有限群の部分群族と一般バーンサイド環

－共同研究：山形大学 小田文仁 氏－

千葉大学（教育） 澤辺正人

0 はじめに

この原稿は平成２３年８月８日（月）に筆者が行った講演の再現である。前半では部分群族を用いたいくつかの知られている結果を紹介する。まず部分群族から得られる部分群複体の定義とそのホモトピー変形に関するもの。次に部分群族の連結性に関する話題。さらには部分群族の Lefschetz 不変量について述べる。この不変量は後半の一般 Burnside 環の話に繋がるものである。

そして部分群族を用いたこれらの結果に今回新たに一般 Burnside 環に関係する結果を付け加えることを試みる。話の内容としては一般 Burnside 環（GBR）の定義に続いて GBR に関連する我々の部分群族を導入する。次にその部分群族を用いた一つの結果を紹介する。最後にその結果の具体例を挙げる。なお本稿及びその他の結果に関する詳細は [OS09], [OS11] を参照されたい。

1 有限群の部分群族

以下 G を有限群とし $\mathrm{Sgp}(G)$ を G の部分群全体からなる集合とする。まず一般的なことであるが G の構造の解明に有効な情報の一つとして様々な部分群達の「交わり具合・重なり具合」が挙げられる。これは群に限った話ではなく何か代数系が与えられたとき、その sub-代数系達の交わり具合・重なり具合は元の代数系に対して有効な情報を与えていると考えられる。そこでこの状況を具体化する。即ち任意の部分群族 $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Sgp}(G)$ に対して $\mathcal{H}$ に属する部分群からなる包含列全体の集合を

$$\Delta(\mathcal{H}) := \{(H_0 < H_1 < \cdots < H_n) \mid H_i \in \mathcal{H},\ n \geq 0\}$$

と定める。言い換えると $\mathcal{H}$ を通常の包含関係 $\leq$ に関して半順序集合 $(\mathcal{H}, \leq)$ と見なしたとき $\Delta(\mathcal{H})$ はその全順序部分集合全体ということになる。そこで $\mathcal{H}$ 及び $\Delta(\mathcal{H})$ を研究対象とするのである。

1.1 部分群複体

次に部分群族 $\mathcal{H}$ から得られる部分群複体の定義を述べる。まず対 $(\mathcal{H}, \Delta(\mathcal{H}))$ は $\mathcal{H}$ を頂点集合及び $\Delta(\mathcal{H}) \subseteq 2^{\mathcal{H}}$ を単体集合とする有限抽象単体複体を与える。ここで「有限」は単体の個数が有限であることを表し、また「抽象単体複体」は次の二つの条件を満足することを表している。

(1) $\mathcal{H} \ni H \Longrightarrow (H) \in \Delta(\mathcal{H})$

(2) $\Delta(\mathcal{H}) \ni \sigma \supseteq \forall\tau \neq \emptyset \Longrightarrow \tau \in \Delta(\mathcal{H})$

即ち頂点一点からなる集合は単体を成し、また単体の空でない任意の部分集合もまた単体であるということである。以下この対を単に $\Delta(\mathcal{H}) := (\mathcal{H}, \Delta(\mathcal{H}))$ で表すことにする。このとき有限抽象単体複体 $\Delta(\mathcal{H})$ を G の**部分群複体**と呼ぶ。即ち部分群複体とは部分群族 $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Sgp}(G)$ を取るごとに定義される対象である。さらに単体複体の一般論から複体 $\Delta(\mathcal{H})$ に付随する幾何学的実現（位相空間）$|\Delta(\mathcal{H})| \hookrightarrow \mathbb{R}^{|\mathcal{H}|}$ を考えることが出来る。これにより部分群族の Homotopy-Property などを考察することが可能になる。以下、部分群族 $\mathcal{H}$, 複体 $\Delta(\mathcal{H})$, 空間 $|\Delta(\mathcal{H})|$ を同一視していく。

1.2 部分群複体とホモトピー同値性の例

ここでは部分群複体とホモトピー同値性の例として代表的なものを二つ挙げる。まず $\pi(G)$ は G の位数 $|G|$ を割り切る素数全体からなる集合とする。$p \in \pi(G)$ に対して次の部分群族を考える。

- $\mathcal{S}_p(G) :=$（非自明な p-部分群全体）
- $\mathcal{A}_p(G) :=$（非自明な基本可換 p-部分群全体）
- $\mathcal{B}_p(G) := \{U \in \mathcal{S}_p(G) \mid O_p(N_G(U)) = U\}$

