数論的位相幾何学と数論的場の理論

森下昌紀 (九州大学)

結び目と素数の類似に基づき, 3 次元位相幾何学と数論の間には類似性がみられる. この類似性に従い, 両分野をお互いに刺激しあって研究しようという領域を数論的位相幾何学 (Arithmetic Topology) という.

現代の結び目理論と数論はともに今から約 200 年前の Gauss の研究にその一つの源泉をもつ. 私にとって数論的位相幾何学とは Gauss から分かれて発展したこの両分野に橋をかける試みである.

Gauss の結び目理論は電磁気学の研究から生まれた. 結び目理論と数論の架け橋も現代の場の理論と繋がって行くように思われる.

1. Gauss

- 平方剰余の数論 (Disquisitiones Arithmeticae, 1801)
  $\longrightarrow$ 現代の代数的数論へ発展.

Gauss の相互律. 2 つの奇素数 p, q に対し,

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

特に, p または $q \equiv 1 \bmod 4$ のとき,

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right).$$

例 $\left(\frac{5}{17}\right) = \left(\frac{17}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) = -1$. 相互律により, $x^2 \equiv 5 \bmod 17$ がより易しい問題 $x^2 \equiv 2 \bmod 5$ に変換される.

Gauss は相互律に 7 つの異なる証明を与えた. その中で, 最も含蓄のある方法の一つは, 等式

$$\left(\sum_{x \in \mathbb{F}_q} \zeta_q^{x^2}\right)^{p-1} = \left(\frac{q^*}{p}\right) \quad \left(\begin{array}{c} q^* = (-1)^{\frac{q-1}{2}} q, \\ \zeta_q = \sqrt[q]{1} \in \overline{\mathbb{F}}_p \end{array}\right).$$

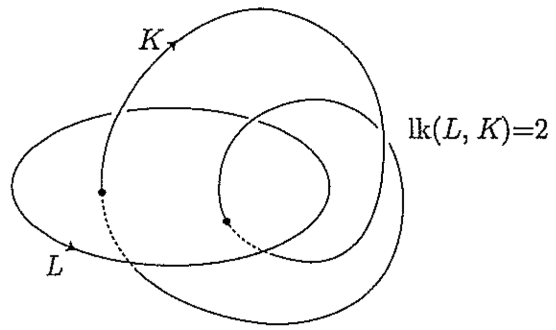
を使うものである. 左辺 (の括弧内) は Gauss 和と呼ばれる.

• 電磁気学 (Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen, 1833) $\longrightarrow$ 現代の結び目理論へ発展

Gauss の積分公式. K, L を 3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の交わらない 2 つのなめらかな有向単純閉曲線とし, そのパラメーター表示を各々 $a : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $b : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ とする. このとき, 次式が成り立つ:

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^1\int_0^1 \frac{(b'(t)\times(a(s)-b(t)))\cdot a'(s)}{||a(s)-b(t)||^3}dsdt = \mathrm{lk}(L,K).$$

ここで, 右辺の $\mathrm{lk}(L,K)$ は, 向きをこめて K が L の回りを何回まわるかを表すまつわり数.



左辺は, L にその向きに電流を流すとき, 生じる磁場を K 上で積分したものという物理的な意味をもつ.

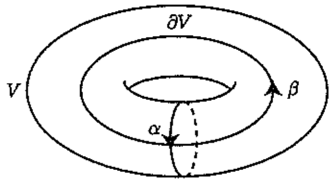
上の 2 つを見比べると, 素数 p があるとそのまわりに場が生じ, 別の素数 q が力を受けるというイメージが思い浮かぶ. Gauss の相互律は「作用・反作用の法則」も想起させる (cf. 5 節).

2. 辞書

数論的位相幾何学の基本的な類似をまとめる. トポロジーにおいて空間の位相的な形を代数的な言葉で記述する理論として (コ) ホモロジー論, ホモトピー論があるが, 数論においてもスキームのエタール位相的な形を記述する理論として, エタール (コ) ホモロジー論, エタールホモトピー論がある. 結び目と素数の類似はこのホモトピー的な視点に基づく.

164

円周 $S^1 = K(\mathbb{Z}, 1)$	有限体 $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q) = K(\hat{\mathbb{Z}}, 1)$
$\pi_1(S^1) = \mathrm{Gal}(\mathbb{R}/S^1) = \langle l \rangle$ l : 1 回りするループ	$\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) = \langle \sigma \rangle$ σ : Frobenius 自己同型
管状近傍 V	$\mathfrak{p}$ 進整数環 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$
境界 ∂V	$\mathfrak{p}$ 進体 $\mathrm{Spec}(k_{\mathfrak{p}})$
$1 \to \langle \alpha \rangle \to \pi_1(\partial V) \to \langle \beta \rangle \to 1$ β : ロンジチュード α : メリディアン $\pi_1(\partial V) = \langle \alpha, \beta \mid [\alpha, \beta] = 1 \rangle$	$1 \to I_{k_{\mathfrak{p}}} \to \pi_1(\mathrm{Spec}(k_{\mathfrak{p}})) \to \langle \sigma \rangle \to 1$ σ : Frobenius 自己同型 τ : モノドロミー ($\in I_{k_{\mathfrak{p}}}$ の商) $\pi_1^{\mathrm{tame}}(\mathrm{Spec}(k_{\mathfrak{p}})) = \langle \tau, \sigma \mid \tau^{q-1}[\tau, \sigma] = 1 \rangle$



メリディアン α とロンジチュード β は各々

$$\hat{\alpha} f(u) = e^u f(u), \quad \hat{\beta} f(u) = \exp(\hbar \frac{d}{du}) f(u) = f(u + \hbar)$$

なる作用素 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ に量子化され, 数論側のモノドロミー, Frobenius に類似した関係式

$$\hat{\alpha}\hat{\beta} = e^{\hbar}\hat{\beta}\hat{\alpha}$$

を満たす (cf. 10 節). つまり, 数論側の古典極限 $q \to 1$ が古典トポロジーを与える状況になっている.

