整環の表現と傾加群

西田　憲司（信州大学理学部）

1. 定義と記号

始めに，考察の対象-整環とその表現-を定める。

R :（可換）complete local Gorenstein ring of $\dim R = d$
$\mathrm{mod}R$: the category of all finite R-modules
$\mathrm{CM}R$: $\mathrm{mod}R$ の a full subcategory s.t.
$M \in \mathrm{CM}R \Leftrightarrow M$ is a Cohen-Macaulay R-module of $\dim_R M = d$
R 多元環 Λ が $R-$order(整環) とは，$\Lambda \in \mathrm{CM}R$, なることとする。従ってこのとき Λ は module-finite R-algebra かつ Cohen-Macaulay R-module of $\dim_R \Lambda = d$ を充たす。
$\mathrm{CM}(\Lambda) := \mathrm{CM}R \cap \mathrm{mod}\Lambda$; $M \in \mathrm{CM}\Lambda$ を $\mathrm{CM}\Lambda$-module といいこれが我々の主な研究対象（整環とその表現）である。
$(-)^* := \mathrm{Hom}_\Lambda(-, \Lambda) : \mathrm{mod}\Lambda \rightleftarrows \mathrm{mod}\Lambda^{\mathrm{op}}$ は圏 $\mathrm{pr}\Lambda$ と $\mathrm{pr}\Lambda^{\mathrm{op}}$ の間の duality を与える，ただし，$\mathrm{pr}\Lambda$ は有限生成射影 Λ 加群のなす圏である。

1.1. 例　$d = 0$ のとき：Λ は R 上のアルティン多元環，$\mathrm{CM}\Lambda = \mathrm{mod}\Lambda$ であり広く研究されている。$d = 1$, R は完備離散付値環のとき，R の商体 K について $K\Lambda$ が半単純多元環とする（classical order) と，$\mathrm{CM}\Lambda$-module とは，R 上自由な有限生成 Λ 加群のことである。この場合もよく研究されている。

以下 $d > 0$ とする。

2. Tilting modules and mutation.
本講演で取り上げる tilting module と mutation の定義を与える。

2.1. 定義　右 Λ 加群 T が tilting 加群とは以下の (i),(ii),(iii) を充たすこと：

(i) $\mathrm{pd}T \leq 1$, ただし，$\mathrm{pd}T$ は T の射影次元を表す。

(ii) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T, T) = 0$,

(iii) 右 Λ 加群の完全列，$0 \to \Lambda \to T_0 \to T_1 \to 0$ で，$T_0, T_1 \in \mathrm{add}T := \{X : X \oplus Y \cong T^m$ for some $Y, m\}$ を充たすものがある.

$T \in \mathrm{CM}\Lambda$ のとき T を tilting CM 加群という。T の直既約分解を $T = \oplus T_i$ とする。このとき，T が basic とは $T_i \ncong T_j$ $(i \neq j)$ となるとき。
以下 T は basic, また Λ も basic ring とする。

2.2. 定義　$M, N \in \mathrm{mod}\Lambda$ とする。
a map $\varphi : M \to N$ が *right minimal* とは $\psi : M \to M$ s.t. $\varphi\psi = \varphi$ ならば ψ は同型となること。双対的に *left minimal* を定める。

$\mathcal{C}$ を Λ 加群のクラスとする。$\rho : M \to N$ が *right* $\mathcal{C}$*-approximation* of N とは $M \in \mathcal{C}$ かつ induced map $\mathrm{Hom}_\Lambda(C, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,\rho)} \mathrm{Hom}_\Lambda(C, N)$ は全ての $C \in \mathcal{C}$ に対し全射なるとき。$\rho : M \to N$ が right minimal かつ right $\mathcal{C}$-approximation となるとき ρ を right minimal $\mathcal{C}$-approximation という。left minimal $\mathcal{C}$-approximation を双対的に定める。

2.3. 定義 直既約 Λ 加群 X について，$X \oplus T$ は basic tilting Λ-module，とする。$\mathrm{mod}\Lambda$ の完全列

$$X \xrightarrow{\rho} T' \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

s.t. ρ は left minimal $(\mathrm{add}T)$-approximation of X とする。
ρ が単射かつ $\mathrm{pd}_\Lambda Z \leq 1$ のとき $Z \oplus T$ を $X \oplus T$ の left mutation という。left mutation が存在すれば $Z \oplus T$ は tilting Λ 加群である (Riedtmann-Schofield [RS]).

3. 巾等元に付随した mutation.

(Okuyama, Rickard, Hoshino-Kato 等 による [O], [HK]. [AI, 2.7] も参照。)

Λ の (Jacobson) 根基を J とする。Λ 加群 X に対し $\mathrm{top}X = X/JX$ とおく。$\mathrm{top}X$ は完全可約加群（半単純加群ともいう）である。
原始巾等元 $e \in \Lambda$ をとり固定する。単純 Λ 加群 $S := \Lambda e/Je$ とおく。Λ の中の左イデアル $M := \Lambda(1-e)\Lambda e$ に対し，$U = \Lambda e/M$ とおく。このとき次が容易に示される。

(3.1) $\mathrm{add}(\mathrm{top}M) \subset \mathrm{add}(\mathrm{top}\Lambda(1-e))$, i.e., $\mathrm{top}M$ に S は現れない.