それぞれを（部分群）複体と見なしたとき $\mathcal{S}_p(G)$ は **Brown 複体**、$\mathcal{A}_p(G)$ は **Quillen 複体**、$\mathcal{B}_p(G)$ は **Bouc 複体**と呼ばれる。特に $\mathcal{B}_p(G)$ に属する各部分群は **Radical p-部分群**と呼ばれる。このときホモトピー同値性の最も基本的なものとして次を挙げることが出来る。

命題 (Bouc, Quillen) 三つの複体は位相空間としてホモトピー同値である。

$$\mathcal{S}_p(G) \simeq \mathcal{A}_p(G) \simeq \mathcal{B}_p(G)$$

最初の同値性は Quillen [Qui78, Proposition 2.1] が、二つ目の同値性は Bouc [Bou84, Lemma 1.3] が示したものである。さらに Brown によるオイラー標数に関する次の合同式も良く知られている。

命題 (ホモロジカルな Sylow の定理; Corollary 2 in [Bro75])

$$\chi\Big(\Delta(\mathcal{S}_p(G))\Big) \equiv 1 \pmod{|G|_p}$$

ここでオイラー標数は各次元の単体の個数に関する交代和で定義されている。またこの結果は「Sylow p-部分群の個数は p を法として 1 と合同である」という有限群の Sylow の定理に形が似ていることからホモロジカルな Sylow の定理とも呼ばれている。さらにオイラー標数はホモトピー不変量であることから上記の三つの複体に対してこの合同式が成り立つことにも注意する。

もう一つ典型的なホモトピー同値性の例がある。まず次のような部分群族を考える。

- $\mathrm{Nl}(G) =$（非自明なベキ零部分群全体）
- $\mathrm{Ab}(G) =$（非自明な可換部分群全体）
- $\mathrm{PE}(G) =$（非自明な基本可換部分群の直積部分群全体）

命題 (Proposition 1.2 in [Luc95]) 三つの複体は位相空間としてホモトピー同値である。

$$\mathrm{Nl}(G) \simeq \mathrm{Ab}(G) \simeq \mathrm{PE}(G)$$

さらにホモロジカルな Sylow の定理の類似として次のオイラー標数に関する合同式がある。

命題 (Proposition 1.6 in [Luc95]) 次の合同式が成り立つ。

$$\chi\Big(\Delta(\mathrm{Nl}(G))\Big) \equiv 1 \pmod{|F(G)|}$$

即ちベキ零部分群から定義される複体のオイラー標数は Fitting 部分群 $F(G)$ の位数を法として 1 と合同であるというものである。先程と同様にこの合同式は上記の三つの複体に対して成立する。

以上が部分群複体のホモトピー変形に関する典型的な例である。この他にも散在型単純群に付随する幾何と部分群複体のホモトピー同値性などの重要な結果（e.g. [Saw02]）もあるがここでは省略する。

1.3 部分群族の連結性

部分群族 $\mathcal{H}$ 上の関係 $\sim_{\mathcal{H}}$ を次のように定義する。

定義 $\mathcal{H} \ni H, K$ に対して

$$H \sim_{\mathcal{H}} K \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} H = {}^{\exists}H_0, {}^{\exists}H_1, \ldots, {}^{\exists}H_n = K \ (H_i \in \mathcal{H}) \text{ s.t. } H_i \leq H_{i+1} \text{ or } H_i \geq H_{i+1}$$

つまり一貫した包含列とは限らず、含む又は含まれるの関係が続いていればよいのである。関係 $\sim_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ 上の同値関係を与える。最初にも述べた様に部分群の「交わり具合・重なり具合」を見ることに関しては非常に有効な同値関係であると思われる。また同値類がたった一つからなるときに $\mathcal{H}$ は連結であるという。このとき次のことが知られている。

命題 (Proposition 2.1 in [Luc95]) 次は同値である。

$$\mathrm{Nl}(G) = \text{連結} \Longleftrightarrow G \text{ の素数グラフ } \Gamma(G) \text{ が連結}$$