3 次元多様体 M エンド E_M	有限次代数体 k の整数環 $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ 無限素点の集合 S_k^{∞}
$S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$	$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$
結び目 $S^1 \hookrightarrow M$ $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$	素イデアル $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$
結び目群 $G_K = \pi_1(M \setminus K)$	素イデアル群 $G_{\{\mathfrak{p}\}} = \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k) \setminus \{\mathfrak{p}\})$
ペリフェラル群 D_K $I_K = \langle$ メリディアン α_K の像 $\rangle$	$\mathfrak{p}$ 上の分解群 $D_{\{\mathfrak{p}\}}$ $\mathfrak{p}$ 上の惰性群 $I_{\{\mathfrak{p}\}}$
絡み目 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_r$	素イデアルの有限集合 $S = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$
絡み目群 $G_L = \pi_1(M \setminus L)$	分岐条件付き Galois 群 $G_S = \pi_1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k) \setminus S)$
境界写像 $C_2(M) \to Z_1(M);\ D \mapsto \partial D$	単項イデアルを生成 $k^{\times} \to I(k);\ a \mapsto (a)$
1 次元ホモロジー群 $H_1(M)$	イデアル類群 $H(k)$
2 次元ホモロジー群 $H_2(M)$	単数群 $\mathcal{O}_k^{\times}$

3. Gauss 再論

2 節の辞書に基づき, Gauss のまつわり数と平方剰余を統一的に見直す.

まつわり数.　$K \cup L \subset \mathbb{R}^3$ を 2 成分絡み目, $Y_K \to X_K = \mathbb{R}^3 \setminus K$ を 2 重被覆とする.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_K) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(Y_K/X_K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \beta_L & \mapsto & \mathrm{lk}(K,L) \bmod 2. \end{array}$$

Legendre 記号.　$\{p,q\} \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ を 2 奇素数, $Y_p \to X_p = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus \{p\}$ を 2 重エタール被覆とする. (注: X_p 上に 2 重エタール被覆 (無限素点も不分岐とする) が存在する条件は $p \equiv 1 \bmod 4$. 以下, これを仮定する.) Y_p は 2 次拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{p})/\mathbb{Q}$ に対応する.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_p) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(Y_p/X_p) = \{\pm 1\} \\ \sigma_q & \mapsto & \left(\frac{p}{q}\right). \end{array}$$

• まつわり数の対称性 $\mathrm{lk}(K,L) = \mathrm{lk}(L,K)$ と Gauss 相互律 $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$ が対応している.

• まつわり数の Gauss 積分表示のゲージ理論版 (A. Schwarz):

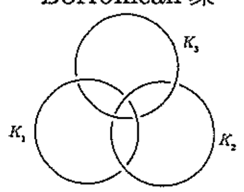
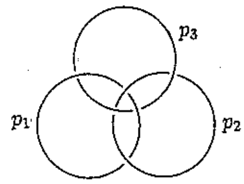
$$\int \mathcal{D}A \exp\left(-\frac{i}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} A \wedge dA\right) \int_K A \int_L A = \mathrm{lk}(K,L).$$

ここで, 左辺の積分は $\mathbb{R}^3$ 上の 1-形式 A にわたる経路積分を表す. 被積分関数は 2 次式で, Gauss 積分 $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)dx$ の無限次元版とみなせる. 従って, この積分公式は, Legendre 記号の Gauss 和による表示の類似とみられる.

まつわり数	Legendre 記号
対称性	相互律
Gauss-Schwarz 積分	Gauss 和

4. 高次まつわり数と多重べき剰余

J. Milnor は Borromean 環の非自明性を示すために, まつわり数の高次版を導入した. 2 節の辞書に基づき, 素数たちに対しても Legendre 記号の高次版を導入することができる.

n 成分絡み目 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n \subset S^3$	n ケの奇素数 $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$
絡み目群 $G_L = \pi_1(S^3 \setminus L)$	副 2 エタール基本群 $G_S = \pi_1^{\text{pro}-2}(\text{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus S)$
Milnor の定理 $G_L/G_L^{(n)} = \langle x_1, \ldots, x_n \mid$ $[x_i, y_i] = 1 (1 \leq i \leq n), F^{(n)} = 1 \rangle$ $x_i : K_i$ のメリディアン $y_i : K_i$ のロンジチュード	Koch の定理 $G_S = \langle x_1, \ldots, x_n \mid$ $x_i^{p_i - 1}[x_i, y_i] = 1 (1 \leq i \leq n) \rangle$ $x_i : p_i$ 上のモノドロミー $y_i : p_i$ 上の Frobenius
Magnus 展開 $y_j = \sum \mu(i_1 \cdots i_r j) X_{i_1} \ldots X_{i_r}$	2 進 Magnus 展開 $y_j = \sum \hat{\mu}(i_1 \cdots i_r j) X_{i_1} \ldots X_{i_r}$
高次まつわり数 $\mu(I)$	数論的高次まつわり数 $\mu_2(I) = \hat{\mu}(I) \bmod 2$
$\mu(ij) = \text{lk}(K_i, K_j)$	$(-1)^{\mu_2(ij)} = \left(\frac{p_i}{p_j}\right)$
Borromean 環  $\mu(ij) = 0 \ (i \neq j),\ \mu(123) = 1$	Borromean 素数  $\mu_2(ij) = 0 \ (i \neq j),\ \mu_2(123) = 1$ e.g., $(p_1, p_2, p_3) = (13, 61, 937)$

注. $|J| < |I|$ なる任意の J に対し $\mu(J) = 0$ なら, $\mu(I)$ は絡み目 L の不変量になる. 数論側も同様.

