Behavior of Serre functors and Galois covering.

源　泰幸

概 要

quasi-Fano 代数や捩じれ分数的（twisted fractionally）Calabi-Yau 代数の研究はまだ始まったばかりです。なのでその例をたくさん作る事は大事だろう、と言うのが今回の研究の動機です。実際、有限次元代数が上記の性質を持つ事と有限群による商代数が上記の性質を持つ事の同値性が示せたので、幾らでも例を作る事が出来る様になりました。

第二節では quasi-Fano 代数、捩じれ分数的 Calabi-Yau 代数の定義を与えます。第三節では Galois 被覆の復習をした後に主定理の紹介をします。第四、五節は例を幾つか挙げます。第四節は Calabi-Yau で、第五節は Fano です。講演した際には計算の仕方を省略したので少し詳しく解説します。第六節では、McKay 対応に関係ありそうな導来圏同値を紹介します。

1　記号や取り決め

k を体とします、ベクトル空間、代数、有限次元代数 etc はこの体 k 上の物を意味します。

特に断らない限り加群と言えば右加群の事を言う事にします。こういう文言があると結局左加群は一度も出てこない事が大抵ですが、今回はそうではありません。第六節で少し左加群が出てきます。

Λ は有限次元代数を表し $\mathrm{mod}\,\Lambda$ はその有限生成加群の圏を表します。この有界導来圏を $\mathcal{D}^b_\Lambda$ と書くことにします：$\mathcal{D}^b_\Lambda := D^b(\mathrm{mod}\,\Lambda)$。

2　quasi-Fano 代数、捩じれ分数的 Calabi-Yau 代数。

• **Serre 関手**　quasi-Fano 代数、捩じれ分数的 Calabi-Yau 代数は Serre 関手の性質により定義されています。先ず、有限次元代数 Λ の Serre 関手の定義を復習します。

Λ は自然に両側 Λ 加群の構造を持っているので、その k 双対 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}\,k}(\Lambda, k)$ にも自然に両側 Λ 加群の構造が入ります。それを $D(\Lambda)$ と書くことにします。暫くは Λ の大域次元を有限と仮定して、導来テンソル積 $-\otimes^{\mathbf{L}}_\Lambda D(\Lambda)$ が導来圏 $\mathcal{D}^b_\Lambda$ に定める自己関手を $\mathbb{S}$ と書くことにします。

$$\mathbb{S} := -\otimes^{\mathbf{L}}_\Lambda D(\Lambda) : \mathcal{D}^b_\Lambda \longrightarrow \mathcal{D}^b_\Lambda$$

するとこの $\mathbb{S}$ は Serre 関手になります。つまり、次の関手的な同型が存在します：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b_\Lambda}(X, Y) \cong D\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b_\Lambda}(Y, \mathbb{S}(X))$$

ここで X, Y は $\mathcal{D}^b_\Lambda$ の対象です。詳しくは [3] をご覧ください。

• **自己同型で捻った加群**　ϕ を Λ の代数としての自己同型とします。Λ 加群 M に対して新たな加群 M_ϕ を次の様に定義します:

先ず M_ϕ の下部ベクトル空間としての構造は M と同じものとします。次に Λ の作用を $m \in M, a \in \Lambda$ に対して $m *_{\mathrm{new}} a := m *_{\mathrm{old}} \phi(a)$ で定めます。ここで右辺は元々の M に対する Λ の作用です。

これがきちんと加群の構造を与えている事は直ぐに分かります。またこの操作が関手的である事も直ぐに分かります。これと同様な構成は左加群に対しても定義出来ます。また M が両側加群の場合に M_ϕ と書いた時には右加群の構造だけ弄って左加群の構造は変えていない事に注意します。Λ_ϕ は両側加群です。右加群の同型 $M_\phi \cong M \otimes_\Lambda \Lambda_\phi$ が任意の右加群 M に対し成り立つ事は簡単に分かります。Λ_ϕ は左加群として自由なので関手 $- \otimes_\Lambda \Lambda; \operatorname{mod}\Lambda \to \operatorname{mod}\Lambda$ は完全関手にです。よってこの関手は複体の間の擬同型を保つので、複体 $X \in \mathcal{D}_\Lambda$ に対して新たな複体 X_ϕ を定める事が出来ます。

これだけの準備の下に、quasi-Fano 代数、捩じれ分数的 Calabi-Yau 代数は次で定義されます。

Definition 2.1. Λ を大域次元有限の有限次元代数とする。

1. 自然数 n と $m \neq 0$ に対して、Λ が捩じれ分数的 $\frac{n}{m}$ Calabi-Yau 代数 (twisted fractionally $\frac{n}{m}$ Calabi-Yau algebra) であるとは、ある代数としての自己同型 ϕ が存在して、

$$D(\Lambda)_\phi^{\otimes^{\mathbf{L}}_\Lambda m} \cong [n]$$

が両側加群の導来圏 $\mathcal{D}^b_{\Lambda^e}$ で成り立つ事である。

特に $\phi = \mathrm{id}_\Lambda$ であるとき（「捩じれ」を外して）分数的 $\frac{n}{m}$ Calabi-Yau 代数と呼ぶ。

2. 自然数 n に対して、Λ が n quasi-Fano 代数であるとは、任意の $p \geq 0$ に対して $(D(\Lambda)[-n])^{\otimes^{\mathbf{L}}_\Lambda -p}$ が次数 0 に集中している複体である（つまり、H^i (上の複体) $= 0$ for $i \neq 0$ が成り立つ）事である。

Remark 2.2. １．捩じれ分数的 Calabi-Yau 代数については [4, 9] とそこに挙げられている関係ありそうな文献をご覧下さい。quasi-Fano 代数については [7, 8] をご覧下さい。

quasi-Fano 代数には色々と変種があります。[7] ではこれは extremely quasi-Fano 代数と呼ばれています。表現論的には上の定義が一番自然だと思います。そのうちこれが quasi を外して Fano 代数と呼ばれるようになるかも知れません。

