単体的セル複体の面の数え上げの話

村井　聡（山口大学）

序文

凸多面体や単体的複体の面の数え上げ論は組合せ論における重要な研究分野の一つである．本稿では, 単体的セル複体と呼ばれる特殊なセル複体の面の数え上げ論と可換代数との関連について紹介する．

1. 単体的半順序集合と単体的セル複体

(数学的厳密性には欠けるが) 大雑把に言うと, 単体的セル複体とは各セルが単体となっているセル複体のことである．単体的セル複体を考える事と, 単体的半順序集合と呼ばれる半順序集合を考える事は同値である事が知られており, 本稿では主として単体的半順序集合を扱う．

有限な半順序集合 (poset) P が**単体的** *(simplicial)* であるとは, 以下の２条件を満たす時にいう:

(i) P が極小元 $\hat{0}$ を持つ．

(ii) 任意の元 $\sigma \in P$ に対し, 区間 $[\hat{0}, \sigma] = \{\tau \in P : \hat{0} \leq \tau \leq \sigma\}$ が Boolean 代数となる．

但し, Boolean 代数とは, 有限集合の冪集合に包含関係で順序を定めることで得られる半順序集合である (図１を参照)．例えば, 下記のハッセ図において, 図２は単体的半順序集合だが, 図３は単体的半順序集合ではない．

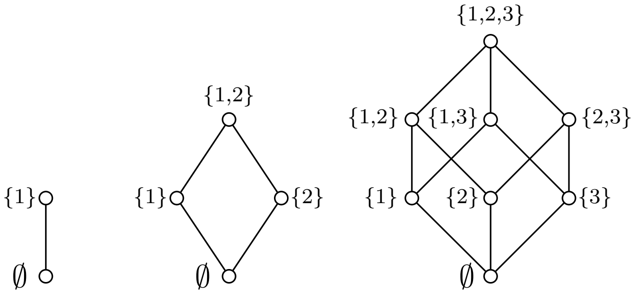


図１．Boolean 代数

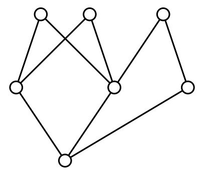


図２

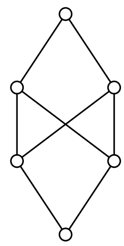


図３

一般に, 有限半順序集合 P に対し, P の**順序複体** *(order complex)* と呼ばれる単体的複体が以下のように定義される

$$\mathcal{O}(P) = \{\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\} \subset P : \sigma_1 < \cdots < \sigma_k\}.$$

このとき順序複体 $\mathcal{O}(P)$ の幾何学的実現 $|\mathcal{O}(P)|$ を考える事で半順序集合 P から幾何的な対象を作る事ができるが, 単体的半順序集合の場合には P から直接的に位相空間を定める事ができる．Björner [Bj] による正則 CW-複体の face poset の組合せ論的な特徴付けから, 任意の単体的半順序集合 P に対し, ある CW-複体 $\Gamma(P)$ で P は $\Gamma(P)$ の face poset となり, かつ $\Gamma(P)$ が $|\mathcal{O}(P - \{\hat{0}\})|$ と同相となるものが存在す

ることがわかる．つまり, 単体的半順序集合はある自然な CW-複体の face poset になっており, このようにして作られる CW-複体 $\Gamma(P)$ を**単体的セル複体** *(simplicial cell complex)* と呼ぶ.

注 1.1. （有限な）単体的複体はその face poset を考える事により自然に単体的半順序集合とみなす事ができる．この場合 $\Gamma(P)$ は単体的複体自身に一致し, $|\mathcal{O}(P-\{\hat{0}\})|$ はその重心細分となる.

次に単体的半順序集合の f-列と h-列を定義する．P を単体的半順序集合とする時, $[\hat{0},\sigma]$ がランク i の Boolean 代数となるような元 $\sigma \in P$ を P のランク i の元と呼び, $\operatorname{rank}\sigma = i$ と書く．また P のランクを $\operatorname{rank} P = \max\{\operatorname{rank}\sigma : \sigma \in P\}$ で定義する．$d = \operatorname{rank} P$ とし, 各 $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し,

