Derived categories of elliptic surfaces

上原　北斗

第 56 回代数学シンポジウム 2011 年 8 月 10 日

概 要

非自明な (つまり自分自身と同型でない)Fourier–Mukai パートナーを持つ代数曲面は K3 曲面, アーベル曲面, 小平次元が 0 でない楕円曲面のいずれかであることが知られている.

ここでは特に小平次元が負となる楕円曲面の Fourier–Mukai パートナーに関して考察を与え, その応用として, 双有理 Torelli 型定理が成り立たないような 3 次元極小モデルの例と, 川又氏の DK 予想の反例を与える.

1　代数曲面の Fourier–Mukai パートナー

以下, 代数多様体はすべて代数閉体 K 上で考えるものとし, 定理 3.1 を除けば, K の標数は 0 とする. 滑らかな 2 つの射影的代数多様体 X, Y の連接層の導来圏 $D^b(\mathrm{Coh}\, X)$, $D^b(\mathrm{Coh}\, Y)$ が三角圏として同値であるとき, X と Y は互いに Fourier–Mukai パートナーであるという. 非自明な (つまり自分自身と同型でない)Fourier–Mukai パートナーを持つ代数曲面は K3 曲面, アーベル曲面, 小平次元が 0 でない楕円曲面[1]のいずれかであることが知られている ([Ka02, BM01]).

$$\mathrm{FM}(X)$$

で X の Fourier–Mukai パートナーの同型類全体の集合を表すとする.

K3 曲面やアーベル曲面 S に対し, S の Fourier–Mukai パートナー T は, S 上のある種のベクトル束のモジュライ空間として記述できることが知られており [Or97, BM01], この事実を使って集合 $\mathrm{FM}(S)$ は多くの数学者によって研究されている ([HLOY02, Og02, St04] など参照).

小平次元が 0 でない楕円曲面についても定理 1.1 で述べるような, モジュライ空間としての記述が知られている. $\pi : S \to C$ を楕円曲面, F をその一般ファイバーとし, 正の整数 $\lambda_{S/C} = \lambda$ を

$$\lambda := \min\{d \in \mathbf{Z}_{>0} \mid d = F \cdot D, \quad D \text{ は } S \text{ 上の有効因子 } \}$$

で定める. λ と互いに素である正の整数 i に対し, S 上のある種の純 1 次元安定層のモジュライ空間 $J^i(S)$ であって, 次を満たすものが存在する. $J^i(S)$ は滑らかな楕円曲面 $\pi' : J^i(S) \to C$ になり, さらに点 $p \in C$ の π によるファイバー S_p が滑らかな楕円曲線であるとき, 点 $p \in C$ の π' によるファイバー $J^i(S)_p$ が, 楕円曲線 S_p 上の次数 i の直線束のモジュライ空間となる ([Br98]). さらに

$$J^1(S) \cong S, \quad J^i(S) \cong J^{-i}(S), \quad J^i(S) \cong J^{\lambda+i}(S) \tag{1.1}$$

などがわかる ([BM01] 参照). 小平次元が 0 でない楕円曲面 S の Fourier–Mukai パートナーの集合 $\mathrm{FM}(S)$ に関して, 次の定理 1.1 が成り立つ.

定理 1.1 ([BM01])**.** $\pi : S \to C$ を小平次元が 0 でない楕円曲面とすると

$$\mathrm{FM}(S) = \{J^i(S) \mid i \in \mathbf{Z},\ \text{但し } (i, \lambda) = 1\}.$$

[1] 以下では楕円曲面はすべて極小楕円曲面, つまりファイバーに (-1)-曲線は含まれないものとする.

ここで $\lambda > 1$ のとき, (1.1) より右辺は

$$\left\{J^i(S) \;\middle|\; i \in \mathbf{Z},\ \text{但し}\ (i,\lambda) = 1, 1 \le i < \frac{\lambda}{2}\right\}$$

と書けるので, $|\operatorname{FM}(S)| \le \frac{\varphi(\lambda)}{2}$ がわかる．ここで $\varphi(\lambda)$ はオイラー関数である．さらに $\lambda = 1, 2$ のときは $|\operatorname{FM}(S)| = 1$ である．特に例えば切断を持つような楕円曲面については $\lambda = 1$ であることから自明な Fourier–Mukai パートナーしか持たないことがわかる.