２．捩じれのない分数的 C-Y 代数も捩じれ分数的 C-Y 代数の特別なものとします。

既知の quasi-Fano 代数、捩じれ分数的 Calabi-Yau 代数から新たのものを作る方法としてはテンソル積があります。

Proposition 2.3. ここでは k は完全体であるとします。

1. Λ, Λ' を捩じれ分数的 *Calabi-Yau* 代数で、それぞれの *CY* 次元を $\frac{n}{m}, \frac{n'}{m'}$ とします。このとき、$\Lambda \otimes_k \Lambda'$ は捩じれ分数的 $\frac{n"}{m"}$ *Calabi-Yau* 代数である。ここで $m"$ は m と m' の最小公倍数であり、$n" := m" \left(\frac{n}{m} + \frac{n'}{m'} \right)$ と定められています。

2. Λ, Λ' を次元 n, n' の *quasi-Fano* 代数とする。このとき、$\Lambda \otimes_k \Lambda'$ は $n+n'$-*quasi-Fano* 代数である。

3 Galois 被覆と主結果

3.1 Galois 被覆

有限群 G が基本的 (basic) 有限次元代数 Λ に左から作用しているとします。さらに仮定として、

仮定 3.1. Λ の原始冪等元の完全系 $\mathcal{E}$ を一つ固定して、G の作用により $\mathcal{E}$ は安定であるとします。つまり、$g \in G, e_i \in \mathcal{E}$ に対して $ge_i \in \mathcal{E}$ である（が $ge_i = e_i$ とは限らない）。

を設定します。クイバーと関係式で定義された代数を考察の対象とするので、これは自然な仮定です。

取り敢えず、商代数 $\Lambda/G = \Lambda * G$ の定義を与えてから、それの説明をします。

Definition 3.2. 有限群 G が基本的有限次元代数 Λ に仮定 3.1 を満たして作用しているとする。この時、商代数とは捩じれ群環 $\Lambda * G$ の事であり、また軌道圏 Λ/G のことである。

然るべき同一視の下で $\Lambda * G = \Lambda/G$ が成り立ちます。以下、この事を説明します。

捩じれ群環 $\Lambda * G$ とは次の様に定義されるのでした。先ずベクトル空間としては $\Lambda \otimes kG$ です。$x \otimes g$, $(x \in \Lambda, g \in G)$ を $\Lambda * G$ の元と考えたものを $x * g$ と書くことにします。すると $\Lambda * G$ の積は $(x * g)(y * h) := xg(y) * gh$ で定められます。これ以降は $\Lambda * G$ を Λ/G と記します：$\Lambda/G := \Lambda * G$。これは軌道圏の記号と適合させる為です。

捩じれ群環の定義は簡単ですが、環の表示を求めようとすると軌道圏と考えた方が便利です。詳しくは、少し先の計算例をご覧ください。

軌道圏とは次の様なものでした。線形圏 $\mathcal{C}$ に群 G が（ある条件を満たして）作用していると、線形圏 $\mathcal{C}/G$ と関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ があって G 作用を吸収する線形圏 $\mathcal{C}'$ への関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ の中で普遍的なものが自然同型を除いて一意的に定まるのでした。詳しくは [1, 2] をご覧ください。有限次元代数 Λ から次の様に線形圏を作ると、捩じれ群環 $\Lambda * G$ は軌道圏 Λ/G とは同じものと見做せます。

代数 A と線形圏 $\mathcal{C}$ の対応を復習しましょう。代数 A とその冪等元の完全系 $\mathcal{F}$ の組みに対して線形圏 A^{cat} は次の様に定まるのでした。先ず A^{cat} の対象の集合は $\mathcal{F}$ です。原始冪等元 $e_a \in \mathcal{F}$ に対応する対象を a と記します。そして、射の集合は $a, b \in \mathrm{Ob}(A^{\mathrm{cat}})$ に対して次の様に定めます。

$$A^{\mathrm{cat}}(a, b) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\,A}\left(e_a A, e_b A\right).$$

つまり、A^{cat} は直既約射影加群 $e_a \Lambda$ が $\mathrm{Mod}\,A$ 内で張る充満部分圏です。一方、対象の個数が有限な線形圏 $\mathcal{C}$ s.t. $\#\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) < \infty$ から次の様にして代数 $\mathcal{C}^{\mathrm{alg}}$ が定まります。

$$\mathcal{C}^{\mathrm{alg}} := \bigoplus_{a,b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathcal{C}(a, b).$$

それぞれが逆の操作であるのは簡単に分かります：

$$(A^{\mathrm{cat}})^{\mathrm{alg}} \cong A, (\mathcal{C}^{\mathrm{alg}})^{\mathrm{cat}} \simeq \mathcal{C}.$$

ただし冪等元の集合 $\mathcal{F}$ は $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ とします。以下では代数 A と線形圏 A^{alg} を適宜同一視します。こうする事の利点は代数 A のクイバーと関係式による表示が得られる事です。

仮定の下では有限群 G の有限次元代数 Λ への作用は線形圏 Λ^{cat} への作用にもなり、さらに次が成り立ちます：

$$(\Lambda * G)^{\mathrm{cat}} \simeq (\Lambda^{\mathrm{cat}})/G.$$

直ぐ上で決めた同一視の下では同型 $\Lambda * G \cong \Lambda/G$ が成り立つ訳です。

手始めに簡単な例を幾つか見てみましょう。

と、その前に軌道圏の定義を復習しましょう。

注意：以下で説明するのは我々の状況に特化した場合の軌道圏の定義です。一般的な場合とは少し異なります。一般的な場合については浅芝先生の [1] を見てください。

まず、軌道圏Λ/Gの対象は元々の圏Λと同じです。つまり、$\mathrm{Ob}\Lambda/G := \mathrm{Ob}\Lambda = \mathcal{E}$です。ただし、$\Lambda$の対象$a, b, \ldots$に対応する$\Lambda/G$の対象を$\bar{a}, \bar{b}, \ldots$の様に上にバーを付けて表す事にします。Hom集合を次の様に定義します。

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda/G}(\bar{a}, \bar{b}) := \left(\bigoplus_{g,h \in G} \mathrm{Hom}_{\Lambda}(ga, hb) \right)^G$$