$$f_{i-1} = f_{i-1}(P) = \#\{x \in P : \operatorname{rank} x = i\}$$

とおく, 但し $\#$ は要素の個数を表すとする．この時，ベクトル

$$f(P) = (f_{-1}, f_0, \ldots, f_{d-1}) \in \mathbb{N}^{d+1}$$

を P の f-**列** *(f-vector)* と呼ぶ．また, P の h-**列** *(h-vector)* $h(P) = (h_0, h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ を以下の (t についての一変数多項式としての) 等式を満たすベクトルとして定義する

$$\sum_{i=0}^{d} f_{d-1-i}(t-1)^i = \sum_{i=0}^{d} h_{d-i}t^i.$$

例えば図 2 の単体的半順序集合の f-列は $f(P) = (1,3,3)$, h-列は $h(P) = (1,1,1)$ である．尚, f-列を知ることと h-列を知ることは同値である．実際, 上の関係式より f-列から h-列を求める事ができるが, t に $t+1$ を代入してやれば h-列から f-列を求める事もできることが見て取れる.

2. 単体的半順序集合の FACE RING

1991 年 Stanley [St1] は単体的半順序集合 P の face ring と呼ばれる次数環を定義し, face ring の代数的性質から単体的半順序集合の f-列や h-列を調べる手法を導入した．ここでは単体的半順序集合の face ring について簡単に解説する.

P を単体的半順序集合とする．二つの元 $\sigma, \tau \in P$ に対し, 元 $\rho \in P$ が σ と τ の**上界** (**下界**) であるとは P 上で $\rho \geq \sigma$ かつ $\rho \geq \tau$ ($\rho \leq \sigma$ かつ $\rho \leq \tau$) であるときにいう. 二つの元 $\sigma, \tau \in P$ に対し $\Omega_P(\sigma,\tau)$ で σ と τ の極小な上界全体の集合を表すことにする．単体的半順序集合の定義から次の事実が直ちに従う.

補題 2.1. P を単体的半順序集合とし, $\sigma, \tau \in P$ とする．$\Omega_P(\sigma,\tau) \neq \emptyset$ なら σ と τ の最大の下界が存在する (これを $\sigma \wedge \tau$ と書く).

さて, 今 P を単体的半順序集合とし体 K 上の多項式環 $R = K[x_\sigma : \sigma \in P - \{\hat{0}\}]$ を考える, 但し R の次数付けは $\deg x_\sigma = \operatorname{rank}\sigma$ で与える．P の元 $\sigma, \tau \in P$ に対し多項式 $f^P_{\sigma,\tau}$ を

$$f^P_{\sigma,\tau} = \begin{cases} x_\sigma x_\tau, & \Omega_P(\sigma,\tau) = \emptyset \text{ のとき}, \\ x_\sigma x_\tau - x_{\sigma\wedge\tau}\sum_{\rho\in\Omega_P(\sigma,\tau)} x_\rho, & \Omega_P(\sigma,\tau) \neq \emptyset \text{ のとき}, \end{cases}$$

で定義する, 但し $x_{\hat{0}} = 1$ とする.

定義 2.2. 単体的半順序集合 P に対し, イデアル $I_P \subset R$ を

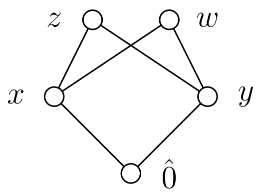
$$I_P = (f^P_{\sigma,\tau} : \sigma \text{ と } \tau \text{ は } P \text{ 上比較不可能})$$

で定義する. このとき環 $K[P] = R/I_P$ を P の *face ring* と呼ぶ.

例 2.3. 右の図のような単体的半順序集合を考えると, その face ring は

$$K[x, y, z, w]/(xy - z - w, zw)$$

となる.



以下に face ring の簡単な性質をまとめておく (詳しくは [St1, Du, MMP] を参照).

(a) $K[P]$ は次数環である. さらに $S = K[x_v : \operatorname{rank} v = 1]$ とおくと, $K[P]$ は有限生成次数付 S-加群となる.

(b) P の f-列を $(f_{-1}, f_0, \ldots, f_{d-1})$, h-列を $(h_0, h_1, \ldots, h_d)$ とおくとき, $K[P]$ のヒルベルト級数 $H(K[P], t) = \sum_{n\geq 0}(\dim_K K[P]_n)t^n$ (但し $K[P]_n$ は $K[P]$ の次数 n の斉次成分とする) は次で与えられる

$$H(K[P], t) = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}\frac{t^i}{(1-t)^i} = \frac{h_0 + h_1 t + \cdots + h_d t^d}{(1-t)^d}.$$

(c) P が単体的複体 Δ の face poset であるとき $K[P]$ は Δ のスタンレー・ライスナー環に同型. (スタンレー・ライスナー環については [St2] を参照.)