(3.2) M は，$\Lambda e/N$ の任意の単純 subfactor が S に同型になっているような左イデアル $N \subset \Lambda e$ の中で極小である.

M の projective cover を $p : P(M) \to M$ とする。写像 p と包含写像の合成を $f : P(M) \xrightarrow{p} M \subset \Lambda e$ とする。$(-)^*$ を f に施して，$\rho = f^* : e\Lambda \to P(M)^*$ とおく。

(3.3) ρ は left minimal (add(1-e)Λ)-approximation of $e\Lambda$.

Proof. $\rho = f^*$ であるから，f が right mnimal (addΛ(1-e))-approximation of Λe を示せばよい。right minimal であることは容易に示されるので省略する。考える圏は addΛ(1-e) であるから，$C = \Lambda(1-e)$ についてのみ Hom(1,f) の全射性を示せばよい。次の可換図式を考える：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda(1-e), P(M)) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,f)} & \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda(1-e), \Lambda e) \\ \cong\downarrow & & \cong\downarrow \\ (1-e)\Lambda \otimes_\Lambda P(M) & \xrightarrow{\varphi} & (1-e)\Lambda \otimes_\Lambda \Lambda e \end{array}$$

ただし，上下の項の同型は次の (3.4) による。

(3.4) $Q \in \mathrm{pr}\Lambda^{\mathrm{op}}, X \in \mathrm{mod}\Lambda$ ならば $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q^*, X) \cong Q \otimes_\Lambda X$

$\varphi = 1 \otimes f$ より完全列

$$(1-e)\Lambda \otimes_\Lambda P(M) \xrightarrow{\varphi} (1-e)\Lambda \otimes_\Lambda \Lambda e \longrightarrow (1-e)\Lambda \otimes_\Lambda U \to 0$$

が得られる。$(1-e)\Lambda \otimes_\Lambda U = 0$ であるから $\mathrm{Hom}(1,f)$ は全射である。

3.1. 導来圏 $K^b(\mathrm{pr}\Lambda)$ の複体 $e\Lambda \xrightarrow{\rho} P(M)^* \oplus (1-e)\Lambda$，ただし $P(M)^* \oplus (1-e)\Lambda$ を 0 次の項とする，は [AI] の left silting mutation $\mu^+_{e\Lambda}$ に同型である。一般には ρ は単射と限らず，$\mathrm{Coker}\rho$ は CMΛ 加群と限らない。以下，そうなる条件を与える。

4. tilting CMΛ-module.

4.1. Tr_L の定義
$M \in \mathrm{mod}\Lambda$, $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to M \to 0$, M の極小射影分解とする。$(-)^*$ を施して，完全列

$$0 \to M^* \to P_0^* \to P_1^* \to \mathrm{Tr}M \to 0$$

を得る。$\mathrm{Tr}M := \mathrm{Coker}f^*$ である。$\mathrm{Tr}M \in \mathrm{CM}\Lambda$ とは限らないので，d 番目の syzygy をとると，$\mathrm{depth}_R \Omega^d \mathrm{Tr}M = d$ となり，$\mathrm{Tr}_L M := \Omega^d \mathrm{Tr}M$ は CMΛ 加群になる。

4.2. 原始巾等元 e，単純加群 $S = \Lambda e/Je$, $M = \Lambda(1-e)\Lambda e$, $U = \Lambda e/M$ は §3 と同じとする。$L \in \mathrm{mod}\Lambda$ のとき，[GN, §3] より

$$\mathrm{depth}_R L = \inf\{i \in \mathbb{Z} : \mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda/J, L) \neq 0\}$$

である。$\mathrm{depth}_R \Lambda = d$ より

(4.0) $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda/J, \Lambda) = 0 \quad (0 \leq i < d)$

以下次の条件 1 を仮定する。

条件 1 U は長さ有限の Λ 加群

(4.0) と条件 1 より，$U^* = 0$ である。従って，

(4.1) ρ は単射である。

$\because$) 完全列 $P(M) \xrightarrow{f} \Lambda e \to U \to 0$ より完全列 $0 \to U^* \to e\Lambda \xrightarrow{\rho} P(M)^*$ が得られる。

(4.1) より Λ 加群の完全列
(4.2) $0 \to e\Lambda \xrightarrow{\rho} P(M)^* \longrightarrow C \to 0$