つまり非自明なベキ零部分群からなる族 $\mathrm{Nl}(G)$ の連結性は素数グラフ $\Gamma(G)$ の連結性と同値である。ここで $\Gamma(G)$ の頂点集合は $\pi(G)$ であり、また $p, q \in \pi(G)$ に対して位数 $p \times q$ の $x \in G$ が存在するときに p と q は辺で結ばれる。素数グラフは群の構造を解明する有効な手段であることが実証されている（e.g. [CIY00]）。また上記の命題自体はベキ零群が Sylow 部分群の直積に分解されることから直ちに導かれるものであるが、一方で将来的に $\{\mathcal{S}_p(G) \mid p \in \pi(G)\}$ を張り合わせて何か多様体のようなものを構成しようとしたときに $\Gamma(G)$ が有効利用出来ることを示唆しているようにも思われる。

1.4 部分群族の Lefschetz 不変量

本稿の主役の一つである Lefschetz 不変量を復習する。$\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Sgp}(G)$ は単なる部分群族ではなく G-共役の作用で閉じているものとする。即ち任意の $H \in \mathcal{H}$ と $g \in G$ に対して $g^{-1}Hg \in \mathcal{H}$ が成り立つものとする。このとき $\Delta(\mathcal{H})$ は G-複体となる。つまり G は頂点集合 $\mathcal{H}$ 上に作用し、また単体の集合である包含列の上にも作用する。$\Delta(\mathcal{H})_q$ は $\Delta(\mathcal{H})$ の q-次元単体全体からなる集合とする。$[\Delta(\mathcal{H})_q]$ は有限 G-集合のカテゴリー $\mathbf{Set}_f^G$ の中で有限 G-集合 $\Delta(\mathcal{H})_q$ を含む同型類とする。このとき $\Lambda_G(\Delta(\mathcal{H}))$ は次のような交代和で定義される。

$$\Lambda_G(\Delta(\mathcal{H})) := \sum_{q=0}^{\dim \Delta(\mathcal{H})} (-1)^q [\Delta(\mathcal{H})_q] \in \Omega(G)$$

$\Lambda_G(\Delta(\mathcal{H}))$ を G-複体 $\Delta(\mathcal{H})$ の **Lefschetz 不変量**（[The87, page 125]）という。これは $\mathbf{Set}_f^G$ から定義される Burnside 環 $\Omega(G)$（[The87, page 124]）の要素として定義される。即ち $\Omega(G)$ は同型類 $[X]$ $(X \in O(\mathbf{Set}_f^G))$ 全体から生成される自由アーベル群を部分群 $\langle [X \uplus Y] - [X] - [Y] \mid X, Y \in O(\mathbf{Set}_f^G) \rangle$ で割った剰余群であり、かつ代表元の間のデカルト積により $\Omega(G)$ 上の積が誘導された可換環である。

2 一般 Burnside 環

前節までで部分群族 $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Sgp}(G)$ を用いた結果や数学的対象をいくつか紹介してきたが、ここに新たに一般 Burnside 環に関係する結果を付け加えることを試みる。

$C(\mathcal{H}) := \{(H) := H^G \mid H \in \mathcal{H}\}$ を $\mathcal{H}$ に属する部分群に関する G-共役類の集合とする。さらに $\Omega(G,\mathcal{H}) := \{[G/H] \mid (H) \in C(\mathcal{H})\}$ を可移な有限 G-集合 G/H の同型類全体で生成される自由アーベル群とする。ただし H は部分群全体ではなく $\mathcal{H}$ の中のみを動くものとする。特に $\mathcal{H}$ として部分群全体 $\mathrm{Sgp}(G)$ をとれば $\Omega(G) = \Omega(G, \mathrm{Sgp}(G))$ が成り立つ。次に二つの群準同型を導入する。共役類 $(S) \in C(\mathcal{H})$ に対して

$$\varphi_{(S)} : \Omega(G,\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad [G/H] \mapsto \sharp(S\text{-fixed pts of } G/H)$$

と定める。$\varphi_{(S)}$ による像は代表元 S の取り方に依らない。さらに $(S) \in C(\mathcal{H})$ を全て動かしたものを φ とする。

$$\varphi : \Omega(G,\mathcal{H}) \longrightarrow \tilde{\Omega}(G,\mathcal{H}) := \prod_{(S)\in C(\mathcal{H})} \mathbb{Z}; \quad x \mapsto \Big(\varphi_{(S)}(x)\Big)_{(S)\in C(\mathcal{H})}$$