3. f-列, h-列の分類問題

f-列に関する重要な問題の一つに f-列の分類問題がある. これは次のような問題である.

問題 3.1. ある (良い性質を持つ) 単体的半順序集合の族 $\mathcal{C}$ が与えられた時, $\mathcal{C}$ に属する単体的半順序集合の f-列を分類せよ.

この章では上の問題に関する重要な結果を二つ紹介する. 一つはコーエン・マコーレー単体的半順序集合と呼ばれる代数的に定義される単体的半順序集合の族について, もう一つは幾何学的実現が球面と同相となる単体的半順序集合の族についての結果を紹介する.

$A = K[x_1, \ldots, x_n]$ を体 K 上の多項式環とし, $\deg x_i > 0$ となる次数付けを与える. $I \subset A$ を次数付イデアルとし $R = S/I$ とおく. 整数 i に対し R_i で R の次数 i の斉次成分を表すとする. R の次元が d である時, 正の次数を持つ斉次元の列 $\theta_1, \ldots, \theta_d \in A$ があり $\dim_K R/(\theta_1, \ldots, \theta_d)R < \infty$ となることが知られている. このような斉次元の列 $\theta_1, \ldots, \theta_d$ を R の (斉次な) **巴系** *(homogeneous system of parameter)* という. 特に全ての i に対し $\deg \theta_i = 1$ となるような巴系を**線形な巴系** *(linear system of parameters)* と呼ぶ.

定義 3.2. 環 $R = S/I$ が**コーエン・マコーレー** *(Cohen-Macaulay)* であるとは任意の R の巴系 $\theta_1, \ldots, \theta_d$ に対し各 θ_i が $R/(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1})R$ の非零因子となる時にいう. また, 環 $K[P]$ がコーエン・マコーレー環となる時, 単体的半順序集合 P はコーエン・マコーレーであるという.

face ring の性質 (a) より, K が無限体であるなら, $K[P]$ は線形な巴系を持つ. Stanley による次の定理は可換代数と面の数え上げ論を結ぶ重要な結果である.

定理 3.3. (Stanley) K を無限体とする. P をランク d のコーエン・マコーレー単体的半順序集合とし, $\theta_1, \ldots, \theta_d$ を $K[P]$ の線形な巴系とする. このとき各 $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し次が成り立つ

$$\dim_K (K[P]/(\theta_1, \ldots, \theta_d)K[P])_i = h_i(P).$$

注 3.4. コーエン・マコーレー性の定義は抽象的でわかりづらいが, もっと組合せ論的 (もしくは位相的) に定義をすることもできる. 特にコーエン・マコーレー性は位相的な性質であることが知られている (つまり $\Gamma(P)$ の位相にのみ依存する). 詳しくは [Du, MMP] を見よ.

上記の定理 3.3 からコーエン・マコーレー単体的半順序集合の h-列は非負であることがわかる. Stanley はこの条件が本質的にコーエン・マコーレー単体的半順序集合の h-列の分類を与えることを証明している.

定理 3.5 (Stanley [St1])**.** ベクトル $h = (h_0, h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ があるランク d の単体的半順序集合の h-列となることと $h_0 = 1$ かつ全ての i に対し $h_i \geq 0$ となることは同値.

次に幾何学的実現が球面と同相となる単体的半順序集合の h-列の分類について紹介する. 単体的半順序集合 P に付随する CW-複体 $\Gamma(P)$ が $(d-1)$ 次元球面 S^{d-1} に同相である時, P を $(d-1)$ 次元**単体的セル球面** *(simplicial cell sphere)* と呼ぶ. (正確には CW-複体 $\Gamma(P)$ を単体的セル球面と呼ぶべきであるが, ここでは P と $\Gamma(P)$ を同一視してこのように呼ぶ事にする.) 単体的セル球面の h-列は次の形で分類できることが知られている.

定理 3.6 (Stanley [St1], 枡田 [Ma2])**.** ベクトル $h = (h_0, h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ がある $(d-1)$ 次元単体的セル球面の h-列となることと h が以下の 3 条件を満たすことは同値

(1) $h_0 = 1$ かつ全ての $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し $h_i = h_{d-i}$.
(2) 全ての i に対し $h_i \geq 0$.
(3) ある $0 < i < d$ について $h_i = 0$ なら $\sum_{i=0}^{d} h_i$ は even.

