \otimes_k kR.$$

命題 6 ([30]) P はアーベル群とする. b に対して Broué 予想が正しければ

$$S \cong D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}R.$$

([7], p.789, 問題参照) K を $\mathcal{O}$ の商体とする. K は十分に大きいと仮定する. [8] に従って

$$\tilde{S} := K \otimes_{\mathcal{O}} S,\ \tilde{D} := K \otimes_{\mathcal{O}} D$$

とおく. KG が半単純であるあるから $\tilde{S}$, $\tilde{D}$ も半単純となる. [8] では $\tilde{S}$ と $\tilde{D}$ の既約指標が Clifford 理論の観点から考察されている. 上の命題 6 の証明には [8] が用いられる.

参考文献

[1] J. Alperin and M. Broué, Local methods in block theory, Ann. Math., **110**(1979), 143-157.

[2] C. Broto, N. Castellan, J. Grodal, R. Levi and B. Oliver, Extensions of p-local finite groups, Trans. A. M. S., **359**(2007), 3791-3858.

[3] M. Broué and L. Puig, Characters and local structure in G-algebras, J. Algebra, **63**(1980), 306-317.

[4] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, *Astérisque*, **181-182**(1990), 61-92.

[5] J. Chuang and R. Rouquier, Derived equivalences for symmetric groups and $\mathfrak{sl}_2$-categorification, Ann. of Math. (2) **167**(2008), 245-298.

[6] D.A. Craven, "The theory of fusion systems, " Cambridge studies in Advanced mathematics, **131**, 2011.

[7] Y. Fan, Relative local control and the block source algebras, Sci. in China, (Ser. A), **40** (1997), 785-798.

[8] Y. Fan, Hyperfocal subalgebras of blocks and computation of characters, J. Algebra, **322**(2009), 3681-3692.

[9] D. Gorenstein, "Finite Groups", Harper-Row, New York, 1968.

[10] M. Holloway, S. Koshitani and N. Kunugi, Blocks with nonabelian defect groups which have cyclic subgroups of ondex p, Arch. Math. **94**(2010), 101-116.

[11] 越谷重夫, ブルエ予想およびルキエ予想に関する新しい結果, RIMS 講究録, **1656**(2009), 127-135.

[12] R. Kessar and M. Linckelmann, On blocks of strongly p-solvable groups, Arch. Math., **87**(2006), 481-487.

[13] B. Külshammer, T. Okuyama and A. Watanabe, A lifting theorem with applications to blocks and source algebras, J. Algebra, **232**(2000), 299-309.

[14] M. Linckelmann, An introduction to fusion systems, Group representation theory, 79-113, EPFL Press, Lausanne, 2007.

[15] H. Nagao and Y. Tsushima, Representation theory of finite groups, Academic Press, 1989.

[16] 奥山哲郎, 有限群の表現論におけるブルエ予想をめぐって, 代数学シンポジウム, 2006.

[17] 奥山哲郎 - 渡邉アツミ, 可換超焦点部分群を持つブロックの Brauer 圏について.

[18] L. Puig, On the local structure of Morita and Rickard equivalences between Brauer blocks, Birkhäuser, Berlin, 1999

[19] L. Puig, The hyperfocal subalgebra of a block, Invent. math., **141**(2000), 365-397.

[20] L. Puig, "Blocks of finite groups, The hyperfocal subalgebra of a block", Springer, Berlin, 2002.

[21] J. Rickard, Morita theory for derived categories, J. London Math. Soc. (2), **39**(1989), 436-456.

[22] J. Rickard, Derived equivalences as derived functors, J. London Math. Soc. (2), **43**(1991), 37-48.

[23] J. Rickard, Splendid equivalences: Derived categories and permutation modules, Proc. London Math. Soc., **72**(1996), 331-358.

[24] R. Rouquier, Block theory via stable and Rickard equivalences, Modular representation theory of finite groups (Charlottesville, VA, 1998), 101-146, de Gruyter, Berlin, 2001.

[25] J. Thévenaz, "G-algebras and modular representation theory", Clarendon Press, Oxford, 1955.

[26] A. Watanabe, Note on hyperfocal subalgebra of blocks of finite groups, J. Algebra, **322**(2009), 449- 452.

[27] A. Watanabe, A remark on hyperfocal subalgebras of blocks of finite groups, RIMS 講究録 **1687**(2009), 157-163.

[28] A. Watanabe, On blocks of finite groups with central hyperfocal subgroups.

[29] A. Watanabe, An example of Rouquier's conjecture.

[30] 渡邉アツミ, 可換不足群を持つブロックのソース代数について