これらを用いて一般 Burnside 環を定義することが出来る。

2.1 一般 Burnside 環の定義（T. Yoshida 90）

これは [Yos90, Definition 3.12] の中で初めて定義されたものである。まず自由アーベル群 $\Omega(G,\mathcal{H})$ と単位元を持つ可換環 R に対して R-加群 $R \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(G,\mathcal{H})$ を考える。ここで次を仮定する。

(1) R-準同型 $1 \otimes \varphi : R \otimes \Omega(G,\mathcal{H}) \to R \otimes \tilde{\Omega}(G,\mathcal{H})$ は単射である。
(2) R-準同型 $1 \otimes \varphi$ の像 $\mathrm{Im}(1 \otimes \varphi) \subseteq R \otimes \tilde{\Omega}(G,\mathcal{H})$ は単位元を持つ部分環である。

このとき $x, y \in R \otimes \Omega(G,\mathcal{H})$ に対してその積 $x \bullet y$ を次のように定義する。

$$x \bullet y := (1 \otimes \varphi)^{-1}\Big(\ (1 \otimes \varphi)(x) \cdot (1 \otimes \varphi)(y)\ \Big)$$

まず x, y の像 $(1 \otimes \varphi)(x)$, $(1 \otimes \varphi)(y)$ を考えたときに像全体は部分環になっていることからその積 $(1 \otimes \varphi)(x) \cdot (1 \otimes \varphi)(y)$ も像になっている。それを単射 $1 \otimes \varphi$ で一意的に引き戻したものを $x \bullet y$ と定めるのである。積 $\bullet$ と共に $(R \otimes \Omega(G,\mathcal{H}), \bullet)$ は単位元を持つ可換環となる。これは族 $\mathcal{H}$ に関する R 上 G の**一般 Burnside 環**（GBR）と呼ばれる。

このときどんな部分群族 $\mathcal{H}$ が一般 Burnside 環を実現させるかという自然な問題が浮上して来る。これについては [Yos90] の中の結果を含め多数存在するが、我々もこの観点から考察する。

2.2 GBR に関連する部分群族と一つの結果

まず前半で出てきた非自明な p-部分群全体からなる $\mathcal{S}_p(G)$ は GBR $\Omega(G, \mathcal{S}_p(G))$ を実現する ([OS09, Example 1])。ここで係数環が何も付いていない場合は over $\mathbb{Z}$ で考えるものとする。一方 Radical p-部分群全体からなる $\mathcal{B}_p(G)$ は一般には GBR を誘導しない。反例としては $A_8 \cong GL(4,2)$ と $p = 2$ 等がある（[OS09, Section 3.1]）。ここで前半で見た様に $\mathcal{S}_p(G)$ と $\mathcal{B}_p(G)$ が互いにホモトピー同値であったことを思い出す。我々としては部分群複体のホモトピー不変量のようなものを GBR の中で見出すことを期待しているのであるが、少なくとも GBR の実現に関してはそう上手く行かないのである。

さて $\mathcal{B}_p(G)$ は GBR を誘導するとは限らないが、群に付随する幾何に対しては非常に重要な対象になっている（e.g. [Saw02]）。そこで $\mathcal{B}_p(G) := \{U \in \mathcal{S}_p(G) \mid O_p(N_G(U)) = U\}$ についてもう少し見ていくことにする。まず Radical p-部分群 $U \in \mathcal{B}_p(G)$ は unipotent radical の類似物と見なすことが出来る。即ち L を標数 p の体上で定義された Lie 型の群とするとその unipotent radical は

$O_p(N_L(U)) = U$ を満たす p-部分群 $U \leq L$ として特徴付けることが出来る。さらにその正規化群の族

$$\mathcal{N}_p(G) = \{N_G(U) \mid U \in \mathcal{B}_p(G)\}$$

を考える。$\mathcal{B}_p(G)$ が unipotent radical の類似物ならば $\mathcal{N}_p(G)$ はまさに parabolic 部分群の類似物である。また定義から直ちに $\mathcal{N}_p(G)$ に属する部分群 P は全て自己共役であることが分かる。即ち $N_G(P) = P$ が成り立つ。一方 GBR の一般論から任意の自己共役部分群族は常に GBR を誘導する ([OS09, Example 1])。よって $\Omega(G, \mathcal{N}_p(G))$ は GBR である。これらを踏まえて我々の部分群族を設定する。