右辺の右肩のGは対角的なG作用による不変部分空間をとる事を意味しています。つまり、$\bar{a}$から$\bar{b}$への射$\bar{x}$とは$x_{h,g} \in \mathrm{Hom}_{\Lambda}(ga, hb)$の組み$\bar{x} = (x_{h,g})_{g,h \in G}$で条件$fx_{h,g} = x_{fh,fg}$を満たすものの事です。射の合成は次の様に定義します。$\bar{x} = (x_{h,g}) : \bar{a} \to \bar{b}$と$\bar{y} = (y_{h,g}) : \bar{b} \to \bar{c}$の合成$\bar{y}\bar{x}$の$(g, h)$成分$(\bar{y}\bar{x})_{h,g}$を次で定める：

$$(\bar{y}\bar{x})_{h,g} := \sum_{f \in G} y_{h,f} x_{f,g}$$

つまり、行列の積と同じです。この定義により圏が定義される事は各自確かめてみて下さい。また、関手（代数の言葉で言えば代数の準同型）$F : \Lambda \to \Lambda/G$が$F(a) := \bar{a}, F(x)_{h,g} := (gx\delta_{h,g})$で与えられる事も直ぐ確かめられます。（$\delta_{h,g}$はクロネッカーのデルタです。つまり、射は対角行列に送る事で対応させます。）

さて、例を見てみる事にしましょう。

Example 3.3. Λを下のクイバーの道代数とします。

$$a_+ \xrightarrow{x_+} b_+$$

$$a_- \xrightarrow{x_-} b_-$$

gを生成元とする二次巡回群をGとします：$G =< g > \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。$G$の$\Lambda$への作用を

$$g\Box_{\pm} := \Box_{\mp}, \text{ for } \Box = a, b, x$$

この様に定義します。つまり、gは直積の成分を入れ替えの作用を表しています。

商代数がどうなるか考えてみましょう。同じ矢印を同一視しているのだから、、、と、安直に考えると得られるクイバーは下の様な単に一本の矢印になってしまいそうです。

$$\longrightarrow$$

ところが、Λ/Gを表すクイバーと関係式は以下の通りです：

$$\begin{tikzcd} \overline{a}_+ \arrow[r, "\overline{x}_+"] \arrow[d, shift left, "s_a^+"] & \overline{b}_+ \arrow[d, shift left, "s_b^+"] \\ \overline{a}_- \arrow[r, "\overline{x}_-"] \arrow[u, shift left, "s_a^-"] & \overline{b}_- \arrow[u, shift left, "s_b^-"] \end{tikzcd}$$

$$x_{\mp} s_a^{\pm} = s_b^{\pm} x_{\pm}, s_{\Box}^{\mp} s_{\Box}^{\pm} = 1_{\Box_{\pm}} \text{ for } \Box = a, b.$$

想像される物とは少し違います。

どの様にして上のクイバーと関係式が得られるのか見て見ましょう。

まず、定義から

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda/G}(\bar{a}_+,\bar{a}_-)=\begin{pmatrix}\mathrm{Hom}_\Lambda(a_+,a_-) & \mathrm{Hom}_\Lambda(ga_+,a_-)\\ \mathrm{Hom}_\Lambda(a_+,ga_-) & \mathrm{Hom}_\Lambda(ga_+,ga_-)\end{pmatrix}^G$$

ですが、

$$ga_\pm=a_\mp,\mathrm{Hom}_\Lambda(a_\pm,a_\pm)=k1_{a_\pm},\mathrm{Hom}_\Lambda(a_\pm,a_\mp)=0$$

なので、

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda/G}(\bar{a}_+,\bar{a}_-)=\begin{pmatrix}0 & k1_{a_-}\\ k1_{a_+} & 0\end{pmatrix}^G$$

となります。更に $g1_{a_\pm}=1_{a_\mp}$ なので

$$s_a^+:=\begin{pmatrix}0 & 1_{a_-}\\ 1_{a_+} & 0\end{pmatrix}$$

と定めると

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda/G}(\bar{a}_+,\bar{a}_-)=ks_a$$

が成り立ちます。他の $s^\pm_{a\text{ or }b}$ も同様に

$$s^\pm_\square:=\begin{pmatrix}0 & 1_{\square_\mp}\\ 1_{\square_\mp} & 0\end{pmatrix}\text{ for }\square=a,b$$

で定めます。すると

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda/G}(\square_\pm,\square_\mp)=ks^\pm_\square$$

である事が上と同様に分かります。また、

$$\bar{x}_\pm=\begin{pmatrix}x_\pm & 0\\ 0 & x_\mp\end{pmatrix}$$

と定めると、

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda/G}(\bar{a}_\pm,\bar{b}_\pm)=k\bar{x}_\pm$$

である事が分かります。更に

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda/G}(\square_\pm,\square_\pm)=k1_{\square_\pm}$$

である事も分かります。これらの関係式は簡単に計算出来ます。結果は

$$s^\mp_\square s^\pm_\square=1_{\square_\pm},x_\mp s^\pm_a=s^\pm_b x_\pm$$

です。そして $z_\pm:=x_\mp s^\pm_a=s^\pm_b x_\pm$ と定めると

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda/G}(\bar{a}_\pm,\bar{b}_\mp)=kz_\pm$$

である事も分かります。これで全ての Hom 空間と関係式が分かりました。

上の関係式 $s^\mp_a s^\pm_a=1_{a_\pm}$ から Λ/G の対象 $\bar{a}_+$ と $\bar{a}_-$ は同型です。代数の言葉で言うと、$\bar{a}_+$ に対応する射影加群と $\bar{a}_-$ に対応する射影加群は同型です。同じ事は、$\bar{b}_+$ と $\bar{b}_-$ に対しても言えます。よって、Λ/G と森田同値類（圏 $(\Lambda/G)^{\mathrm{cat}}$ の言葉では圏同値）を考えると $\bar{a}_+$ と $\bar{b}_+$ に対応する射影加群だけを

考えればいい事になります。そこで $A := \bar{a}_+$, $B := \bar{b}_+$, $X := \bar{x}_+$ とおくと Λ/G と森田同値であり基本的（basic）な代数 $(\Lambda/G)^{\mathrm{basic}}$ のクイバーは

$$A \xrightarrow{X} B$$

になり関係式は無くなる事が分かります。こうすると目出度く想像していたものと同じクイバーが得られた訳です。

今の場合、群 G がクイバーに自由に作用していました。一般にこの様な場合には商代数に森田同値な基本的な代数 $(\Lambda/G)^{\mathrm{basic}}$ のクイバーは安直に想像される物になっています。また群 G がクイバーに自由に作用していなくても頂点集合 $\mathcal{E}$ に自由に作用している場合にも得られるクイバーは考え易いものになっていることが分かります。そこで次には群 G が頂点 $\mathcal{E}$ に自由に作用していない場合を考えてみましょう。