問題. 高次まつわり数を表す Gauss-Schwarz 積分表示の拡張を示せ.(関連する仕事があるようだが, はっきりと書かれた文献はないようである)

- $\mu_2(12 \cdots r)$ の数論的な意味:
「$p_1, \ldots, p_{r-1}$ のみが分岐するある $2^{n(n-1)/2}$ 次 Galois 拡大 $k_r/\mathbb{Q}$ s.t.

$$\text{Gal}(k_r/\mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_2 & \cdots & \cdots & \mathbb{F}_2 \\ & 1 & \mathbb{F}_2 & \cdots & \mathbb{F}_2 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \text{\huge 0} & & 1 & \mathbb{F}_2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

における p_r の分解の仕方を記述する」

167

問題. k_r と $\mu_2(12\cdots r)$ の具体的記述.

- $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1})$

$$(-1)^{\mu_2(12)} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

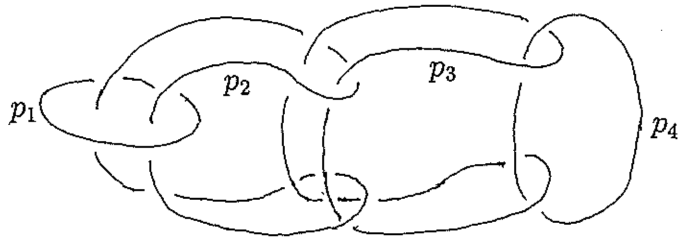
- $k_3 =$ Rédei の 8 次 2 面体拡大 (1939)

$$(-1)^{\mu_2(123)} = [p_1, p_2, p_3] \text{ (Rédei のトリプル記号)}.$$

定理. (天野郁弥, 2010)　k_4(64 次拡大) の具体的構成と 4 重べき剰余記号 $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ の導入 s.t.

$$(-1)^{\mu_2(1234)} = [p_1, p_2, p_3, p_4].$$

例. (天野素数) $\mu_2(ij) = 0, \mu_2(ijk) = 0, \mu_2(1234) = 1$. e.g., $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (5, 8081, 101, 449)$



問題. 多重べき剰余記号 $[p_{i_1}, \ldots, p_{i_r}]$ を表す "多重 Gauss 和"を見出せ.

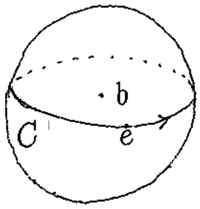
5. 類体論と電磁双対性

Legendre 記号

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\sigma_q(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$$

は「"関数" $\sqrt{p}$ が "Frobenius ループ" σ_q に沿って一回りしたときの変化=モノドロミー」とみることもできる. これは次のような物理的な状況を想起させる.

いま, Minkowski 時空 M の原点にモノポール (磁荷 b) があり, そのまわりを荷電粒子 (電荷 e) がループ C に沿い一回りするとする. モノポール



が生むゲージ場 (磁場)=接続 1-形式を A とすると, 電荷の波動関数 ψ は次の微分方程式をみたす:

$$(d - A)\psi = 0.$$

従って, 電荷が C に沿って一回りしたときに波動関数 ψ が受ける影響 $\psi \mapsto (b,c)\psi$ はモノドロミー

$$(b,c) = \exp\left(\frac{ie}{\hbar}\oint_C A\right)$$

で与えられる.
ここで, 磁荷と電荷の役割を入れ替え, 今度は磁荷が電荷から受ける変化をモノドロミー (e,b) で表すと, "作用・反作用" の法則

$$(b,e) = (e,b)$$

が成り立つ. これは "平方剰余の相互律" に他ならない.

さて, C を境界とするお椀を考えて Stokes の定理を適用し, C を小さくしてお椀を (磁荷を囲む) 球面に近づけると, Dirac の量子化条件をえる:

$$eb = 2\pi i\hbar n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

これより, $e \gg 1$(強結合領域) $\Leftrightarrow$ $b \ll 1$(弱結合領域) の関係にあり, これは次の類似を想起させる:

$e \gg 1 \iff b \ll 1$ (強結合領域) $\overset{双対}{\longleftrightarrow}$ (弱結合領域) 難　　　易	p : 大 $\iff$ q : 小 $x^2 \equiv q \bmod (p) \overset{双対}{\longleftrightarrow} x^2 \equiv p \bmod (q)$ 難　　　易

最後に, 上で述べたまつわり数, 平方剰余と作用・反作用の三位一体の視点から, Poincaré 双対性, 類体論と電磁双対性を見直してみよう.