■部分群族 $\mathfrak{X}$ の設定〈Unipotent radical の基本性質からの抽出〉： $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{B}_p(G)$ を G-共役の作用で閉じている部分群族とする。$P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ を一つ固定する。$\mathfrak{X}$ を包含関係に関して半順序集合と見なしたときその極小元全体を $\mathfrak{X}_{\min}$ で表す。このとき P に含まれる極小元全体を $\{U_1, \ldots, U_\ell\} := (\mathfrak{X}_{\min})_{\leq P}$ とする。ここで先程見たように $\mathcal{B}_p(G)$ は unipotent radical の類似物である。よって $\{U_1, \ldots, U_\ell\}$ は固定された Sylow p-部分群に含まれる極小な unipotent radical の類似物と見なすことが出来る。そこで以下 $\mathfrak{X}$ の条件を三つ設けるのであるが、それらは全て unipotent radical の基本性質から抽出してきたものである。

(W) U_i is weakly closed in P w.r.t. G
(P) $\emptyset \neq {}^\forall J \subseteq \{1, \ldots, \ell\} \Longrightarrow U_J := \langle U_j \mid j \in J\rangle \in \mathfrak{X}$
(H) $U_J = U_K \Longrightarrow J = K$

このとき GBR に関する結果として次が得られる。

定理 (Oda-S. [OS11]) G-共役の作用で閉じた部分群族 $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{B}_p(G)$ が (W), (P), (H) を満たすと仮定する。$I := \{1, \ldots, \ell\}$ とする。このとき次が成り立つ。

(1) $\mathfrak{X} \simeq_G \mathcal{N}_p(\mathfrak{X}) := \{N_G(U_F)^g \mid g \in G,\ \emptyset \neq F \subseteq I\}$; G-ホモトピー同値
(2) $\Omega(G, \mathcal{N}_p(\mathfrak{X})) = \mathrm{GBR}$
(3) $1_{\Omega(G, \mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))} = \Lambda_G\Big(\Delta(\mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))\Big)$; Lefschetz 不変量

条件 (P) より U_F ($\emptyset \neq F \subseteq I$) は $\mathfrak{X}$ の要素である。一方 $\mathfrak{X}$ の任意の要素が U_F の形をしているとは限らない。即ち $\mathcal{N}_p(\mathfrak{X})$ は“良い性質を持った”$\mathfrak{X}$ の要素 U_F に関する正規化群の族ということになる。また先程と同様に $\mathcal{N}_p(\mathfrak{X})$ は自己共役部分群からなる族でもある。よって GBR の一般論から $\mathcal{N}_p(\mathfrak{X})$ は GBR を誘導する。最後は GBR の単位元が G-複体の Lefschetz 不変量で与えられるというものである。これによって GBR と G-複体との間に関連性が見出せたことになる。また Lefschetz 不変量は G-ホモトピー不変量であることから $1_{\Omega(G, \mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))}$ は G-複体 $\Delta(\mathfrak{X})$ の Lefschetz 不変量でもある。

■証明の方針： 以下証明の方針を大雑把に述べる。まず一般論として G-共役で閉じており、かつ自己共役部分群からなる任意の族 $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Sgp}(G)$ は常に GBR $\Omega(G, \mathcal{H})$ を誘導する（[OS09, Example 1]）。つまりその単位元 $1_{\Omega(G,\mathcal{H})} \in \Omega(G, \mathcal{H})$ を考察することが可能である。このとき $1_{\Omega(G,\mathcal{H})}$ は次のように記述される（[OS11, Proposition 1], and compare [Yos90, Corollary4.4]）。

$$1_{\Omega(G,\mathcal{H})} = \sum_{(H) \in C(\mathcal{H})} \left(\sum_{D \in \mathcal{H}} \mu_{(\mathcal{H}, \leq)}(H, D) \right) [G/H]$$

ここで $\mu_{(\mathcal{H}, \leq)}$ は半順序集合 $(\mathcal{H}, \leq)$ 上で定義されるメビウス関数である。一方 G-複体 Δ の Lefschetz 不変量をもう一度見直してみる。まず定義は $\Lambda_G(\Delta) := \sum_{q=0}^{\dim \Delta} (-1)^q [\Delta_q]$ であった。Δ_q を軌道に分