Example 3.4. Λ を次のクイバー Q の道代数 $\Lambda := kQ$ とします。

$$Q:\ a \xrightarrow{x} b$$

これに二次巡回群 $G =< g >\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に自明に作用しているとします。つまり、

$$ga := a, gb := b, gx := x.$$

商代数 Λ/G のクイバーと関係式は次です：

$$\begin{tikzcd} \bar{a} \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\bar{x}_+"] \arrow[r, shift right, "\bar{x}_-"'] & \bar{b} \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

$$\bar{x}_\pm\alpha = \bar{x}_\mp, \beta\bar{x}_\pm = \bar{x}_\mp, \alpha^2 = 1_a, \beta^2 = 1_b.$$

クイバーと圏と代数を同一視したとき恒等射と冪等元が同一視される、つまり $1_a = e_a$ が成り立つ事を思い出しましょう。ここで何が起こるかと言うと、基礎体 k の標数 $\mathrm{char}k$ が 2 でないとき、冪等元 $e_{\bar{a}}, e_{\bar{b}}$ が原始的では無くなってしまいます。というのは、

$$A_\pm := \frac{1}{2}\left(1_{\bar{a}} \pm \alpha\right), B_\pm := \frac{1}{2}\left(1_{\bar{b}} \pm \beta\right)$$

と置くと

$$A_+ + A_- = 1_{\bar{a}}, B_+ + B_- = 1_{\bar{b}}, A_\pm^2 = A_\pm, B_\pm^2 = B_\pm$$

が成り立つからです。更に、

$$X_\pm := x_+ \pm x_-$$

と置くと

$$X_\Box A_\triangle = X_\Box\delta_{\Box,\triangle}, B_\triangle X_\Box = \delta_{\triangle,\Box}$$

が成り立ちます。ここで δ はクロネッカーのデルタです。よって $\mathrm{char}k \neq 2$ のとき、Λ/G のクイバーと関係式は次の様になる事が分かります。先ず、クイバーは

$$A_+ \xrightarrow{X_+} B_+$$

$$A_- \xrightarrow{X_-} B_-$$

であり、関係式は無くなってしまいます。今の場合は群で代数を割ると商代数のクイバーは元のクイバーを二つにパカッと割った物が出てくる訳です。

Example 3.5. Λ を次の A_3 型クイバーの道代数とします：

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & b_+ \\ a \arrow[ur, "x_+"] \arrow[dr, "x_-"'] & \\ & b_- \end{tikzcd}$$

これに二次巡回群 $G := \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ への作用を次の様に定めます:

$$-1a := a, -1b_\pm := b_\mp, -1x_\pm := x_\mp.$$

すると商代数 Λ/G は次のクイバーと関係式で与えられます:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & b_+ \arrow[dd, shift right, "s_b"'] \\ a \arrow["\alpha", loop left] \arrow[ur, shift left, "x_+"] \arrow[ur, shift right, "x_-"'] \arrow[dr, shift left, "x_-"] \arrow[dr, shift right, "x_+"'] & \\ & b_- \arrow[uu, shift right, "t_b"'] \end{tikzcd}$$

$$x_\pm s_b = x_\mp, x_\pm t_b = x_\mp, x_\pm \alpha = x_\mp,$$
$$t_b s_b = 1_{b_+}, s_b t_b = 1_{b_-}, \alpha^2 = 1_a.$$

この Λ/G と森田同値で基本的なもの Λ' は次のクイバーと関係式で与えられます:

$$\begin{tikzcd} \bar{a} \arrow["\alpha", loop left] \arrow[r, shift left, "\bar{x}_+"] \arrow[r, shift right, "\bar{x}_-"'] & \bar{b}_+ \end{tikzcd}$$

$$\bar{x}_\pm \alpha = \bar{x}_\mp, \alpha^2 = 1_{\bar{a}}.$$

さらに char $k \neq 2$ と仮定して次の様に定めます：

$$A_\pm := \frac{1}{2}(1_{\bar{a}} \pm \alpha), B := \bar{b}_+, X_\pm := \bar{x}_+ \pm \bar{x}_-.$$

すると $\{A_\pm, B\}$ は原始直交冪等元の完全系になり $X_\pm A_\pm = X_\pm, X_\mp A_\pm = 0$ が成り立ちます。
よって Λ' は次のクイバーの道代数であると分かります。

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] A_+ \arrow[dr, "X_+"] & \\ & B \\ A_- \arrow[ur, "X_-"'] & \end{tikzcd} .$$

Remark 3.6. 皆さんお気づきの通り、いま得られた代数 Λ' に然るべく $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を作用させて商代数を作ると元の代数 Λ が得られます。また最初の例 3.3 と二つ目の例 3.4 も同様に逆回しの関係になっていて、割る前の代数と割った後の代数が逆転しています。この現象は Cohen-Montgomery 双対性の帰結で、（標数に対する仮定の下で）一般的に成り立つ事です。

3.2 主結果

上で見てきた様に冪等元 $e_a \in \mathcal{E}$ の安定化部分群 $\operatorname{stab} e_a := \{g \in G \mid ge_a = e_a\}$ の位数が基礎体の標数で割り切れる時には良くない事が起こっていました。そこで、次の仮定を設けるのが自然です。（また、十分に扱いやすい条件でもあります。）

仮定 3.7. $\operatorname{char} k \nmid \#(\operatorname{stab} e_a)$ が任意の $e_a \in \mathcal{E}$ に対して成り立つとする。

quasi-Fano 代数や捩じれ分数的 CY 代数の定義には大域次元の有限性が入っていました。その為、主結果の証明には次の補題が要ります。（おそらく逆も成り立つと思います。つまり、マシュケの定理のちょっとした一般化です。）

Lemma 3.8. 有限群 G が基本的有限次元代数 Λ に仮定 *3.1, 3.7* を満たして作用しているとする。この時 Λ と Λ/G の大域次元は等しい、つまり：$\operatorname{gldim} \Lambda = \operatorname{gldim} \Lambda/G$.