S を小平次元が正であるような楕円曲面とすると, 小平次元は必然的に 1 となる. 逆に小平次元が 1 となる任意の代数曲面 S は (極小とは限らない) 楕円曲面となるが, たくさんありすぎるのでここでは取り扱わないことにする.

S を小平次元が負となる楕円曲面とすると, S は $\mathbf{P}^2$ の 9 点爆発 (blow-up) で得られる有理楕円曲面 (rational elliptic surface) か, 楕円曲線上の $\mathbf{P}^1$-束の構造を持つような楕円線織曲面 (elliptic ruled surface) のいずれかであることがすぐにわかる. 以下ではそれぞれの場合に関して集合 $\operatorname{FM}(S)$ を考えていく.

2　有理楕円曲面

$\pi_0\colon B \to \mathbf{P}^1$ を重複ファイバーをもたない有理楕円曲面とする．点 $s \in \mathbf{P}^1$ を, s 上のファイバー B_s の小平タイプが I_n 型 $(n \ge 0)$ であるように選ぶ[2]．ある 2 以上の整数 m をとると, ログ変換 (logarithmic transformation, 例えば [FM94] 参照) により点 s 上で重複度 m の重複ファイバーをもち, さらにその小平タイプが ${}_m\mathrm{I}_n$ 型であるような有理楕円曲面 $\pi\colon S \to \mathbf{P}^1$ が存在する.

逆にこのような有理楕円曲面 S が与えられたとき, その Jacobian 曲面 $J^0(S)$ を取れば, 上記 B のような重複ファイバーをもたない有理楕円曲面を得ることができる.

$$B \underset{B:=J^0(S)}{\overset{\text{ログ変換},m,s}{\rightleftarrows}} S$$

ログ変換はある種のパラメーターの取り方に依存するため, B と S の対応は 1 対 1 ではないものの, 重複ファイバーを持つ有理楕円曲面 S は, すべてその Jacobian 曲面 $B = J^0(S)$ にログ変換を施して得られることがわかる.

有理楕円曲面は重複ファイバーを持ったとしても高々一つであること, さらに上記の S 上の (-1)-曲線 E と一般ファイバー F は, $E \cdot F = m$ を満たすことから, $\lambda = m$ であることに注意されたい.

定理 2.1 ([Ue11])**.** S を上のように B, s, m から得られた有理楕円曲面とする．このとき B, s にのみ依存する正の整数 n_0(注意 2.2(i) 参照) が存在し,

$$\frac{\varphi(m)}{n_0} \le |\operatorname{FM}(S)|$$

が成り立つ.

S は有理楕円曲面なので, 楕円ファイブレーションの構造はただ一つしか持たない. 従って S の自己同型は $\mathbf{P}^1$ の自己同型を引き起こす:

$$f\colon \operatorname{Aut} S \to \operatorname{Aut} \mathbf{P}^1$$

また S は唯一の重複ファイバーを $\mathbf{P}^1$ の点 s 上に持つので, 上の写像の像から $\mathbf{P}^1$ の自己同型をとると, 点 s を固定していることがわかる. さらに S の自己同型は, その Jacobian 曲面 $B = J^0(S)$ の 0 切断をとめる自己同型を決める. そこで $\operatorname{Aut}_0 B$ で 0 切断を固定する B の自己同型全体のなす群とし,

$$\operatorname{Aut}_0(B,s) := \left\{\gamma \in \operatorname{Aut}_0 B \;\middle|\; \gamma\ \text{が引き起こす}\ \mathbf{P}^1\ \text{の自己同型は点}\ s\ \text{を固定}\right\}$$

[2] ただし, I_0 型は滑らかなファイバーを指す.

とおくと, 写像 f は写像 $g\colon \operatorname{Aut}_0(B,s) \to \operatorname{Aut} \mathbf{P}^1$ を使って次のように分解される:

$$f\colon \operatorname{Aut} S \to \operatorname{Aut}_0(B,s) \to \operatorname{Aut} \mathbf{P}^1$$

さらに

$$N_1 := \operatorname{Im}(\operatorname{Aut}_0(B,s) \to \operatorname{Aut} \mathbf{P}^1), \quad N_2 := \operatorname{Coker}(\operatorname{Aut} S \to N_1)$$

とおくと次が成り立つ. 証明は [Ue11] を参照されたい.