解することによって可移な有限 G-集合の和 $[\Delta_q] = \sum_{\sigma\in\Delta_q/G}[G/G_\sigma]$ に分かれる。全体としては q を動かしてから q-単体の代表系を動かしていることから結局

$$\Lambda_G(\Delta) = \sum_{\sigma\in\Delta/G}(-1)^{\dim\sigma}[G/G_\sigma]$$

が成り立つ。そこで基本的にはこれら二つの交代和を比較していくことになる。

次に我々が設定した部分群族の振る舞いを少し見てみる。先程の記号に加えて $G_i := N_G(U_i)$ $(i \in I)$ 及び $G_J := \bigcap_{j\in J} G_j$ $(\emptyset \neq J \subseteq I)$ を導入する。G_J は“ parabolic-like ”を想定している。このとき例えば次のようなことが示される。

$$N_G(U_J) = G_J,\ \mathcal{N}_p(\mathfrak{X}) = \{(G_F)^g \mid g \in G,\ \emptyset \neq F \subseteq I\}$$
$$C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{X})) = \{(G_F) \mid \emptyset \neq F \subseteq I\} \cong 2^I \setminus \{\emptyset\},\ \text{etc. ...}$$

例えば parabolic-like G_J は unipotent-like U_J の正規化群として実現される。即ち我々の族 $\mathcal{N}_p(\mathfrak{X})$ は parabolic-like 全体ということになる。さらにその共役類 $C(\mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))$ は I の空でない部分集合に対応し、また半順序集合としては $2^I \setminus \{\emptyset\}$ と反同型になる。そしてこれらを含む様々な結果を用いて GBR の単位元を次のようにまとめることが出来る。

$$1_{\Omega(G,\mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))} = \sum_{\emptyset\neq K\subseteq I}(-1)^{|K|-1}[G/G_K]$$

これをさらに Lefschetz 不変量へと書き換えていく作業になる。

■定理から導かれる系： まず単位元 $1_{\Omega(G,\mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))} \in \Omega(G,\mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))$ は Burnside 環の要素であることから、とにかく有限 G-集合の $\mathbb{Z}$-係数の一次結合で書かれている。即ちここから G の一般指標 $\tilde{1}_{\Omega(G,\mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))}$ が誘導される。このときこの一般指標の次数 $\deg(\tilde{1}_{\Omega(G,\mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))})$ に関して次が成り立つ。

系 (Oda-S.)

$$\begin{aligned}\deg\Big(\tilde{1}_{\Omega(G,\mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))}\Big) &= \varphi_{1_G}\Big(1_{\Omega(G,\mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))}\Big) = \varphi_{1_G}\Big(\Lambda_G\big(\Delta(\mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))\big)\Big)\\ &= \varphi_{1_G}\left(\sum_{q=0}^{\dim\Delta}(-1)^q\big[\Delta(\mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))_q\big]\right) = \sum_{q=0}^{\dim}(-1)^q\sharp\Delta(\mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))_q\\ &= \chi\Big(\Delta(\mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))\Big) = \chi\Big(\Delta(\mathfrak{X})\Big)\end{aligned}$$

まず $\deg(\tilde{1}_{\Omega(G,\mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))})$ は置換表現の次数であることから G-集合を構成している要素の個数で表される。即ちあえて書けば単位群による固定点の個数 $\varphi_{1_G}(1_{\Omega(G,\mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))})$ と等しい。ここで定理から単位元は Lefschetz 不変量 $\Lambda_G(\Delta(\mathcal{N}_p(\mathfrak{X})))$ で与えられる。これを書き換えていけば最終的に複体 $\Delta(\mathfrak{X})$ のオイラー標数 $\chi(\Delta(\mathfrak{X}))$ となる。つまり「一般指標の次数はオイラー標数である」を得る。

■オイラー標数の記述： GBR とオイラー標数の関係は他にもある。まず定理における設定の元で我々の部分群族を $\mathcal{N} := N_p(\mathfrak{X})$ と置く。さらに行列 $X_{\mathcal{N}} := (\varphi_{(S)}([G/H]))_{(H),(S)\in C(\mathcal{N})}$ を考える。$\varphi_{(S)}$ は $\Omega(G,\mathcal{N})$ の各要素に対してその S-固定点の個数を対応させる群準同型であった。つまり $X_{\mathcal{N}}$ は $\Omega(G,\mathcal{N})$ の基底の要素 $[G/H]$ に対して $\varphi_{(S)}$ による像を成分とする行列である。言い換えれば GBR を定義する際に用いた群準同型 $\varphi : \Omega(G,\mathcal{N}) \to \prod_{(S)\in C(\mathcal{N})}\mathbb{Z}$ に対して基底の要素の像であるベクトルを並べて作った行列ということになる。これは族 $\mathcal{N}$ に関する G の **Table of Marks** と呼ばれている。さらに部分群 G_F $(\emptyset \neq F \subseteq I)$ の指数 $|G : G_F|$ を成分とする行列を $Y_{\mathcal{N}}$ とする。第一行目