- Poincaré 双対性:

$$H^1(X_K) \simeq H^2_c(X_K)^* \qquad [\Sigma_K] \cup [L] = \mathrm{lk}(K, L).$$

- 類体論 (Artin-Verdier 双対性):

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X_p) & \simeq & H^2_c(X_p)^* & & [\Sigma_p] \cup [q] = \left(\frac{p}{q}\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \{\text{Galois 指標}\} & \simeq & \{\text{Hecke 指標}\} & & \text{可換 Langlands 対応} \end{array}$$

- Maxwell 電磁双対性:

$$H^2(M) \overset{\mathrm{Hodge}*}{\simeq} H^2(M) \qquad \text{電場 } E \leftrightarrow \text{磁場 } B$$

さらに, 可換 Langlands 対応 ρ (Galois 指標) $\leftrightarrow$ $\mathcal{L}(\rho)$ (Hecke 指標) は L 関数の間の等式

$$\text{Artin } L \text{ 関数 } L(\rho, s) = L(\mathcal{L}(\rho), s) \text{ Hecke } L \text{ 関数}$$

をみたすが, これは量子論における電磁双対性 (可換 S-双対性) の類似とみることができる: A を電磁ポテンシャル, $F_A = E + B = dA, *F_A = dA'$ とする. このとき, 次の分配関数の間の等式が成り立つ: $eb = 1$ なら,

$$\begin{array}{ccc} Z(e) & = & Z(b) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \displaystyle\int \mathcal{D}A \exp\left(-\frac{1}{e}\int_M F_A \wedge *F_A\right) & & \displaystyle\int \mathcal{D}A' \exp\left(-\frac{1}{b}\int_M F_{A'} \wedge *F_{A'}\right). \end{array}$$

まつわり数, 平方剰余と作用・反作用のその後の発展には不思議と並行性があるように思われる. 類体論と場の理論, これはもしかしたら Gauss が夢見た世界だったのかもしれない.

数論	3 次元幾何	4 次元物理
平方剰余	まつわり数	作用・反作用
Artin-Verdier 双対性 (可換類体論)	Poincaré 双対性	Maxwell 電磁双対性
岩澤理論	Alexander-Fox 理論	量子電磁力学
肥田理論 非可換類体論 Langlands 双対性	双曲幾何・SL(2, $\mathbb{C}$)- Chern-Simons ゲージ理論 S-双対性	Seiberg-Witten 理論 超対称非可換ゲージ理論 S-双対性 (電磁双対性)

170

6. Alexander-Fox 理論と岩澤理論

結び目の無限巡回被覆と数体の岩澤 p-円分-拡大を類似とみることにより, Alexander-Fox 理論と岩澤理論の間には親密な並行性が見られる.

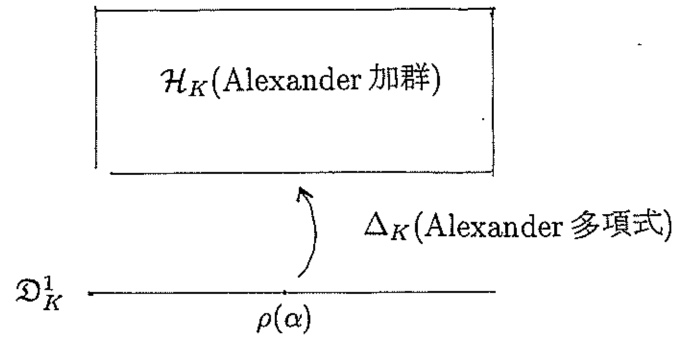
結び目 $K : S^1 \hookrightarrow S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$	素数 $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$
結び目補空間 $X_K = S^3 \setminus \mathrm{int}(V_K)$	素数補空間 $X_p = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus \{p\}$
結び目群 $G_K = \pi_1(X_K)$	素数群 $G_p = \pi_1(X_p)$
ペリフェラル群 $D_K = \mathrm{Im}(\pi_1(\partial V_K) \to G_K)$	分解群 $D_p = \mathrm{Im}(\pi_1(\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)) \to G_p)$
$G_K^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(X_K^\infty/X_K) = \langle\alpha\rangle = \mathbb{Z}$ $\begin{array}{ccl} X_K^\infty & & \\ \downarrow & & \\ X_n & \subset & M_n \\ \downarrow & & \downarrow K \text{ 上分岐} \\ X_K & \subset & S^3 \end{array}$	$G_p^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(X_p^\infty/X_p) = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[p^\infty]{1})/\mathbb{Q}) \fallingdotseq \langle\tau\rangle = \mathbb{Z}_p$ $\begin{array}{ccl} X_p^\infty & & \\ \downarrow & & \\ X_p & \subset & k_n = \mathbb{Q}(\sqrt[p^n]{1}) \\ \downarrow & & \mid p \text{ 上分岐} \\ X_p & \subset & \mathbb{Q} \end{array}$
Alexander 多項式 $\Delta_K = \det(t - \alpha \mid H_1(X_K^\infty))$	岩澤多項式 $\Delta_p = \det(1 + T - \tau) \mid H_p^\infty)$ $H_p^\infty = \varprojlim H(k_n)(p)$
$\#H_1(M_n) = \prod_{\zeta^n=1} \lvert\Delta_K(\zeta)\rvert \sim ce^{m(\Delta_K)}\ (n \to \infty)$	$H(k_n)(p) = \prod_{\zeta^{p^n}=1} \lvert\Delta_p(\zeta - 1)\rvert_p \sim p^{\lambda n+\mu}\ (n \to \infty)$
twisted Alexander 多項式 $\Delta_K(\rho, t)$, $\rho : G_K \to GL_n(\mathbb{C})$	twisted 岩澤多項式 $\Delta_p(\rho, t)$, $\rho : G_p \to GL_n(\mathbb{Z}_p)$
高次 Alexander イデアル	高次岩澤イデアル (栗原)

注. $m(\Delta_K)$ は Δ_K の対数的 Mahler 測度. 結び目加群 $H_1(X_K^\infty)$ の Pontryagin 双対への $\langle\alpha\rangle = \mathbb{Z}$-作用による離散力学系のエントロピーに等しい.