もう少し強い仮定の下で、この定理は Hopf 代数の作用を持つ代数とその smash 積の大域次元が変わらない事が [6] で示されています。

Theorem 3.9. 有限群 G が基本的有限次元代数 Λ に仮定 *3.1,3.7* を満たして作用しているとする。この時、次が成り立つ。

1. Λ が捩じれ分数的 $\frac{n}{m}$-*Calabi-Yau* 代数 $\Longleftrightarrow$ Λ/G が捩じれ分数的 $\frac{n}{m}$-*Calabi-Yau* 代数。
2. Λ が n-*quasi-Fano* 代数 $\Longleftrightarrow$ Λ/G が n-*quasi-Fano* 代数。

Remark 3.10. 基本的有限次元代数 Λ が（捩じれのない）分数的 Calabi-Yau 代数であっても商代数 Λ/G が捩じれを持つ場合は有ります。例 4.1 をご覧ください。

Example 3.11. Λ を捩じれ分数的 $\frac{n}{m}$Calabi-Yau 代数（resp. n-quasi-Fano 代数）とする。命題 2.3 より、自然数 $\ell \geq 1$ に対して、$\Lambda^{\otimes_k \ell}$ は捩じれ分数的 $\frac{\ell n}{m}$Calabi-Yau 代数（resp. ℓn-quasi-Fano 代数）である。$\Lambda^{\otimes_k \ell}$ には ℓ 次対称群 S_ℓ が成分の入れ替えで作用する。つまり、$\sigma \in S_\ell$ の作用を

$$\sigma(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_\ell) := a_{\sigma(1)} \otimes a_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(\ell)}$$

で定める。この作用は仮定 3.1 を満たしている。勿論、任意の部分群 $G < S_\ell$ の誘導された作用もこの仮定を満たす。よって、G の作用が仮定 3.7 を満たすような場合定理より $\Lambda^{\otimes_k \ell}/G$ は捩じれ分数的 $\frac{\ell n}{m}$Calabi-Yau 代数（resp. ℓn-quasi-Fano 代数）です。

次の結果があります。

Theorem 3.12 (Herschend-Iyama [4])**.** 有限次元代数 Λ と正の整数 ℓ に対して次は同値。

$$\Lambda \text{は} \ell \text{ 斉次 } n \text{ 有限表現型代数。} \Longleftrightarrow \Lambda \text{は捩じれ分数的 } \frac{n(\ell-1)}{\ell} \text{CY 代数}$$

申し訳ありませんが ℓ 斉次 n 有限表現型の定義は省略します。二つの定理を併せると次の系を得ます。

Corollary 3.13. 基本的有限次元代数 Λ に有限群 G が仮定 *3.1,3.7* を満たして作用しているとする。この時、

Λ は ℓ 斉次 n 有限表現型 $\Longleftrightarrow$ Λ/G は ℓ 斉次 n 有限表現型

4　例：Calabi-Yau の場合

4.1　振じれのない分数的 CY 代数の商代数に振じれが出てくる例

　次の D_4 型クイバーの道代数を Λ とします。

$$\begin{tikzcd}
a_+ \arrow[dr, "x_+"] & & \\
& b \arrow[r, "y"] & c \\
a_- \arrow[ur, "x_-"'] & &
\end{tikzcd}$$

これに二次巡回群 $G =< g >\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を

$$g\Box_{\pm} := \Box_{\mp} \text{ for } \Box = a, x$$
$$g\Box := \Box \text{ for } \Box = b, c, y$$

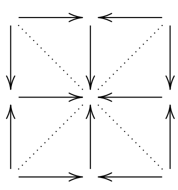
で作用させます。すると、商代数 Λ/G と森田同値で基本的なもの $\Lambda' := \Lambda/G^{\mathrm{basic}}$ は次の A_5 型クイバーの道代数です。

$$\begin{tikzcd}
& & C_+ \\
& B_+ \arrow[ur, "Y_+"] & \\
A \arrow[ur, "X_+"] \arrow[dr, "X_-"'] & & \\
& B_- \arrow[dr, "Y_-"'] & \\
& & C_-
\end{tikzcd}$$

すると [4, Section 3] より Λ は（振じれのない）分数的 $\frac{2}{3}$CY 代数です。同じく [4, Section 3] より、Λ' は振じれのある分数的 $\frac{2}{3}$CY 代数である事が分かり、Λ/G も振じれのある分数的 $\frac{2}{3}$CY 代数である事が分かります。

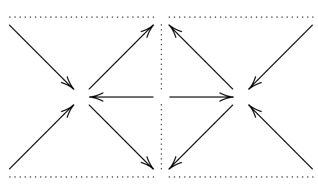
4.2　2 斉次 2 有限表現型の例

　Λ を次のクイバーと関係式で定義された有限次元代数とします :



ここで各四角形の対角に走る点線は可換性を表しています。これが 2 斉次 2 有限表現型である事は [4] から分かります。

　対角線で折り返す事で $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を作用させて割ると次のクイバーと関係式で定義される代数と森田同値になる。（$\mathrm{char} k \neq 2$）



真ん中の軸（水平な方）で折り返す事で $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を作用させて割ると次の代数と森田同値となる。（char$k \neq 2$）

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] & \bullet & \bullet \arrow[l] \\
\bullet \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, dash, dotted] \arrow[dr, dash, dotted] & \bullet \arrow[u] \arrow[d] & \bullet \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[ul, dash, dotted] \arrow[dl, dash, dotted] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet & \bullet \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

１８０度回転させる事で $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を作用させて割ると次のクイバーと関係式で定義される代数と森田同値になる。（char$k \neq 2$）

$$\begin{tikzcd}
 & & b_0 \arrow[dl, "U_+"'] \arrow[dr, "U_-"] & & \\
a_0 \arrow[urr, "x_0"] \arrow[drr, "y_0"'] & C_+ & & C_- & a_1 \arrow[ull, "y_1"'] \arrow[dll, "x_1"] \\
 & & b_1 \arrow[ul, "U_+"] \arrow[ur, "V_-"'] & &
\end{tikzcd}$$

関係式は少しだけ複雑になります。a_0 から $C_\pm$ へ行く二つの道は可換、つまり、$U_\pm x_0 = V_\pm y_0$ であり、a_1 から $C_\pm$ へ行く道には $U_\pm y_1 = \pm V_\pm x_1$ という関係式があります。