に部分集合 $F_1 \subseteq I$ に対応する指数 $|G : G_{F_1}|$ を並べる、第二行目に部分集合 $F_2 \subseteq I$ に対応する指数 $|G : G_{F_2}|$ を並べるといった具合である。つまり行列 $Y_{\mathcal{N}}$ のサイズは $|2^I| - 1$ である。この場合 $X_{\mathcal{N}}$ と $Y_{\mathcal{N}}$ の行列サイズは等しくなる。このときオイラー標数の値は次で与えられる。

命題　(Oda-S.) 定理における設定と上記の記号の元で次が成り立つ。

$$\chi\Big(\Delta(\mathfrak{X})\Big) = \chi\Big(\Delta(\mathcal{N})\Big) = \mathrm{Trace}\Big(Y_{\mathcal{N}} \times X_{\mathcal{N}}^{-1}\Big)$$

ここで Table of Marks $X_{\mathcal{N}}$ はまさに GBR $\Omega(G, \mathcal{N})$ の積構造に関する情報そのものである。よってホモトピー不変量 $\chi(\Delta(\mathfrak{X}))$ が GBR を用いて表現されていることになる。

2.3　例

定理の条件を満足する部分群族 $\mathfrak{X}$ の例を見ていく。即ち条件 (W), (P), (H) を満足する部分群族 $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{B}_p(G)$ の例である。

■モデルケース：　G を $GF(p^e)$ 上で定義された Lie 型の群とする。このとき $\mathfrak{X} := \mathcal{B}_p(G)$ は我々の条件を満足する。逆にこれが満足するような条件を設定したのである。また前に述べたように $\mathcal{B}_p(G)$ は G の unipotent radical 全体を与える。よってその正規化群の族である $\mathcal{N}_p(\mathfrak{X})$ は parabolic 部分群全体を与える。このとき定理の系から一般指標の次数は $\Delta(\mathfrak{X})$ のオイラー標数になる。

$$\deg\Big(\tilde{1}_{\Omega(G, \mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))}\Big) = \chi\Big(\Delta(\mathfrak{X})\Big) = \chi\Big(\Delta(\mathcal{B}_p(G))\Big)$$

さらに前半で述べたように $\mathcal{B}_p(G)$ と $\mathcal{S}_p(G)$ はホモトピー同値である。よって $\deg(\tilde{1}_{\Omega(G, \mathcal{N}_p(\mathfrak{X}))})$ は非自明な p-部分群全体からなる複体のオイラー標数となる。

■24 次 Mathieu 群 $G = M_{24}$, $p = 2$：　この場合も $\mathfrak{X}$ として $\mathcal{B}_2(G)$ 全体を取ることが出来る。これまでの流れから $\mathcal{N}_2(\mathfrak{X})$ は parabolic-like 部分群ということになる。同様に一般指標の次数は $\Delta(\mathcal{B}_2(G))$ のオイラー標数と等しくなる。

$$\deg\Big(\tilde{1}_{\Omega(G, \mathcal{N}_2(\mathfrak{X}))}\Big) = \chi\Big(\Delta(\mathcal{B}_2(G))\Big) = (2^{10} \cdot 3 \cdot 7) + 1 \equiv 1 \pmod{|M_{24}|_2 = 2^{10}}$$

ここで $\Delta(\mathcal{B}_2(G))$ のオイラー標数は上記のように具体的に計算されている（[Yos98, page 246]）。この値は前半で見たホモロジカルな Sylow の定理が示す通り M_{24} の位数の 2-part を法として 1 と合同であることが見て取れる。

■第一 Conway 群 $G = Co_1$, $p = 2$：　このとき $\mathfrak{X}$ として $\mathcal{B}_2(G)$ 全体を取ると例の条件を満足しないことが分かる。そこで $\mathcal{B}_2(G)$ を次のように制限する。

$$\mathfrak{X} := \mathcal{B}_2(G) \cap \{U \in \mathcal{S}_2(G) \mid Z(U) \in \mathrm{Syl}_2(C_G(U))\}$$