問題. (1) $\langle\tau\rangle = \mathbb{Z}$ の岩澤加群 $H_p^\infty = \varprojlim H(k_n)(p)$ への作用を離散力学系とみて調べよ. エントロピーと岩澤多項式の零点との関係は?
(2) 数論では, イデアル類群及び単数群の Galois 加群構造, Galois コホモロジーは重要な研究主題であった. 同様に, 3 次元多様体のホモロジー群 H_1, H_2 の Galois 加群構造, Galois コホモロジーを研究せよ. (最近, Hilbert の定理 90 などの 3 次元多様体類似が植木潤により示された)

表現のモジュライの視点から

1 次元トートロジカル表現 $\rho^1_K : G_K \to G_K^{\mathrm{ab}} \subset \mathbb{Z}[G_K^{\mathrm{ab}}]^\times$ $\parallel$ $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]^\times$	1 次元普遍変形 $\rho^1_p : G_p \to G_p^{\mathrm{ab}} \subset \mathbb{Z}_p[[G_p^{\mathrm{ab}}]]^\times$ $\downarrow \omega^j$ $\mathbb{Z}_p^{(j)}[[T]]^\times$
モジュライ空間 $\mathfrak{D}^1_K = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^\times$ $\rho \mapsto \rho(\alpha)$	普遍変形空間 $\mathfrak{D}^1_p = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p[[T]])(\overline{\mathbb{Q}}_p) \simeq D_p(1)$ $\rho \mapsto \rho(\tau - 1)$ $(D_p(1) = \{z \in \overline{\mathbb{Q}}_p \mid \lvert z\rvert_p < 1\})$
結び目加群 $\mathcal{H}_K = H_1(G_K, \rho^1_K)$ 連接ねじれ $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}^1_K}$-加群 Alexander 多項式 $=$ $\mathcal{H}_K$ の切断	岩澤加群 $\mathcal{H}_K = H_1(G_p, \rho^1_p)$ 連接ねじれ $\mathcal{O}_{\mathfrak{D}^1_p}$-加群 岩澤多項式 $=$ $\mathcal{H}_K$ の切断



Alexander-Fox 理論	岩澤理論
$\parallel$ G_K の 1 次元複素表現のモジュライとその上の位相的不変量の理論	$\parallel$ G_p の 1 次元 p-進表現の変形空間とその上の数論的不変量の理論

$\downarrow$ 非アーベル化 $\downarrow$

G_K の N 次元複素表現のモジュライとその上の位相的不変量の理論	G_p の N 次元 p-進表現の変形空間とその上の数論的不変量の理論

$N = 2$ の場合:

3 次元双曲幾何	肥田理論

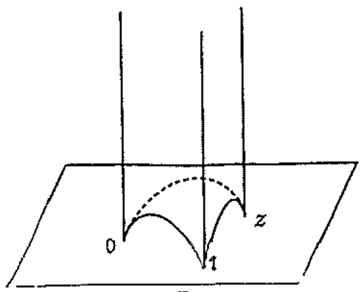
172

7. 3次元双曲幾何と肥田理論

双曲構造の変形と p 進通常保型形式の変形の類似に基づき, 3次元双曲幾何と肥田理論の間には興味深い類似がみられる. (この類似は初め藤原一宏氏により指摘された)

双曲結び目 K $S^3 \setminus K$ 上の完備双曲構造 z°)	p-通常モジュラー楕円曲線 $E/\mathbb{Q}$ 対応する保型形式 f°
ホロノミー表現 $\rho_{z^\circ}: G_K \to SL_2(\mathbb{C})$	Galois 表現 $\rho_E = \rho_{f^\circ}: G_p \to GL_2(\mathbb{Z}_p)$ $\bar{\rho} := \rho^\circ \bmod p$
双曲構造の変形空間 $\mathfrak{D}_K \ni z$ $= \mathrm{Hom}(G_K, SL_2(\mathbb{C}))_{\rho_{z^\circ}}//\mathrm{conj.} \ni \rho_z$	p 進通常保型形式の変形空間 $\mathfrak{D}_p \ni f$ $= \bar{\rho}$ の普遍 p-通常変形空間 $\ni \rho_f$
整係数 Dehn 手術点	整数重さをもつ保型形式
$\rho_z\|_{D_K} \simeq \begin{pmatrix} \chi_{\rho_z} & * \\ 0 & \chi_{\rho_z}^{-1} \end{pmatrix}$	$\rho_f\|_{D_p} \simeq \begin{pmatrix} \chi_{\rho_f,1} & * \\ 0 & \chi_{\rho_f,2} \end{pmatrix}$ $(\chi_{\rho_f,2}\|_{I_p} = \mathbf{1})$
メリディアン関数 $x_K: \mathfrak{D}_K \to \mathbb{C}$ $x_K(z) = \chi_{\rho_z}(\alpha)^2$ ロンジチュード関数 $y_K: \mathfrak{D}_K \to \mathbb{C}$ $y_K(z) = \chi_{\rho_z}(\beta)^2$	モノドロミー関数 $x_p: \mathfrak{D}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ $x_p(f) = \chi_{\rho_f,1}(\tau)$ Frobenius 関数 $y_p: \mathfrak{D}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ $y_p(f) = \chi_{\rho_f,2}(\sigma)$
定理 (Thurston, Neumann-Zagier) x_K は z° における $\mathfrak{D}_K$ の局所座標	定理 (Hida, M.M) x_p は f° における $\mathfrak{D}_p$ の局所座標
定理 (Neumann-Zagier) $\partial X_K = \mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}}$ $\frac{dy_K}{dx_K}\|_{z=z^\circ} = \frac{\log q}{2\pi\sqrt{-1}}$	定理 (Greenberg-Stevens) E:分裂乗法的/p $E(\overline{\mathbb{Q}}_p) = \overline{\mathbb{Q}}_p^\times/q^{\mathbb{Z}}$ $\frac{dy_p}{dx_p}\|_{f=f^\circ} = -\frac{\log_p q}{2\mathrm{ord}_p(q)}$