注意 2.2. (i) N_1 は有限集合であり, また $n_0 = |N_1| \times |\operatorname{Aut}_0(B/\mathbf{P}^1)|$ と選べる. 但し $\operatorname{Aut}_0(B/\mathbf{P}^1) := \ker g$ と定め, 良く知られているように, $|\operatorname{Aut}_0(B/\mathbf{P}^1)|$ は $2,4,6$ のいずれかである.

(ii) 与えられた S に対し $|N_2| = 1$ のとき, 実際 $|\operatorname{FM}(S)|$ が計算できる. そのような例を一つ与えよう.

$\pi_0\colon B \to \mathbf{P}^1$ を有理楕円曲面で小平タイプ I_1 を 2 つ, タイプ II^* の特異ファイバーを 1 つ持つものとする. このような例は Persson のリスト [Pe90] に現れるので, 実際に存在する. π_0 でのこれら 3 つの特異ファイバーの像をそれぞれ $s,t,u \in \mathbf{P}^1$ とおく. $m > 2$ に対し, 点 s でログ変換を施すと, 有理楕円曲面 S_m が得られる. N_1 の元は $\mathbf{P}^1$ 上の 3 点 s,t,u を固定するので, 結局 N_1 は恒等写像しか含まないことが分かる. 従って $|N_2| = 1$ である. このとき

$$|\operatorname{FM}(S_m)| = \frac{\varphi(m)}{2}.$$

がわかる.

同様の議論を使うと, Persson のリストを見れば, 非常に多くの有理楕円曲面で $|N_2| = 1$ となるように点 $s \in \mathbf{P}^1$ を選ぶことができることがわかる.

上の定理より, 与えられた正の整数 N に対し, 十分大きい重複度をもつ重複ファイバーを含む有理楕円曲面 S をとれば, $|\operatorname{FM}(S)| \geq N$ としてよい. そこで異なる N 個の元 $S_i \in \operatorname{FM}(S)$ $(i = 1, \ldots, N)$ と, もうひとつ一般の[3]有理楕円曲面 T をとり, そのファイバー積 $X_i := S_i \times_{\mathbf{P}^1} T$ を考えれば, 次のような双有理トレリ型定理の反例が得られる.

定理 2.3 ([Ue11])**.** N を与えられた正の整数とする. このとき小平次元が 1 となる 3 次元の滑らかな極小モデル X_i $(i = 1, \ldots, N)$ が存在し, 次を満たす:

(i) $i \neq j$ のとき X_i と X_j は互いに双有理でない.

(ii) X_i たちは互いに変形同値である.

(iii) 任意の i,j に対し, Hodge 同型

$$(H^3(X_i, \mathbf{Z})_{\mathrm{free}}, Q_{X_i}) \cong (H^3(X_j, \mathbf{Z})_{\mathrm{free}}, Q_{X_j}),$$

が存在する. ここで偏極 Q_{X_i} は交点数で与える.

(iv) X_i たちの導来圏 $D^b(X_i)$ は互いに同値である.

他にも互いに双有理でないが導来同値な 3 次元 Calabi–Yau 多様体の例 [BC09] や, 既約シンプレクティック多様体に対する双有理トレリ型定理の反例 [Na02] などが知られている. ([Sz04, Conjecture 0.2] も参照.)

[3] より正確には $\mathbf{P}^1$ 上の同じ点上では S と T が同時に特異ファイバーを持たないようにし, さらにそれぞれの一般ファイバーは互いに同種 (isogenous) でないようにする.

3 楕円線織曲面

楕円曲線 E 上の階数 2 のベクトル束 $\mathcal{E}$ の射影束 $\mathbf{P}_E(\mathcal{E})$ を楕円線織曲面とよぶ. 良く知られているように, 代数多様体 X 上のベクトル束 $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ に対し,

$$\mathbf{P}_X(\mathcal{E}) \cong \mathbf{P}_X(\mathcal{E}') \iff \mathcal{E}' \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} \text{ は } X \text{ 上のある直線束}$$

が成り立つ. このことと Atiyah による楕円曲線上のベクトル束の分類 [At57], さらに [Mi87, Theorem 3.1, §5] の結果[4] を使うと, 楕円曲線 E 上の楕円線織曲面 $\mathbf{P}_E(\mathcal{E})$ が楕円曲面の構造を持つならば, (E 上の直線束のテンソルを除いて) $\mathcal{E}$ は次のいずれかと同型であるとしてよい.