９０度ずつ回転させる事で $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を作用させて割ると次のクイバーと関係式で定義される代数と森田同値になる。（char$k \neq 2$ and $i = \sqrt{-1} \in k$.）

$$\begin{tikzcd}
 & & C_0 \\
 & & C_1 \\
A \arrow[r, shift left, "X"] \arrow[r, shift right, "Y"'] & B \arrow[uur, "Z_0"] \arrow[ur, "Z_1"'] \arrow[dr, "Z_2"] \arrow[ddr, "Z_3"'] & \\
 & & C_3 \\
 & & C_2
\end{tikzcd}$$

$$Z_p X = i^p Z_p Y$$

計算過程を説明します。先ず、クイバーの頂点と矢印に次の様に名前を付けます：

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "x_0"] \arrow[d, "y_0"'] \arrow[dr, dash, dotted] & b_0 \arrow[d, "z_0"] & a_3 \arrow[l, "y_3"'] \arrow[d, "x_3"] \arrow[dl, dash, dotted] \\
b_1 \arrow[r, "z_1"] & c & b_3 \arrow[l, "z_3"] \\
a_1 \arrow[u, "x_1"] \arrow[r, "y_1"'] \arrow[ur, dash, dotted] & b_2 \arrow[u, "z_2"] & a_2 \arrow[u, "y_2"'] \arrow[l, "x_2"] \arrow[ul, dash, dotted]
\end{tikzcd}$$

すると関係式は

$$z_i x_i = z_{i+1} y_i$$

となります。ただし、添え字の i は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ の元と見て下さい。すると群の作用は

$$ic := c, i\square_j := \square_{i+j} \text{ for } \square = a, b, x, y, z$$

と表せます。この時、群 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 作用による頂点の軌道の代表系としては a_0, b_0, c が取れます。その事から商代数 Λ/G と森田同値で基本的な物を考える際に相手にすべき頂点を上の三つ a_0, b_0, c に絞れます。それで計算をすると得られるクイバーと関係式は

$$\begin{tikzcd} \overline{a}_0 \arrow[r, shift left, "\overline{y}"] \arrow[r, shift right, "\overline{x}"'] & \overline{b}_0 \arrow[r, "\overline{z}_{0,1,2,3}", "4\text{arrows}"'] & c \arrow[loop right, "\gamma"] \end{tikzcd}, \quad \overline{z}_i\overline{x} = \overline{z}_{i+1}\overline{y}, \gamma\overline{z}_i = \overline{z}_{i+1}, \gamma^4 = 1_{\overline{c}}.$$

になります。そして、$\mathrm{char} k \neq 2, \sqrt{-1} \in k$ を仮定して次の様に定めると上にあげたクイバーと関係式が得られます。

$$A := \overline{a}_0, B := \overline{b}_0, C_\ell := \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} \sqrt{-1}^{-i\ell}\gamma^i, X := \overline{x}, Y = \overline{y}, Z_\ell := \sum_{i=0}^{3} \sqrt{-1}^{-i\ell}\overline{z}_i$$

4.3 $(3,3,3)$ 型の標準代数

次の代数は $(3,3,3)$ 型の標準代数と呼ばれている代数の特別な場合です。先ずクイバーは

$$\begin{tikzcd} & b_0 \arrow[r, "y_0"] & c_0 \arrow[dr, "z_0"] & \\ a \arrow[ur, "x_0"] \arrow[r, "x_1"] \arrow[dr, "x_2"'] & b_1 \arrow[r, "y_1"] & c_1 \arrow[r, "z_1"] & d \\ & b_2 \arrow[r, "y_2"] & c_2 \arrow[ur, "z_2"'] & \end{tikzcd}$$

で関係式は

$$z_0y_0x_0 + z_1y_1x_1 + z_2y_2x_2 = 0$$

です。これに三次巡回群 $G := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を頂点 a, d には自明に作用させ残りの頂点と矢印には

$$i\square_j := \square_{i+j} \text{ for } \square = b, c, x, y, z.$$

で作用させます。

この作用による商代数 Λ/G の基本化 $(\Lambda/G)^{\mathrm{basic}}$ のクイバーと関係式は

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[dr, "X_0"] & & & D_0 \\ A_1 \arrow[r, "X_1"] & B \arrow[r, "Y"] & C \arrow[ur, "Z_0"] \arrow[r, "Z_1"] \arrow[dr, "Z_2"'] & D_1 \\ A_2 \arrow[ur, "X_2"'] & & & D_2 \end{tikzcd}$$

$$Z_iYX_i = 0 \text{ for } i = 0, 1, 2$$

となります。

少し面白い事が起こっています。まず、次のクイバーと超潜在能力（super potential）を考えます。（ここら辺の用語は [5] を見て下さい。）

$$\begin{tikzcd}
 & b_0 \arrow[r, "y_0"] & c_0 \arrow[dr, "z_0"] & \\
a \arrow[ur, "x_0"] \arrow[r, "x_1"] \arrow[dr, "x_2"'] & b_1 \arrow[r, "y_1"] & c_1 \arrow[r, "z_1"] & d \arrow[lll, bend right=60, "u"'] \\
 & b_2 \arrow[r, "y_2"] & c_2 \arrow[ur, "z_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$$W := u(z_0y_0x_0 + z_1y_1x_1 + z_2y_2x_2)$$

元の標準代数 Λ はこれの Jacobi 代数から矢印 u を切り外す事で得られます。一方で、Λ' の方は矢印 $y_0.y_1, y_2$ を切り外す事で（ラベリングは違うけれども）得られます。

例 3.5 では商を取る前と後の代数は BGP 反射の関係にありました。割る前の代数と割った後の代数がまた別の仕方で関係しているというのは何か不思議な感じがします。勿論、単なる偶然かも知れませんが、何か一般的な現象があるのかも知れません。

5　例：Fano の場合

無限表現型のクイバーの道代数は 1-Fano 代数である事が知られています（[7, Proposition 5.1]）。先ず二つの例を考えて見ましょう。

5.1　$\tilde{E}_6 \leftrightarrow \tilde{D}_4$

Λ を次の向きを付けた $\tilde{E}_6$ 型クイバーの道代数とします:

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dr, "x_1"] & & & & \\
 & b_1 \arrow[dr, "y_1"] & & & \\
 & & c & b_0 \arrow[l, "y_0"'] & a_0 \arrow[l, "x_0"'] \\
 & b_2 \arrow[ur, "y_2"] & & & \\
a_2 \arrow[ur, "x_2"] & & & &
\end{tikzcd}$$

