代数学シンポジウム（岡山大学）講演２０１１年８月１１日９時半―１０時半

絶対・三角・ゼータ

黒川信重（東京工大）

§０　はじめに

今回の代数学シンポジウムにお招き頂きありがとうございます。今年は３月１１日の東日本大震災（本日８月１１日でちょうど５ヶ月です）の引き起こした大混乱の中、考えさせられることの多い日々となっています。このようなときの数学は過去数千年から未来まで熟慮したいものです。電気の問題も重大になっています。本日も暑い日です。今日の講演も節電のため、黒板に白墨という古典的方式です。

話の中身は、一元体という根源体から考える絶対数学の観点に立つと、ゼータ関数も三角関数も同じように扱えて見通しが良くなることであろう、という２５年ほど昔から考えてきたことが主ですので、気軽に聞いてください。現在では誰でも知っている絶対数学ですが、その昔は、そうではなかったのです。

問題は２５００年昔のピタゴラス（南イタリアのクロトンにピタゴラス学校・研究所を創設）たちが発見した素数の謎から来ています。彼らは素因数分解可能性や素数が無限個存在することを証明していました。その後、２０００年以上経って、１７３７年にオイラーが素数に関する積としてのゼータ関数論を始めました。とくに、素数の逆数和が無限大（これは、素数が無限個存在することより精密な結果）であることを証明しました。１８５９年には、リーマンが素数分布を解明する上でゼータ関数の零点の重要性に至り、リーマン予想を提出しました。それ以来１５２年になります。絶対数学が素数の謎に迫ることを期待しています。

この文章は、個人的感想を入れつつ、とくに若い人向けに書いています。絶対数学は建設途中の理論です。至るところに研究すべきことがたくさんあります。どうぞチャレンジしてください。

§１　絶対・三角・ゼータとは

絶対、三角、ゼータとは「絶対数学」「多重三角関数」「ゼータ関数」を指しています。各々、ここ二年以内に単行本として出版された三冊の本

●黒川信重・小山信也『絶対数学』日本評論社、２０１０年９月[絶対数学に関する世界最初の教科書]
●黒川信重・小山信也『多重三角関数論講義』日本評論社、２０１０年１１月[１９９１年４月－７月の講義の単行本化：絶対数学の原点・原典]
●黒川信重『リーマン予想の１５０年』岩波書店、２００９年１１月[リーマン予想が提出された１８５９年以来１５０年間の歴史と問題点と展望]

に詳述してあります。ぜひ、手にとって読まれることを推奨いたします。

このような研究の一つの動機としては、有名なリーマン予想を解明しよう、ということがあります。それは、ゼータ関数の零点や極の位置（主に、実部を問題にしていますが、将来的には虚部も問題にすべきものです）を求める問題です。そのためには、零点や極の和が調べられると良いとの考えから、「ゼータの多重化＝絶対テンソル積＝黒川テンソル積」が出てきました。多重三角関数とは通常の三角関数を多重化したものです。多重三角関数は、ゼータ関数の観点からは、有限体のゼータ関数何個かからの多重化になります。絶対テンソル積は一元体という根源体上のテンソル積のことです。絶対数学とは一言で言うと一元体上の数学のことです。現在、世界中で爆発的に研究が進展しています。

なお、ゼータ関数と三角関数（とくに正弦関数）が似ていることは、ゼータ関数の（期待される）基本性質

（１）　オイラー積表示
（２）　解析接続
（３）　関数等式
（４）　リーマン予想類似

が、三角関数や多重三角関数に対して成立することに明快に表れています。

三つのテーマに関する主な歴史的流れは次のとおりです：

● 絶対数学：ティッツ（１９５７年、一元体を考え、代数群のワイル群は一元体値群とみなせることを指摘）―黒川（１９８０年代、絶対テンソル積＝黒川テンソル積を発案）―マニン（１９９５年、一元体を用いたゼータ関数解釈）―・・・
● 多重三角関数：ヘルダー（１８８６年、周期$(1,1)$の二重三角関数を発見）―新谷（１９７７年、一般周期の二重三角関数を研究）―黒川（１９８０年代、一般周期の多重三角関数を研究）―・・・

● ゼータ関数：オイラー（１７３７年、ゼータ関数のオイラー積表示を発見）―リーマン（１８５９年、リーマン予想提出）―黒川（１９８０年代、絶対テンソル積＝黒川テンソル積を発案）―マニン（１９９５年、一元体を用いたゼータ関数解釈）―・・・