上の定理は, 十分性を Stanley が, 必要性を枡田先生が証明した. 尚, 単体的セル球面はコーエン・マコーレーであり (2) の必要性は定理 3.3 より直ちに従う. また, (1) は Dehn-Sommerville 等式と呼ばれるよく知られた結果であり, 枡田先生の結果の本質的な点は条件 (3) を証明した点である. 最初の章で述べたように, f-列を知ることと h-列を知ることは同値であるから, 上の定理は単体的セル球面の f-列の分類を与えることになる.

注 3.7. 上の定理は球面と同相となる単体的セル複体の f-列の分類を与える定理である. 一方で, 球面と同相となる単体的複体の f-列の分類は未解決問題である. この問題については g-予想と呼ばれる予想があり, 面の数え上げ論における最も重要な未解決問題の一つとなっている.

4. 球面から多様体へ

X を有限三角形分割可能な位相空間とする. $\Gamma(P)$ が X と同相となる単体的半順序集合 P を X の単体的セル分割と呼ぶ. 問題 3.1 の特別な場合として, 次の問題が考えられる.

問題 4.1. 有限三角形分割可能な位相多様体 M が与えられたとき, M の単体的セル分割の取りうる f-列の値を分類せよ.

球面と球体を除くほとんどの多様体の単体的セル分割はコーエン・マコーレーではない事が知られており, 上記の問題を考える際に定理 3.3 を適応することはできない. しかし, 多様体の単体的セル分割を考える際にはブックスバウム性と呼ばれる代数的性質を考える事で類似の議論ができることが知られている. この章では, 多様体の単体的セル分割の f-列をどのように扱うかについて解説する.

単体的半順序集合 P とその要素 $\sigma \in P$ に対し, 半順序集合

$$\mathrm{lk}_P(\sigma) = \{\tau \in P : \tau \geq \sigma\}$$

を P の σ に関する**リンク** *(link)* と呼ぶ. 尚, $\mathrm{lk}_P(\sigma)$ は σ を最小元とする単体的半順序集合となる. また, ランク d の単体的半順序集合 P が**純** *(pure)* であるとは任意の $\sigma \in P$ に対し, あるランク d の元 $\tau \in P$ があり $\tau \geq \sigma$ となるときにいう. 純な単体的半順序集合 P が**ブックスバウム** *(Buchsbaum)* であるとは, 任意の $\sigma \in P - \{\hat{0}\}$ に対し $\mathrm{lk}_P(\sigma)$ がコーエン・マコーレーとなる時にいう. ブックスバウムな単体的半順序集合の典型的な例は多様体の単体的セル分割である. P が多様体の単体的セル分割の場合, そのリンク $\mathrm{lk}_P(\sigma)$ $(\sigma \neq \hat{0})$ はホモロジー球面か球体となり必ずコーエン・マコーレーとなる.

定義 4.2. ランク d の単体的半順序集合 P に対し,

$$\beta_i = \beta_i(P) = \dim_{\mathbb{Z}_2} \tilde{H}_i\big(\Gamma(P); \mathbb{Z}_2\big)$$

を $\Gamma(P)$ の ($\mathbb{Z}_2$ 上の) ベッチ数とする. 但し, $\tilde{H}_i(\Gamma(P); \mathbb{Z}_2)$ は $\Gamma(P)$ の $\mathbb{Z}_2$ 上の被約ホモロジー群である. 単体的半順序集合 P の h-列が $h(P) = (h_0, h_1, \dots, h_d)$ である時, P の h''**-列** $h''(P) = (h''_0, h''_1, \dots, h''_d)$ を次で定義する