双曲理想4面体 $S(z)$



$$S^3 \setminus K = S(z_1^\circ) \cup \cdots \cup S(z_n^\circ), \quad \mathfrak{D}_K : \prod_{i=1}^{n} z_i^{m_{ij}} (1-z_i)^{n_{ij}} = \pm 1 \ (j = 1, \ldots, n).$$

8. Chern-Simons 変動 (モチーフ)

M を 3 次元コンパクト多様体, $P \to M$ を 主 $SL_2(\mathbb{C})$-束 (自明) とする. P 上の接続 $A \in \mathcal{A}_M = \Omega^1_M \otimes sl_2(\mathbb{C})$ に対し, $SL_2(\mathbb{C})$ Chern-Simons 汎関数が

$$\mathrm{CS}(A) := \frac{1}{8\pi^2} \int_M \mathrm{Tr}(dA \wedge A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \ (\in \mathbb{C}).$$

により定義される.

例 1) M が閉双曲多様体で, A がホロノミー表現に対応する平坦接続のとき,

$$\mathrm{CS}(A) = \mathrm{CS}(M) - \frac{i}{\pi^2}\mathrm{Vol}(M).$$

ここで, $\mathrm{CS}(M)$ は M の Chern-Simons 不変量, $\mathrm{Vol}(M)$ は M の双曲体積.
2) $\mathrm{CS}(A)$ を Lagrangian とする位相的場の量子論があり, 分配関数

$$Z(M) := \int_{\mathcal{A}_M/\mathcal{G}_M} \mathcal{D}A e^{\pi i k \mathrm{CS}(A)}$$

は M の位相不変量 (Witten 不変量).

以下, $K \subset S^3$ を双曲結び目, $M = X_K = S^3 \setminus \mathrm{int}(V_K)$ とする.
$z \in \mathfrak{D}_K$ に対し, ホロノミー表現 ρ_z に付随する平坦接続を A_z とし, Chern-Simons ポテンシャル $\Phi : \mathfrak{D}_K \to \mathbb{C}$ を

$$\Phi(z) := 16\pi^2 \mathrm{CS}(A_z) + x_K(z) y_K(z)$$

と定義する.

結果: $\Phi(z)$ の数論幾何的解釈.

$X := \mathfrak{D} \setminus$ (特異点) とおく. X は開 Riemann 面.
x_K, y_K を Deligne コホモロジー $H^1_D(X, \mathbb{Z}(1)) = H^0(X, \mathcal{O}^\times)$ の元とみなすと,

$$H^2_D(X, \mathbb{Z}(2)) = \{X \text{ 上の正則 (平坦) 接続付き正則直線束}\}/\simeq$$

より, カップ積 $y_K \cup x_K^2$ は X 上の平坦接続付き正則直線束 $\langle y_K, x_K^2 \rangle$ を定める.

具体的構成. 3次のHeisenberg群 H に対し, $Q := H(\mathbb{Z})\backslash H(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ を

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (e^{2\pi i a}, e^{2\pi i b})$$

により定まる主 $\mathbb{C}^\times$-束とし, $\nabla := d - b da$ を Q 上の接続1-形式とする. このとき, $\langle y_K, x_K^2 \rangle$ は (Q, ∇) の $(y_K, x_K^2) : X \longrightarrow \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ による引き戻しである:

$$\begin{array}{ccc} \langle y_K, x_K^2 \rangle := f^*(Q, \nabla) & \longrightarrow & (Q, \nabla) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \end{array}$$

定理 1. $s : X \longrightarrow \langle y_K, x_K^2 \rangle$ を

$$s(z) := H(\mathbb{Z}) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\pi i} \log y_K(z) & \frac{1}{(2\pi i)^2} \log \Phi(z) \\ 0 & 1 & \frac{1}{2\pi i} \log x_K(z)^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により定義すると, s は X 上の $\langle y_K, x_K^2 \rangle$ の水平切断を与える.

$\mathbb{C}^3$ の標準底を e_0, e_1, e_2 とし, w_1, w_2, w_3 を

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log y_K(z) & \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \Phi(z) \\ 0 & 1 & \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log x_K^2(z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ (2\pi\sqrt{-1}) e_1 \\ (2\pi\sqrt{-1})^2 e_2 \end{pmatrix}$$

により定義し, $V(z) := \mathbb{Z}w_0 \oplus \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2$ とおく. V は自明束 $X \times \mathbb{C}^3 \to X$ 上の接続

$$\nabla := d - \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log y_K(z) & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \log x_K^2(z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対する平坦接続の局所系. $V(z)$ の増加フィルトレーションを $W_0 := \mathbb{Z}w_0 \oplus \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2 \supset W_{-1} := \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2 \supset W_{-2} := \mathbb{Z}w_2$ $(W_0/W_{-1} =$

175

$\mathbb{Z}, W_{-1}/W_{-2} = \mathbb{Z}(1), W_{-2} = \mathbb{Z}(2))$ と定め, $\mathbb{C}^3$ の減少フィルトレーションを $F^0 := \mathbb{C}e_0 \subset F^{-1} := \mathbb{C}e_0 \oplus \mathbb{C}e_1 \subset F^{-2} := \mathbb{C}e_0 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 = \mathbb{C}^3$ と定義する.