- $\deg \mathcal{E} = 0$ のとき.
  - $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_E \oplus \mathcal{L}$. 但し $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}^0 E$, つまり $\mathcal{L}$ は $\deg \mathcal{L} = 0$ の直線束, もしくは
  - $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}_0$. 但し $\mathcal{E}_0$ は次の分裂しない完全列で定義される直既約なベクトル束;

$$0 \to \mathcal{O}_E \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{O}_E \to 0.$$

- $\deg \mathcal{E} = 1$ のときは, $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}_1$. 但し $\mathcal{E}_1$ はある次数 1 の直線束 $\mathcal{M}$ を使って, 次の分裂しない完全列で定義される直既約なベクトル束;

$$0 \to \mathcal{O}_E \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{M} \to 0.$$

定理 3.1 ([TU11])**.** $p = \operatorname{ch} K \geq 0$ とし, S を楕円線織曲面 $\mathbf{P}_E(\mathcal{E})$ とする.

(i) $\deg \mathcal{E} = 0$ のとき次が成り立つ:

$\mathcal{E}$	楕円ファイブレーションの有無, 存在するときはその重複ファイバー	p
$\mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E$	重複ファイバーは存在しない	$p \geq 0$
$\mathcal{O}_E \oplus \mathcal{L}$, $\operatorname{ord} \mathcal{L} = m > 1$	(m, m)	$p \geq 0$
$\mathcal{O}_E \oplus \mathcal{L}$, $\operatorname{ord} \mathcal{L} = \infty$	楕円ファイブレーションを持たない	$p \geq 0$
$\mathcal{E}_0$	楕円ファイブレーションを持たない	$p = 0$
$\mathcal{E}_0$	(p^*)	$p > 0$

ここで (m, m) とは, 重複度 m の重複ファイバーを 2 つ持つことを意味し, (p^*) は重複度 p の野性的ファイバーを表す. また $\mathcal{L}$ は $\operatorname{Pic}^0 E$ の元で, $\operatorname{ord} \mathcal{L}$ は $\operatorname{Pic}^0 E$ の元としての位数である.

(ii) $\deg \mathcal{E} = -1$, つまり $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}_1$ で, さらに $p \neq 2$ のときは, S は楕円ファイブレーションの構造を持ち, さらにその重複ファイバーのタイプは $(2, 2, 2)$ である.

楕円線織曲面が楕円ファイブレーションを持つとき, 特異ファイバーとしては滑らかな楕円曲線に台を持つ重複ファイバーしか現れないことがわかるので, 上記の重複ファイバーのリストは, 現れる全ての特異ファイバーのリストになっている.

また上記の (ii) で $p = 2$ のときは, [Ma71, Theorem 4] に関連した結果が述べられているが, 筆者には証明が書いてあるとは見受けられない. また [TU11] では (ii) で $p = 2$, さらに 楕円ファイブレーションの存在を仮定したときの特異ファイバーの考察も与えている. また [Mi11] にも同様の場合についての考察があるようである.

[4] [Mi87, Theorem 3.1, §5] では, 任意標数の代数閉体上の楕円曲線 E 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ を与えたとき, いつ $-K_{\mathbf{P}_E(\mathcal{E})}$ がネフになるかが述べられている. $\mathcal{E}$ の階数が 2 のときは [Ha77, §5.2] の結果を使えば, 同様のことが得られる. 一般に $\mathbf{P}_E(\mathcal{E})$ が楕円ファイブレーションを持つならば $-K_{\mathbf{P}_E(\mathcal{E})}$ がネフとなることに注意されたい.

定理 1.1 を使うと, 楕円曲面の Fourier–Mukai パートナーは同じ重複度の重複ファイバーを同じ数だけ持つことや, 互いの一般ファイバーが同型であることなどがわかる. さらに楕円線織曲面の Fourier–Mukai パートナーは楕円線織曲面であることも直ちにわかる. これらと定理 3.1 を使えば, 与えられた楕円線織曲面の Fourier–Mukai パートナーの候補が絞られ, さらなる考察により次が得られる.

定理 3.2 ([TU11]). $\mathrm{ch}\, K = 0$ とし, $S = \mathbf{P}_E(\mathcal{E})$ を楕円曲線 E 上の楕円線織曲面とする. $|\mathrm{FM}(S)| \neq 1$ であることの必要十分条件は, $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0 E$ かつ $m = \mathrm{ord}\, \mathcal{L} \geq 3$ なる直線束 $\mathcal{L}$ が存在し, $\mathcal{E} = \mathcal{O}_E \oplus \mathcal{L}$ となることである.