§２　研究のはじまり：多重ゼータ関数

研究のはじまりは、ゼータ関数の多重化です。この研究は１９８０年代中ごろからはじまっています。それは、黒川テンソル積（絶対数学の絶対テンソル積になるべきもの）の研究です。出版論文には

N. Kurokawa “On some Euler products I” Proc. Japan Acad. 60A (1984) 335-338

があります。ここには、いくつかのゼータ関数が与えられたときに、位数がそれらの位数の和になるような新たなゼータ関数（黒川テンソル積＝多重ゼータ関数）の構成法が報告されています。

そのような多重ゼータ関数が何らかのオイラー積表示を持てば、合同ゼータ関数の場合にリーマン予想を証明したドリーニュの方法にならって、本来のリーマン予想の証明にも近づけるでしょう。たとえば、ゼータ関数の零点あるいは極ρに対して、同じものをｒ個足したものｒρがｒ重ゼータ関数の零点あるいは極になるように構成し、さらに、Re(ｒρ)　が(rｍ－1)/2と(rm+1)/2の間（幅１）にあることが示されたとします。（ｒが１のときにはオイラー積と関数等式から導かれることです。）すると、ｒを無限大に飛ばすことにより、Re(ρ)がｍ/2であることがわかります。この論文では、圏(category)のゼータ関数や多重圏(multiple category)を用いるアイディアにも触れています。

ただし、残念ながら、時期が早すぎたようで、反響はほとんどなかったと記憶しています。実際、黒川テンソル積がコンヌ等々の大数学者に使われるようになったのは、四半世紀経った後の、ここ二年ほどと言えます。皆さんも、新研究が理解されなくても、めげる必要はありません。世の中への浸透に十年、二十年はかかっても不思議はありません。

なお、この論文の出版年『１９８４』はハックスレーの予言的な小説のタイトルでもあり、自動的に“すばらしき新世界”が思い浮かびます。もちろん、偶然ではありますが、上記の１９８４論文が『絶対数学』という新世界の幕開けとなっていたとしたら光栄なことです。

ここに、個人的思い出を一つ書いておきます。１９８０年代は東京工大にて、私の恩師の菅野恒雄（かんの　つねお）先生(1928年6月4日―2011年3月11日)と共同で数論セミナーを行なっていました。黒川テンソル積はそのセミナーで最初に話しました。菅野先生は、いち早く興味を示され、それは、四半世紀後の２０１０年１２月１１日に東京におけるセミナーにて私に出版直後の『絶対数学』の話を所望されるほど熱心で、力強い支えを頂きました。このたびの東

日本大震災にて陸前高田の御自宅で大津波のため帰らぬ人となられてしまいました。御冥福をお祈りいたします。

§３　多重三角関数

多重三角関数は三角関数（双曲型三角関数を考えるとわかりやすい）いくつかから多重化して得られたものです。これは、一般の多重ゼータ関数より明快ですので、そこを重点的に講義したのが１９９１年の４月－７月に東京大学（本郷キャンパス）において毎週火曜日に行った『多重三角関数論講義』です。本は私の講義を小山信也さんが記録された１１９ページのノートの単行本版です。その内容は前年１９９０年の３月－５月のジョンズ・ホプキンス大学『日米数学研究所(JAMI)』（米国、ボルチモア）における講義や、８月の東京における国際研究集会『Zeta Functions in Geometry』における講演「Multiple zeta functions」等において発表されていたものであります。

多重三角関数は三角関数やゼータ関数からの発展として現れてきたものです。そこで、三角関数とゼータ関数の解説と多重三角関数への道を振り返った文章をいくつか紹介しておきます。

●黒川信重「素数・ゼータ関数・三角関数：三つの問題」『数学のたのしみ』２００６年 夏号(８月２５日発行) ８－２８[高校生向けの講演（宇都宮市および岐阜市）の記録]
●黒川信重「三角関数への列車の旅」『数理科学』２００８年６月号[研究の思い出；２０１１年４月にサイエンス社の単行本『数学の道しるべ』に収載]
●黒川信重「問題を解くより予想を」『数学のたのしみ』３０号、２００２年４月、１１－１８[研究の時系列的紹介]
● 黒川信重「新谷卓郎の二重三角関数：実２次体のクロネッカー青春の夢の実現へ」『数学のたのしみ』２００５年１月。