定理 2. 3 つ組 (V, W_*, F^*) は X 上の混合 Hodge 構造の変動 – **Chern-Simons 変動**と呼ぶ – を与える.

Neumann-Zagier, 吉田朋好, Kirk-Klassen らの結果を用いると次が示される.

定理 3. z° の近傍上で次が成り立つ:

$$\Phi(z) = \int_{z^\circ}^{z} d\log y_K d\log x_K^2.$$

定理 1 ∼ 3 の背後のアイディア – 2 重対数関数との類似

双曲構造の変形空間 $\mathfrak{D}_K(z^\circ)$	理想双曲 4 面体 $S(z)$ のモジュライ $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$
(y_K, x_K^2)	$(1-z, z)$
Chern-Simons ポテンシャル $\Phi(z) = \int_{z^\circ}^{z} d\log y_K d\log x_K^2$	2 重対数関数 $\ln_2(z) = \int_0^z d\log(1-z) d\log z$
混合 Hodge 構造の Chern-Simons 変動	混合 Hodge 構造の 2 重対数変動

2 重対数関数は多重対数関数

$$\ln_k = \int_0^z d\log(1-z) \underbrace{d\log z \ldots d\log z}_{(k-1)}$$

に拡張され, $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ 上の混合 Hodge 構造の多重対数変動が生じる. 上の類似から, Chen-Simons ポテンシャルも多重 Chern-Simons ポテンシャル

$$\Phi_k(z) = \int_{z^\circ}^{z} d\log y_K \underbrace{d\log x_K^2 \ldots \log x_K^2}_{(k-1)}$$

に拡張され, 双曲構造の変形空間上の多重 Chern-Simons 変動が生じる.

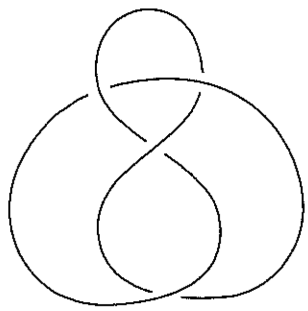
問題. 母関数 $\Phi(z,q) = \sum_{k\geq 1} \Phi_k(z) q^k$ を結び目不変量として研究せよ.

176

多重対数変動が混合 Tate モチーフの変動の Hodge 実現であることは次の予想を示唆する.

予想. Chern-Simons 変動は, 変形空間 X 上のある混合モチーフの変動の Hodge 実現であろう.

例. $K \subset S^3$ を 8 の字結び目とする:



$S^3 \setminus K = S(z_1^\circ) \cup S(z_2^\circ)$ $\left(z_1^\circ = z_2^\circ = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)$,
$\mathfrak{D}_K$: $z_1 z_2(1-z_1)(1-z_2) = 1 \cdots$ 楕円曲線,
$x_K = z_2(1-z_1)$, $y_K = z_1^2(1-z_1)^2$.
F を $\mathfrak{D}_K$ の関数体とし, Bloch-Suslin の完全列

$$K_3^{\mathrm{ind}}(F) \to P(F) = \mathbb{Z}[F^\times]/(\text{5-term rel.}) \xrightarrow{d} F^\times \wedge F^\times \to K_2(F) \to 0$$

を考える. $u = (z, w)$ を Dehn 手術係数 (p, q) (p, q は互いに素な整数) に対応する点とすると, $x_K^p y_K^q = 1$, $d(4([z_1] + [z_2])) = y_K \wedge x_K^2$ より, $d(4q([z] + [w])) = 0$. ゆえに, $4q([z] + [w]) \in P(\mathbb{C})$ の $K_3^{\mathrm{ind}}(\mathbb{C})$ への持ち上げ $m(u)$ ("モチーフ") が存在する.
$M(u)$ を K に沿い (p, q)-手術して得られる閉多様体とする.
$\mathrm{reg} : K_3(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}/\mathbb{Q}$: Beilinson レギュレーター (Hodge 実現).

定理 4. $\mathrm{reg}(m(u)) = -\frac{1}{4\pi}\mathrm{CS}(M(u)) + \frac{i}{2\pi^2}\mathrm{Vol}(M(u))$.

問題. 一般の双曲絡み目に対し, 定理 4 を拡張せよ. さらに, ある代数多様体の周期積分として表せ.

9. Arithmetic TQFT

3 次元多様体 M 上で, $SL_2(\mathbb{C})$ Chern-Simons 汎関数 $\mathrm{CS} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ を Lagrangian とする位相的場の理論を考える. 分配関数

$$Z(M) = \int_{\mathcal{A}_M/\mathcal{G}_M} \mathcal{D}A e^{\pi i k \mathrm{CS}(A)}$$

は 3 次元多様体の位相不変量 (Witten 不変量) を与える.

理論の古典解は,

$$\delta \mathrm{CS} = 0 \Longleftrightarrow dA + A \wedge A = 0$$

より, 平坦接続 ($\leftrightarrow \rho : \pi_1(M) \to SL_2(\mathbb{C})$ mod conj.) である.