これに三次巡回群 $G = \langle g \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の作用を次の様にいれます:

$$ga_i := a_{i+1}, gb_i := b_{i+1}, gc := c, gx_i := x_{i+1}, gy_i := y_{i+1}$$

ここで添え字 $_i$ は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の元と思ってください. 更に char$k \neq 3$ を仮定します. すると商代数 Λ/G は次の向きを持った $\tilde{D}_4$ 型クイバーの道代数になります:

$$\begin{tikzcd}
C_0 & & \\
C_1 & B \arrow[ul] \arrow[l] \arrow[dl] & A \arrow[l] \\
C_2 & & .
\end{tikzcd}$$

5.2 $\tilde{E}_6 \leftrightarrow \tilde{E}_7$

Λ を先ほどと同じ $\tilde{E}_6$ 型クイバーの道代数とします:

$$\begin{tikzcd}
a_+ \arrow[dr, "x_+"] & & & & \\
& b_+ \arrow[dr, "y_+"] & & & \\
& & c \arrow[r] & d \arrow[r] & c \\
& b_- \arrow[ur, "y_-"] & & & \\
a_- \arrow[ur, "x_-"] & & & &
\end{tikzcd}$$

これに二次巡回群 $G = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の作用を次の様に入れます:

$$-1a_\pm := a_\mp, -1b_\pm := b_\mp, -1x_\pm := x_\mp, -1y_\pm := y_\mp$$

他の頂点や矢印には G は自明に作用する．もし $\mathrm{char}k \neq 2$ ならば、商代数 Λ/G は次の $\tilde{E}_7$ 型クイバーの道代数に森田同値です:

$$\begin{tikzcd}
& & & & E_+ \\
& & & D_+ \arrow[ur] & \\
& & C_+ \arrow[ur] & & \\
A \arrow[r] & B \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & C_- \arrow[dr] & & \\
& & & D_- \arrow[dr] & \\
& & & & E_-
\end{tikzcd}$$

5.3 Beilinson 代数

Definition 5.1. 自然数 n, m に対して一般化 Beilinson 代数 $B_{n,m}$ (over k) を次のクイバーと関係式で定めます：

$$0 \mathrel{\substack{\xrightarrow{x_0^{(0)}} \\ \vdots \\ \xrightarrow[x_m^{(0)}]{}}} 1 \mathrel{\substack{\xrightarrow{x_0^{(1)}} \\ \vdots \\ \xrightarrow[x_m^{(1)}]{}}} 2 \mathrel{\substack{\xrightarrow{x_0^{(2)}} \\ \vdots \\ \xrightarrow[x_m^{(2)}]{}}} \cdots \mathrel{\substack{\xrightarrow{x_0^{(n-2)}} \\ \vdots \\ \xrightarrow[x_m^{(n-2)}]{}}} n-1 \mathrel{\substack{\xrightarrow{x_0^{(n-1)}} \\ \vdots \\ \xrightarrow[x_m^{(n-1)}]{}}} n$$

with the relations

$$x_i^{(l+1)} x_j^{(l)} = x_j^{(l+1)} x_i^{(l)} \quad \text{for}\, i, j \in \{0, \dots, m\} \,\text{and}\, l = 0, \dots, n-2.$$

$m \geq n$ の時 $B_{n,m}$ は n-quasi-Fano 代数です。

Definition 5.2. 自然数 $n, m, p \geq 2$ に対して代数 $B_{n,m,p}$ を次のクイバーと関係式で定めます：

$$
\begin{tikzcd}
(0,\overline{0}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] \arrow[dr, "x_m"] & (1,\overline{0}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] \arrow[dr, "x_m"] & (2,\overline{0}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] \arrow[dr, "x_m"] & \cdots \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] \arrow[dr, "x_m"] & (n-1,\overline{0}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] \arrow[dr, "x_m"] & (n,\overline{0}) \\
(0,\overline{1}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] \arrow[dr, "x_m"] & (1,\overline{1}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] \arrow[dr, "x_m"] & (2,\overline{1}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] \arrow[dr, "x_m"] & \cdots \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] \arrow[dr, "x_m"] & (n-1,\overline{1}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] \arrow[dr, "x_m"] & (n,\overline{1}) \\
\vdots \arrow[dr, "x_m"] & \arrow[dr, "x_m"] & \arrow[dr, "x_m"] & \arrow[dr, "x_m"] & \arrow[dr, "x_m"] & \\
(0,\overline{p-1}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] \arrow[dr, "x_m"] & (1,\overline{p-1}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] \arrow[dr, "x_m"] & (2,\overline{p-1}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] \arrow[dr, "x_m"] & \cdots \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] \arrow[dr, "x_m"] & (n-1,\overline{p-1}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] \arrow[dr, "x_m"] & (n,\overline{p-1}) \\
(0,\overline{p}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] & (1,\overline{p}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] & (2,\overline{p}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] & \cdots \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] & (n-1,\overline{p}) \arrow[r, shift left, "x_0"] \arrow[r, shift right, "x_{m-1}"'] & (n,\overline{p})
\end{tikzcd}
$$

with commutative relations: $x_i x_j = x_j x_i$ (if compositions make sense).
　注意：頂点 $(i,\overline{p})$ から頂点 $(i+1,\overline{0})$ に矢印 x_m が出ている。が、僕の技術力では書けない。

p 次巡回群 $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を $B_{m,n,p}$ に次の様に作用させます: 頂点に対しては $\overline{1}(i,\overline{j}) := (i,\overline{i+1})$。矢印に対しては $\overline{1}x_i := x_i$. すると商代数 $B_{m,n,p}/G$ は $B_{m,n}$ と同型になります. よって $m \geq n$ の時、$B_{m,n,p}$ は n-quasi-Fano になる事が分かります。

6 McKay（マッカイ）対応に関係していそうな導来圏同値

この小節では簡単の為に $k = \mathbb{C}$ とします。$\Lambda := \mathbb{C}\Omega_n$ を n-Kronecker クイバー Ω_n の道代数とします。

$$\Omega_n : a \overset{x_1}{\underset{x_n}{\rightrightarrows}} b.$$

部分空間 $V := b\Lambda a$ は n 次元のベクトル空間になります。一般線形群 $\mathrm{GL}(V)$ の有限部分群 $\Gamma \subset \mathrm{GL}(V)$ は自然に V に作用します。$a\Lambda b = 0$ なので、頂点 a, b には Γ を自明に作用させることにすれば、これで Γ の Λ への作用が定まります。