１９９１年東大講義は多重三角関数の基本的性質を示すことを基調としています。基本的にすべて、当時の最新の研究成果です。応用としては、特に、セルバーグゼータ関数の関数等式に必要なガンマ因子を多重三角関数を用いて計算することを行ないました。この応用には多重三角関数のみたす微分方程式を示すことが重要でした。もともと、多重三角関数は多重ゼータ関数論と呼んでいた理論の一部にあたっています。その多重ゼータ関数論は「黒川テンソル積」と名付けられています。講義では、多重三角関数論をわかりやすく導入するために、一般の黒川テンソル積（多重ゼータ関数）の話は第１１講ではじめて導入してあります。

多重三角関数へと至った歴史をごく簡単に記しておきますと、次のようになっています：

１８８６年：ヘルダーが特殊な二重三角関数を研究
１９７７年:新谷卓郎が一般周期の二重三角関数を導入して実二次体のクロネッカー青春の夢（類体の構成問題）へと応用
１９８０年代：黒川が多重三角関数を導入。

私が多重三角関数に至ったのは、オイラーによる三角関数の無限積表示（１７３５年頃）をずっと眺めていたときでした。その無限積表示を多重化するとどうなるだろうかと夢想したのです。

オイラーについては、次を参照してください：

- 黒川信重「オイラー入門」『数理科学』２０１１年９月号。
- 黒川信重『オイラー、リーマン、ラマヌジャン：時空を超えた数学者の接点』岩波書店、２００６年。
- 黒川信重『オイラー探検：無限大の滝と１２連峰』シュプリンガー・東京、２００７年。

多重三角関数論講義を行った１９９１年周辺の発表論文にはつぎのようなものがありました：

●N.Kurokawa “Multiple sine functions and Selberg zeta functions” Proc. Japan Acad. 67A (1991) 61-64.

●N.Kurokawa “Gamma factors and Plancherel measures” Proc. Japan Acad. 68A (1992) 256-260.

●N.Kurokawa “Multiple zeta functions: an example” Advanced Studies in Pure Math. 21 (1992) 219-226.

これらは何れも本講義の内容報告です。とくに、三番目は１９９０年８月に東京工大で開催された国際研究集会『Zeta Functions in Geometry』における講演「Multiple zeta functions」の報告集版です。

また、日本語の記事としては

●黒川信重「三角関数の一般化を巡って」『津田塾大学　数学・計算機科学研究所報』4(1991)1-25.（『近現代数学史シンポジウム』1991年11月・報告集.）

がかなり詳しい解説です。この報告は多重三角関数研究の要約として多方面で使用されたようです。たとえば、

●M. Jimbo and T. Miwa “Quantum KZ equation with |q|=1 and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime” J. Phys. A 29 (1996) 2923-2958.

に引用されていますし、また、その著者の一人による単行本

●神保道夫『複素関数入門』岩波書店（岩波講座現代数学への入門４）１９９５年１１月

には、多重三角関数が黒川の１９９１論文に基づいて演習問題として使用されるまでになって行きました。

さらに、私の研究室は、本講義録の発展応用として多重三角関数を研究する若手研究者を輩出しました、とくに、セルバーグゼータ関数のガンマ因子の計算に関する論文は、都築正男、権　寧魯、平野　幹の諸君によって１９９０年代の後半にかけて書かれ、次のよう出版されています。

●M. Tsuzuki “Elliptic factors of Selberg zeta functions” Duke Math. J. 88 (1997), no. 1, 29-75. (M.Tsuzuki “Elliptic factors of Selberg zeta functions” Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 69 (1993), no. 10, 417-421.）

●Y. Gon “Gamma factors of Selberg zeta functions and functional equation of Ruelle zeta functions” Math. Ann. 308 (1997), no. 2, 251-278. (Y. Gon, “Gamma factors for generalized Selberg zeta functions” Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 71 (1995), no. 7, 148-150.）

●M. Hirano “On theta type functions associated with the zeros of the Selberg zeta functions” Manuscripta Math. 92 (1997), no. 1, 87-105. (M. Hirano “On Cartier-Voros type Selberg trace formula for congruence subgroups of PSL(2,R) ” Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 71 (1995), no. 7, 144-147.）

多重三角関数論の出版は２１世紀に入って急激に増えてきます。とくに、若山正人さん、落合啓之さん、小山信也さんとの共著が多くなります。そのはじめは２００１年の一つ（１９９１論文で報告の三重三角とζ(3)との関係の解説）

●N. Kurokawa, M. Wakayama “On ζ(3) ” J. Ramanujan Math. Soc. 16 (2001), no. 3, 205-214.