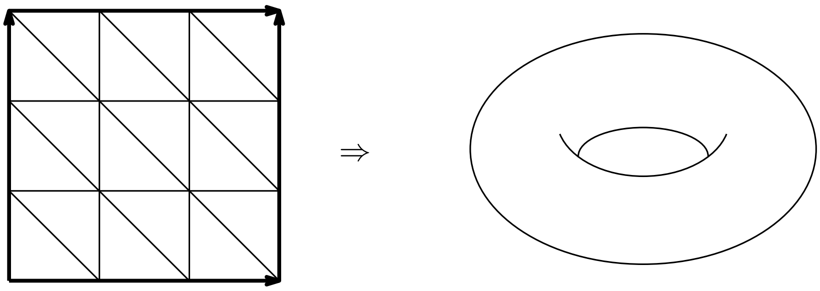
$$h''_k = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 0, \\ h_k - \dbinom{d}{k} \left\{ \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell-k} \beta_{\ell-1} \right\}, & \text{if } 1 \leq k \leq d-1, \\ h_d - \sum_{\ell=1}^{d-1} (-1)^{\ell-d} \beta_{\ell-1}, & \text{if } k = d. \end{cases}$$

h''-列を理解するのは簡単ではないので一つ例を挙げておく.

例 4.3. 下の二次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ の標準的な三角形分割を考え, P をその face poset とする. この時, $f(P) = (1, 9, 27, 18)$ であり, $h(P) = (1, 6, 12, -1)$ となる. $\beta_1(P) = 2$ であるから

$$h''(P) = h(P) - 2(0, 0, 3, -1) = (1, 6, 6, 1)$$

となる.



h''-列について簡単に分かる事をまとめておく.

- $h''_0(P) = h_0(P) = 1$ である. また $\Gamma(P)$ が連結なら $h''_1(P) = h_1(P) = f_1(P) - d$ である.
- $h_d(P) = \sum_{\ell=0}^{d}(-1)^{\ell-d} f_{\ell-1} = \sum_{\ell=1}^{d}(-1)^{\ell-d}\beta_{\ell-1}$ より, $h''_d(P) = \beta_{d-1}$ が成り立つ.
- P がコーエン・マコーレーなら $h''(P) = h(P)$ である.

定理 3.3 のように, P がブックスバウムのとき, h''-列は次のような表示を持つ.

定理 4.4 (Novik-Swartz [NS1])**.** K を標数 2 の体とする. P をランク d のブックスバウム単体的半順序集合, $R = K[P]$, $\theta_1, \ldots, \theta_d$ を R の線型な巴系とする. イデアル $J \subset R$ を

$$J = \sum_{i=1}^{d}(\theta_1, \ldots, \hat{\theta}_i, \ldots, \theta_d) : \theta_i$$

で定義する時, 各 $k = 0, 1, \ldots, d$ に対し

$$\dim_K (R/J)_k = h''_k(P).$$

が成り立つ.

注 4.5. 先の定理のように h''-列を環論的に表示出来ることを発見したのは Novik と Swartz [NS1] である. 一方でブックスバウム環に対し上の J のようなイデアルを考えることは, 後藤先生 [Go] などにより古くから行われてきたようである.

注 4.6. P がブックスバウムであるとき $K[P]/(\theta_1, \ldots, \theta_d)K[P]$ のヒルベルト関数から定義される整数列を h'-**列**と呼ぶ.

注 4.7. ここでは話を簡単にするため h''-列を $\mathbb{Z}_2$ 上で定義し, 定理 4.4 において体の標数が 2 である事を仮定したが, 標数に関する仮定は本来不要である.

h''-列は境界のない多様体の単体的セル分割の場合に特に良い性質を持つ.

定理 4.8. P を境界の無い連結な $(d-1)$ 次元多様体 M の単体的セル分割とし, $h''(P) = (h''_0, h''_1, \ldots, h''_d)$ とおく. 次が成り立つ.

(1) (Novik [No]) $h''_0 = 1$ かつ全ての $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し $h''_i = h''_{d-i}$.
(2) (Novik-Swartz [NS1]) 全ての i に対し $h''_i \geq 0$.
(3) ([Mu1]) ある $0 < i < d$ について $h''_i = 0$ なら $\sum_{i=0}^{d} h''_i$ は even.

上の定理は Stanley–枡田の定理の必要条件が任意の境界の無い連結な多様体で成り立つことを意味する. なお, P が単体的複体の時にはより強いことが言える. h''-列はある 0 次元ゴレンシュタイン環のヒルベルト関数に一致する [NS2].