を得る。ただし，$C := \mathrm{Coker}\rho$. このとき

(4.3) $T := C \oplus (1-e)\Lambda$ は tilting Λ-module で $\Lambda = e\Lambda \oplus (1-e)\Lambda$ の left mutation である。

proof. (i) (4.2) より $\mathrm{pd}_\Lambda C \leq 1$. $\therefore \mathrm{pd}_\Lambda T \leq 1$.
(ii) (4.2) に $\mathrm{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(-, L), L \in \mathrm{mod}\Lambda$, を施して (3.4) により次の行完全な可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(P(M)^*, L) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\rho,1)} & \mathrm{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(e\Lambda, L) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, L) & \longrightarrow & 0 \\
\cong\downarrow & & \cong\downarrow & & & & \\
L \otimes_\Lambda P(M) & \longrightarrow & L \otimes_\Lambda \Lambda e & \longrightarrow & L \otimes_\Lambda U & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$L=(1-e)\Lambda$ とすると $(1-e)\Lambda\otimes_\Lambda U=0$ より $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,(1-e)\Lambda)=0$
$L=C$ とすると $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,C)\cong C\otimes_\Lambda U$. (4.2) から $P(M)^*\otimes_\Lambda U\to C\otimes_\Lambda U\to 0$ (exact). (3.4);(3.1),(3.2) より $P(M)^*\otimes_\Lambda U\cong \mathrm{Hom}_\Lambda(P(M),U)=0$ であるから，$C\otimes_\Lambda U=0$。従って $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C,C)=0$。以上より $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,T)=0$

(iii) (4.2) より完全列

$$0\to e\Lambda\oplus(1-e)\Lambda\xrightarrow{(\rho,\mathrm{id})}P(M)^*\oplus(1-e)\Lambda\longrightarrow C\to 0$$

があり $P(M)^*$, $(1-e)\Lambda$, $C\in\mathrm{add}T$ である。従って (iii) も示された。よって，T は tilting module で, (3.3) より $\Lambda=e\Lambda\oplus(1-e)\Lambda$ の left mutation である。

この tilting module T が CMΛ-module になる十分条件を考える。以下次の条件 2 を仮定する。

条件 2 $\mathrm{Ext}^d_\Lambda(S,\Lambda)=0$

$P^\bullet\to U$ を U の極小射影分解とする。(4.0) および条件 1 より $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(U,\Lambda)=0(0\le i<d)$. よって次の完全列がある：

$$(4.4)\quad 0\to e\Lambda\xrightarrow{\rho}P(M)^*\to P_2^*\to\cdots\to P_{d-1}^*\to(\Omega^dU)^*\to\mathrm{Ext}^d_\Lambda(U,\Lambda)\to 0$$

完全列 $P_{d+1}\to P_d\to\Omega^dU\to 0$ より次の完全列を得る：

$$(4.5)\quad 0\to(\Omega^dU)^*\to P_d^*\to P_{d+1}^*\to\mathrm{Tr}\Omega^dU\to 0$$

条件 2 より $\mathrm{Ext}^d_\Lambda(U,\Lambda)=0$ である。従って，(4.4) と (4.5) から，次の完全列を得る：

$$0\to e\Lambda\xrightarrow{\rho}P(M)^*\to P_2^*\to\cdots\to P_{d+1}^*\to\mathrm{Tr}\Omega^dU\to 0$$

よって，$C=\mathrm{Coker}\rho=\Omega^d\mathrm{Tr}\Omega^dU=\mathrm{Tr}_L\Omega^dU$ は CMΛ 加群である。即ち，T は tilting CMΛ 加群である。

5. 条件 1,2 について

5.1 条件 1

1) $d=0$ のときは，ケースバイケースである。
$d=1$ で classical order のときは成り立つ。
2) 次が知られている：
$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(S,S)=0\Leftrightarrow Je=\Lambda(1-e)\Lambda e(=M)$
このときは $U=S$ が成り立つ。

5.2 条件 2

Λ を Gorenstein order とする，即ち，Λ の自己入射次元は d とする。このとき，任意の単純 Λ 加群 S について，$\mathrm{Ext}^d_\Lambda(S,\Lambda)\neq 0$，従って条件 2 を充たす単純加群はない。

Λ を Iwanaga-Gorenstein とする，即ち，Λ の自己入射次元は有限。これを n とおく。このとき，$n \geq d$ であるが $n > d$ とする。このとき Λ の極小入射分解の d 番目の項と n 番目の項 $E^n({}_\Lambda\Lambda)$ は共通の直和因子を持たない（Iwanaga-Sato, cf. [GN, Theorem 3.7]）。よって単純加群 S が $S \subset E^n({}_\Lambda\Lambda)$ ならば $\mathrm{Ext}^d_\Lambda(S, \Lambda) = 0$。従って Λ の自己入射次元 $n > d$ ならば Λ の自己入射分解の最終項に含まれる単純加群は条件 2 を充たす。

文献

[AI] Aihara, T. and Iyama, O., *Silting mutation in triangulated categories*, preprint, 2011.

[GN] Goto, S. and Nishida, K., *Towards a theory of Bass numbers with application to Gorenstein algebras*, Colloq. Math. 91(2002), 191-253.

[HK] Hoshino, M. and Kato, Y., *Tilting complexes defined by idempotents*, Comm. in Algebra, 30(1), (2002) 83-100.

[O] Okuyama, T., *Some examples of derived equivalent blocks of finite groups*, preprint (1998).

[RS] Riedtmann, C. and Schofield, A., *On a simplicial complex associated with tilting modules*, Comment. Math. Helv. 66 no.1 (1991) 70-78.