Γ の Mckay クイバーというのは次の様に定められるものでした。先ず、頂点は Γ の既約表現の集合 $I := \mathrm{Irr}\Gamma := \{S_i\}$ で与えられます。既約表現 S_i に対応する頂点を i で表します。頂点 i から頂点 j への矢印の本数は $m_{i,j} := \dim \mathrm{Hom}_\Gamma(S_j, V \otimes_k S_i)$ 本です。ここで上に表われている $V \otimes_k S_i$ は対角作用によって Γ 加群の構造を入れています。

Λ/Γ は次のクイバー Ω_n/Γ の道代数になります：$\Lambda/\Gamma := \mathbb{C}(\Omega_n/\Gamma)$。頂点は I のコピーが二つ分あります: $(\Omega_n/\Gamma)_0 = \{\bar{a}_i, \bar{b}_i\} = I \cup I$. 矢印は $\bar{a}_i$ から $\bar{b}_j$ の間にのみ $m_{i,j}$ 本の矢印があります。これを示す道筋はおおよそ次です。群環 $\mathbb{C}\Gamma$ の原始冪等元の完全代表系 s_i を $s_i\mathbb{C}\Gamma \cong S_i$ を満たす様に選びます。すると $\bar{a}_i := a * s_i, \bar{b}_i := b * s_i$ が Λ/Γ の原始冪等元の完全代表系をあたえます。また $\bar{a} = \sum_{i\in I} \bar{a}_i, \bar{b} = \sum_{i\in I} \bar{b}_i$ も成り立ちます。ベクトル空間としての同型 $\bar{b}\Lambda/\Gamma\bar{a} \cong V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\Gamma$ があります。更に $v \in V, g \in \mathbb{C}\Gamma$ に対して

$$(v * g)\bar{a}_i = v * gs_i, \qquad \bar{b}_j(v * g) = \underline{s_j v} * s_j g$$

が成り立ちます。(下線は強調の為で数学的には無意味です。) これによりベクトル空間の同型

$$\bar{b}_j\Lambda/\Gamma\bar{a}_i \cong s_j\,(V \otimes_{\mathbb{C}} S_i) \cong \mathrm{Hom}_\Gamma(S_j, V \otimes S_i)$$

が得られます。

例　$n = 2$ とします。下の 2×2 行列 g が生成する $\mathrm{GL}(2)$ の部分群を Γ とします。

$$g := \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \text{ where } \omega := \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3})$$

Γ は 3 次巡回群です。Γ の 1 次元表現 S_i, $i = 0, 1, 2$ を

$$S_i : \Gamma \to \mathbb{C} = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}),\ g \mapsto \omega^i$$

で定めるとこれらが既約表現の同型類の代表系を与えます：$I = \{S_0, S_1, S_2\}$。計算すると $i \neq j$ の時 $m_{i,j} = 1$ であり、$m_{i,i} = 0$ である事が分かります。よって、Γ の McKay クイバー Mc_Γ と Ω_2/Γ は次の様になります。

$$\mathrm{Mc}_\Gamma \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl, shift left] \arrow[dr, shift left] & \\ 2 \arrow[ur, shift left] \arrow[rr, shift left] & & 1 \arrow[ul, shift left] \arrow[ll, shift left] \end{tikzcd} \qquad \Omega_2/\Gamma \quad \begin{tikzcd} a_0 \arrow[ddrr] \arrow[ddddrr] & & b_0 \\ & & \\ a_1 \arrow[uurr] \arrow[ddrr] & & b_1 \\ & & \\ a_2 \arrow[uuuurr] \arrow[uurr] & & b_2 \end{tikzcd}$$

これまでの状況で更に次の仮定をします。

$$m_{i,j} = m_{j,i} \text{ for } i, j \in I$$

この仮定の下で次の様に次数付きクイバーと関係式で次数環 Φ_Γ を定めます。先ずクイバーは McKay クイバーとします。次数は頂点の次数は 0、矢印の次数は 1 として定めます。頂点 i から頂点 j の間には定義から $m_{i,j}$ 本の矢印がありますがこれを $x^{(p)}_{j,i}$ $p = 1, \ldots, m_{i,j}$ と書くことにします。そうしたとき関係式を

$$\sum_{j\in I}\sum_{p=1}^{m_{i,j}} x^{(p)}_{i,j} x^{(p)}_{i,j} = 0 \text{ for } i \in I$$

で与えます。次が成り立ちます。

Theorem 6.1. 上の仮定の下で、次の導来圏の同値があります。

$$D^b(\mathrm{mod}\,\Lambda/\Gamma) \simeq D^b(\mathrm{qgr}\,\Phi_\Gamma)$$

Γ が二次特殊線形群 $\mathrm{SL}(2)$ の部分群の場合には、対応する拡大 Dynkin 図形が向きを入れて二分化（bipartite）クイバーに出来る時 Φ_Γ は Γ に付随する拡大 Dynkin 図形の前射影的代数と同型になります。これは $\tilde{A}_n$（n は偶数）以外の場合に満たされます。

参考文献

[1] H. Asashiba. Covering functors, skew group categories and derived equivalence. available at arXiv. math.RT 0807.4706.

[2] P. Gabriel. The universal cover of representation-finite algebra. LNM 903 (1981) p. 68-105.

[3] D. Happel, *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, London Math. Soc. LNS, **119** Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[4] M. Herschend and O. Iyama. n-representation-finite algebras and twisted fractionally Calabi-Yau algebras. Bull. Lond. Math. Soc. 43 (2011), no. 3, 449–466.

[5] M. Herschend and O. Iyama. Selfinjective quivers with potential and 2-representation-finite algebras. to appear in Compos. Math.

[6] G. Liu. A Note on the Global Dimension of Smash Products Communications in Algebra. Volume 33, Issue 8, 2005, Pages 2625 - 2627.

[7] H. Minamoto. Ampleness of two-sided tilting complexes, IMRN, to appear.

[8] H. Minamoto and I. Mori. The structure of AS Gorenstein algebras. Adv. Math. 226(2011) pp4061-4095.

[9] J. Miyachi and A. Yekutieli. Derived Picard group of finite dimensional hereditary algebras.

Research Institute for Mathematical Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, JAPAN
minamoto@kurims.kyoto-u.ac.jp