この新たな条件はどこから来ているかというと、これも Lie 型の unipotent radical の性質を一般的に抜き出して来たものである。つまり unipotent radical の類似物としてはむしろその精度が上がっているのである。よって $\mathcal{N}_2(\mathfrak{X})$ は精度の上がった parabolic-like ということになる。同様に一般指標の次数は $\Delta(\mathfrak{X})$ のオイラー標数と等しくなる。

$$\deg\Big(\tilde{1}_{\Omega(G, \mathcal{N}_2(\mathfrak{X}))}\Big) = \chi(\Delta(\mathfrak{X})) = (-2^{18} \cdot 23^2 \cdot 751) + 1 \not\equiv 1 \pmod{|Co_1|_2 = 2^{21}}$$

さらにこのオイラー標数も上記のように具体的に計算されている（[Saw05, page 89]）。ところがこの $\mathfrak{X}$ はもはや $\mathcal{B}_2(G)$ や $\mathcal{S}_2(G)$ とホモトピー同値ではないので Brown のホモロジカルな Sylow の定理からは外れてくる。

■**モンスター** $G=\mathbb{M}$, $p=2$**：**　この場合も $\mathfrak{X}$ として $\mathcal{B}_2(G)$ 全体を取ると例の条件を満足しないことが分かる。そこで Conway 群と同じように $\mathcal{B}_2(G)$ を $\mathfrak{X} := \mathcal{B}_2(G) \cap \{U \in \mathcal{S}_2(G) \mid Z(U) \in \mathrm{Syl}_2(C_G(U))\}$ と制限する。同様に $\mathcal{N}_2(\mathfrak{X})$ は parabolic-like である。一般指標の次数は $\Delta(\mathfrak{X})$ のオイラー標数と等しく、その値も具体的に計算されている（[Saw06, page 139]）。

$$\deg\Big(\tilde{1}_{\Omega(G,\mathcal{N}_2(\mathfrak{X}))}\Big) = \chi(\Delta(\mathfrak{X})) = (2^{42}\cdot\alpha)+1 \not\equiv 1 \pmod{|\mathbb{M}|_2 = 2^{46}}$$

即ち奇数パートの α も具体的に分かっている。この場合も Brown のホモロジカルな Sylow の定理からは外れてくる。しかしながら Conway 群とモンスターについては上記の合同式を表現論的に解釈する方法が知られている（[Saw06, Proposition 7]）。

参考文献

[Bou84] S. Bouc, Homologie de certains ensembles ordonnes, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I* **299** (1984), 49–52.

[Bro75] K.S. Brown, Euler characteristics of groups: the p-fractional part, *Invent. Math* **29** (1975), 1–5.

[CIY00] N. Chigira, N. Iiyori, and H. Yamaki, Non-abelian Sylow subgroups of finite groups of even order, *Invent. Math.* **139** (2000), 525–539

[Luc95] M.S. Lucido, On the partially ordered set of nilpotent subgroups of a finite group, *Comm. Algebra* **23** (1995), 1825–1836.

[OS09] F. Oda and M. Sawabe, A collection of subgroups for the generalized Burnside rings, *Adv. Math.* **222** (2009), 307–317.

[OS11] F. Oda and M. Sawabe, The generalized Burnside rings with respect to a collection of self-normalizing subgroups, *J. Algebra* **334** (2011), 219–231.

[Qui78] D. Quillen, Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group, *Adv. Math.* **28** (1978), 101–128.

[Saw02] M. Sawabe, The centric p-radical complex and a related p-local geometry, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **133** (2002), 383–398.

[Saw05] M. Sawabe, On the reduced Lefschetz module and the centric p-radical subgroups, *Tokyo J. Math.* **28** (2005), 79–90.

[Saw06] M. Sawabe, On the reduced Lefschetz module and the centric p-radical subgroups II, *J. London Math. Soc.(2)* **73** (2006), 126–140.

[The87] J. Thévenaz, Permutation representations arising from simplicial complexes, *J. Combin. Theory Ser. A* **46** (1987), 121–155.

[Yos98] S. Yoshiara, The Borel-Tits property for finite groups, *in* "Groups and Geometries" (L. di Martino et al., Eds.,) *Trends Math.* (1998), 237–249.

[Yos90] T. Yoshida, The generalized Burnside ring of a finite group, *Hokkaido Math. J.* **19** (1990), 509–574.