$\hbar := \frac{2\pi i}{k}$ とおく. 停留点の方法より, $\hbar \to 0$ においては,

$$Z(M) \sim \sum_{A:\text{平坦}} Z^{(A)}(M),$$
$$Z^{(A)} = \exp\left(\frac{1}{\hbar} c_0^{(A)} + c \log \hbar + \sum_{n \geq 0} c_{n+1}^{(A)} \hbar^n\right)$$

と摂動展開される. 係数 $c_n^{(A)}$ は n ループをもつ trivalent Feynman グラフにわたる和である.

定義. (Dimofte, Gukov, Lennels, Zagier)
場の摂動理論が古典解 A で**数論的**とは, $c_n^{(A)} \in k$ $(n > 1)$, $c_1^{(A)} \in \mathbb{Q} \log k$ なる有限次代数体 k が存在すること.

予想. M を 3 次元完備双曲多様体, A° を完備双曲構造のホロノミー表現に対応する平坦接続とする. このとき, $SL_2(\mathbb{C})$ Chern-Simons 摂動理論は数論的であろう. より詳しく, $(2\pi i)^{n-1} c_n^{(A^\circ)}$ $(n > 1)$ は混合 Tate モチーフ $\mathbb{Q}(n-1)$ の周期であろう.

注. $\lim_{\hbar \to 0} h \log Z^{(A^\circ)}(M) = c_0(A^\circ) = \mathrm{CS}(M) + \mathrm{Vol}(M)$ が成り立つ. 定理 4 を鑑みれば, これは数論における解析的類数公式の類似とみられる.

178

問題. $c_n^{(A)}$ と多重 Chern-Simons ポテンシャル $\Phi_n(A)$ の関係は？

注. 3 次元多様体 M に対し, その上に arithmetic TQFT と古典解 A があると, 数体 $k=\mathbb{Q}(c_n^{(A)};n>1)$ が定まる. これは数論的位相幾何学の類似を想起させる.

10. Chern-Simons 理論と S-双対性

双曲構造の変形とそれに伴う楕円曲線 ∂V_K のアフィン構造の変形は, 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称 Yang-Mills 理論 (Seiberg-Witten 理論) において, 真空のモジュライ (u-平面) $\mathfrak{U}$ 上に楕円曲線の族 $\mathcal{E}_u: w^2=(z^2-1)(z-u)$, $(u\in\mathfrak{U})$ がのっていることと類似している. $\lambda=(x-u)/y\cdot dx$, α,β を $H_1(\mathcal{E}_u)$ のシンプレクテック底とする.

双曲幾何	Seiberg-Witten 理論
双曲構造の変形空間 $\mathfrak{D}_K$	真空のモジュライ (u-平面) $\mathfrak{U}$
楕円曲線の変形 $\mathcal{E}\to\mathfrak{D}_K$	楕円曲線の族 $\mathcal{E}\to\mathfrak{U}$
メリディアン関数 x_K ロンジチュード関数 y_K	電荷 $a=\int_\alpha\lambda$ 磁荷 $a_D=\int_\beta\lambda$
∂V_K のモジュラス dy_k/dx_K	ゲージカップリング定数 da_D/da
Chern-Simons ポテンシャル Φ $d\Phi/dx_K=y_K$	Seiberg-Witten プレポテンシャル F $dF/da=a_D$

注. 上の類似と 7 節の類似より, 肥田理論と 4 次元ゲージ理論が繋がる.

問題. Seiberg-Witten 理論では, $da/du, da_D/du$ の満たす Picard-Fuchs 型の微分方程式を解いて F を求められた. 同様なことを $SL_2(\mathbb{C})$ Chern-Simons 理論で行え.

最後に, 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称 Yang-Mills 理論の S-双対性 (電磁双対性) は, 双対群 $SL_2(\mathbb{C})$ と ${}^LSL_2(\mathbb{C})=SO_3(\mathbb{C})$ に対する Chern-Simons 理論の間の双対性を導くことに注意する ([D], [DG]). 特に, 分配関数は結合定数の変換 $\hbar\leftrightarrow -4\pi^2/\hbar$ のもとで移りあう. これは Gauss の相互律の非可換 Chern-Simons 理論版とみなされる.

179

参考文献

[D] T. Dimofte, Quantum Riemann surfaces in Chern-Simons theory, arXiv:1102.484v2 [hep-th], 2011.
[DG] T. Dimofte, S. Gukov, Chern-Simons theory and S-duality, arXiv:1106.4550v1 [hep-th], 2011.
[DGLZ] T. Dimofte, S. Gukov, J. Lenells, and D. Zagier, Exact results for perturbative Chern-Simons theory with complex gauge group, Commun. Number Theory Phys., 3(2), 2009, 363 - 443.
[K1] 加藤晃史, 双対性の役割, 別冊・数理科学「双対性の世界」, 2007.
[K2] 加藤晃史, 場の量子論入門講座, 数理科学「数学における場の量子論」, 2007, 8 月号.
[M1] 森下昌紀, 素数と結び目 – 代数的整数論と 3 次元トポロジーの類似について –, 第 47 回代数学シンポジウム報告集, 2002, 157–171.
[M2] M. Morishita, Knots and Primes – An Introduction to Arithmetic Topology, Universitext, Springer, 2012.
[MT1] M. Morishita, Y. Terashima, Chern-Simons variation and Deligne cohomology, in: Spectral Analysis in Geometry and Number Theory on Professor Toshikazu Sunada's 60th birthday, Contemporary Math., 484, AMS, 2009, 127 - 134.
[MT2] M. Morishita, Y. Terashima, The universal deformation and the associated homological invariants, in preparation.
[TY] Y. Terashima, M. Yamazaki, Semiclassical Analysis of the 3d/3d Relation, arXiv:1106.3066[hep-th], 2011.

180