先の定理 4.8 は多様体の単体的セル分割の f-列についての強力な必要条件を与える．このとき, どのような多様体に対して定理 4.8 の条件が必要十分条件になるか？という問題を考えるのは自然なことである．この問題については次のことがわかっている．

定理 4.9 ([Mu1])**.** M を二つの球面の直積 $S^i \times S^{d-1-i}$ 又は実射影空間 $\mathbb{R}P^{d-1}$ とする．整数ベクトル $h'' = (h''_0, h''_1, \ldots, h''_d)$ が M のある単体的セル分割の h''-列となることと h'' が定理 4.8 の条件 (1), (2), (3) を満たす事は必要十分である．

尚, 偶次元の実射影空間については上の定理は枡田先生 [Ma1] によって証明されていた結果である．また, 上の定理は球面の直積や実射影空間の連結和を取ることで得られる多様体に対しても成り立つことを注意しておく．

5. 今後の課題

最後に, 今後の課題について少し述べておく．

5.1. 境界のない多様体の単体的セル分割の f-列の分類.

二つの球面の直積や実射影空間以外の多様体で定理 4.8 の 3 条件が単体的セル分割の h''-列の必要十分条件になるものがあるか, というのは自然な疑問である．具体的には, 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 等の場合が今後の課題であろう．(実際 $\mathbb{C}P^2$ の場合には 3 条件が必要十分になる事が分かっている.)

もちろん, 先の 3 条件が必要十分条件とならない多様体の例もある．たとえば 3 次元トーラス $S^1 \times S^1 \times S^1$ 等がその例である．そもそも, h''-列の定義においては体上のホモロジー群しか見ていないので, ホモロジー群以外の理由で複雑さが現れる多様体に対しては h''-列の理論だけでは上手く行かないのは自然なことのように思われる．定理 4.8 の条件が h''-列の必要十分条件を与えない多様体の単体的セル分割の f-列を分類するのはかなり難しい問題であるように思われるが, これは非常に興味深い問題である．特に, ホモロジー群以外の位相的な不変量から f-列に関する何らかの条件を得る事ができるか？というのは興味深い問題でる．

5.2. 境界のある多様体の単体的セル分割の f-列の分類.

定理 4.8 は境界の無い多様体に対する定理である．では, 境界のある多様対に対して同じ様な事がいえないか？というのも自然な疑問であろう．境界のある多様対の単体的セル分割もブックスバウムであるので, その h''-列は非負になる．しかし, 境界のある場合のような綺麗な対称性は成り立たないことが分かっている．

境界のある多様体のもっとも簡単な例は球体の場合であるが, 球体の場合には Kolins [Ko] と著者 [Mu2] により h-列の完全な分類が得られている．定理 3.6 の必要条件が定理 4.8 に拡張されたように, 球体の h-列の必要十分条件を境界のある多様体の単体的セル分割の h''-列の必要条件に拡張することができるか, なども興味深い問題である．

References

[Bj] A. Björner, Posets, regular CW complexes and Bruhat order, *European J. Combin.* **5** (1984), 7–16.

[Du] A. Duval, Free resolutions of simplicial posets, *J. Alg.* **188** (1997), 363–399.

[Go] S. Goto, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings, *J. Alg.* **85** (1983), 490–534.

[Ko] S. Kolins, f-vectors of Simplicial Posets that are Balls, *J. Algebraic Combin.*, to appear.

[Ma1] M. Masuda, 単体的セル分割の単体の数, 数理解析研究所講究録 **1393** (2004), 88–95.
[Ma2] M. Masuda, h-vectors of Gorenstein* simplicial posets, *Adv. Math.* **194** (2005), 332–344.
[MMP] H. Maeda, M. Masuda and T. Panov, Torus graphs and simplicial posets, *Adv. Math.* **212** (2007), 458–483.
[Mu1] S. Murai, Face vectors of simplicial cell decompositions of manifolds, preprint, arXiv:1010.0319.
[Mu2] S. Murai, h-vectors of simplicial cell balls, *Trans. Amer. Math. Soc.,* to appear.
[No] I. Novik, Upper bound theorems for homology manifolds, *Israel J. Math.* **108** (1998), 45–82.
[NS1] I. Novik and E. Swartz, Socles of Buchsbaum modules, complexes and posets, *Adv. Math.* **222** (2009), 2059–2084.
[NS2] I. Novik and E. Swartz, Gorenstein rings through face rings of manifolds, *Compos. Math.* **145** (2009), 993–1000.
[St1] R.P. Stanley, f-vectors and h-vectors of simplicial posets, *J. Pure Appl. Algebra* **71** (1991), 319–331.
[St2] R.P. Stanley, Combinatorics and commutative algebra, Second edition, Progr. Math., vol. 41, Birkhäuser, Boston, 1996.