さらに, このとき

$$\mathrm{FM}(S) = \left\{ \mathbf{P}(\mathcal{O}_E \oplus \mathcal{L}^i) \;\middle|\; i \text{ は整数であって } (i, m) = 1 \text{ かつ } 1 \leq i < \tfrac{m}{2} \right\}$$

となり, これは丁度 $\varphi(m)/2$ 個の元からなる.

最後に川又氏の DK 予想の反例を与えよう. DK 予想とは次である.

予想 3.3 ([Ka02]). X, Y を双有理で滑らかな射影代数多様体とする. このとき次は同値.

(i) X と Y は D 同値, つまり互いに Fourier–Mukai パートナーである.

(ii) X と Y は K 同値, つまりある滑らかな射影代数多様体 Z と射影的な双有理写像 $f\colon Z \to X, g\colon Z \to Y$ が存在し $f^* K_X = g^* K_Y$ が成り立つ.

定理 2.1, 定理 3.2 から, それぞれ有理楕円曲面, 楕円線織曲面で, 非自明な Fourier–Mukai パートナーを持つものが存在することがわかる. 得られた Fourier–Mukai パートナーは元の楕円曲面と双有理である. 一方 K 同値な代数多様体は余次元 1 で同型であるので, 特に 2 次元代数多様体では K 同値ならば多様体として同型である. つまり定理 2.1, 定理 3.2 により, DK 予想の (i) であるが (ii) でない例が構成される ([Ue04] も参照).

参考文献

[At57] M. Atiyah, Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math., Soc. 5 (1955), 407-434.

[BC09] L. Borisov, A. Căldăraru, The Pfaffian-Grassmannian derived equivalence. J. Algebraic Geom. 18 (2009), 201-222.

[Br98] T. Bridgeland, Fourier–Mukai transforms for elliptic surfaces. J. Reine Angew. Math. 498 (1998), 115-133.

[BM01] T. Bridgeland, A. Maciocia, Complex surfaces with equivalent derived categories. Math. Z. 236 (2001), 677-697.

[FM94] R. Friedman, J. W. Morgan, Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces, Springer–Verlag Berlin Heidelberg 1994.

[Ha77] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977.

[HLOY02] S. Hosono, B.H. Lian, K. Oguiso, S.-T. Yau. Fourier-Mukai partners of a K3 surface of Picard number one. In: Vector bundles and representation theory (Columbia, MO, 2002), Contemp. Math. 322 (2002), 43-55.

[Ka02] Y. Kawamata, D-equivalence and K-equivalence. J. Differential Geom. 61 (2002), 147-171.

[Ma71] M. Maruyama, On automorphism groups of ruled surfaces, J. Math. Kyoto Univ. 11, (1971), 89-112.

[Mi87] Y. Miyaoka, The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety. Algebraic geometry, Sendai, 1985, 449-476, Adv. Stud. Pure Math., 10, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[Mi11] K. Mitsui, Elliptic fibrations with multiple fibers, preprint.

[Na02] Y. Namikawa, Counter-example to global Torelli problem for irreducible symplectic manifolds. Math. Ann., 324 (2002) 841-845.

[Og02] K. Oguiso K3 surfaces via almost primes. Math. Res. Lett. 9 (2002), 47-63.

[Or97] D. Orlov, On equivalences of derived categories and K3 surfaces. J. Math. Sci. (New York) 84 (1997), 1361-1381.

[Pe90] U. Persson, Configurations of Kodaira fibers on rational elliptic surfaces. Math. Z. 205 (1990), 1-47.

[Sz04] B. Szendrői, On an example of Aspinwall and Morrison. Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), 621–632.

[St04] P. Stellari, Some remarks about the FM-partners of K3 surfaces with Picard number 1 and 2. Geom. Dedicata 108 (2004), 1-13.

[TU11] T. Togashi, H. Uehara, Derived category of elliptic rulled surfaces, preprint.

[Ue04] H. Uehara, An example of Fourier-Mukai partners of minimal elliptic surfaces. Math. Res. Lett. 11 (2004), 371–375.

[Ue11] H. Uehara, A counterexample of the birational Torelli problem via Fourier–Mukai transforms, J. Algebraic Geom (2011).

Department of Mathematics and Information Sciences,
Tokyo Metropolitan University,
1-1 Minamiohsawa, Hachioji-shi, Tokyo, 192-0397, Japan
E-mail: hokuto@tmu.ac.jp