と２００２年の二つ

●N. Kurokawa, H. Ochiai, M. Wakayama “Multiple trigonometry and zeta function” J. Ramanujan Math. Soc. 17 (2002), no. 2, 101-113.
●N. Kurokawa, Eva-Marie Muller-Stuler, H. Ochiai, M. Wakayama . “Kronecker's Jugendtraum and ring sine functions” J. Ramanujan Math. Soc. 17 (2002), no. 3, 211-220. [エファさんはクロネッカーの親戚の方です]

であり、次に２００３年の六つ

●N. Kurokawa, S. Koyama “Multiple sine functions” Forum Math. 15 (2003), no. 6, 839-876.
●S. Koyama, N. Kurokawa “Kummer's formula for multiple gamma functions” J. Ramanujan Math. Soc. 18 (2003), no. 1, 87-107.
●N. Kurokawa, S. Koyama “ Normalized double sine functions” Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 79 (2003), no. 1, 14-18.
●N.Kurokawa, M. Wakayama “Duplication formulas in triple trigonometry” Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 79 (2003), no. 8, 123-127.
●K.Kimoto, N.Kurokawa, C.Sonoki, M.Wakayama, “Zeta regularizations and q-analogue of ring sine functions” Kyushu J. Math. 57 (2003), no. 1, 197-215.
●M. Hirano, N. Kurokawa, M. Wakayama “Half zeta functions” J. Ramanujan Math. Soc. 18 (2003), no. 2, 195-209.

と続きます。多重三角関数論の出版論文数は1=1!, 2=2!, 6=3!と階乗で増えていくのかと思いましたが、２００４年は4!に届きませんでした（私の２００４年の出版論文は全体で１８編でした）。その後の数十編の論文については『多重三角関数論講義』を見てください。

クロネッカー青春の夢には多重三角関数の等分値の代数性が重要です。この問題については、依然として神秘的領域が広がっていますが、最近、若手研究者がこの研究に積極的に参加されているのは、とてもうれしいことです。等分値の論文に絞って、いくつかを紹介しておきます：

●B. A. Tangedal “Continued fractions, special values of the double sine function, and Stark units over real quadratic fields” J. Number Theory 124 (2007), no. 2, 291-313.
●S. Yamamoto “On Kronecker limit formulas for real quadratic fields” J. Number Theory 128 (2008), no. 2, 426-450.
●S. Yamamoto “On Shintani's ray class invariant for totally real number fields” Math. Ann. 346 (2010), 449-476.
●K. Onodera “Central values of generalized multiple sine functions” Forum Math. 21 (2009), no. 6, 1053-1065.

これらの論文は、１９７７年の新谷卓郎先生の研究の発展を目指して、多重三角関数の研究を行なっています。とくに、三等分値や四等分値の単独の代数性（何個かの積の代数性は知られていました）を証明するという画期的な結果も得られています。この二十年の発展のうち特筆すべきうれしいことです。

§４　絶対数学の進展

絶対数学の話は『多重三角関数論講義』（１９９１年４月－７月の東大講義録）に書いてあります。多重ゼータ関数の観点からすると、有限体のゼータ関数２個の多重化（黒川テンソル積）の場合に計算が詳しく書いてあります（符号付二重ポアソン和公式を証明して使用）。それは、証明の困難さにもかかわらず、予想以上に簡単なオイラー積表示を持っています：量子二重対数関数が出てきます。関数等式も明瞭です。本講義は多重三角関数に関する世界初の講義であるとともに、絶対数学に関する世界初の講義という意味も持っています。

マニン先生は１９９１年の東大講義録（それは、講義終了直後の１９９１年７月からコピーが、マニン先生をはじめとして、世界中に広く配布されていました）を出発点に、講義録

●Yu. I. Manin: Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa), Asterisque 228 (1995), 121-163.

を作成し、一元体上の絶対数学の基礎を作りました。なお、一元体の初出は１９５７年出版の

● J. Tits: Sur les analogues algebriques des groupes semi-simple complexes, Colloque d'algebre superieure, tenu a Bruxelles du 19 au 22 decembre 1956, Centre Belge de Recherches Math., Gauthier-Villar, Paris 1957, 261-289.

ということになっています。

さて、絶対数学の詳しい文献は黒川講義録（１９９１）およびマニン講義録（１９９５）の他には無いという状態が十年ほど続いていました。ただし、例外的に、１９９６年という早い時期に、ドイツのミュンスター大学のシュレーターさん（デニンガー先生の学生）が『L関数の黒川テンソル積』と題する２４０ページの労作

●M. Schroeter, Ueber Kurokawa-Tensorprodukte von L－Reihen, Schriftenreihe Math. Insti. Univ. Munster 3 Ser. Heft 18 (1996), ii+240pp.［ MR1392954 (97g:11094) ］

を書き上げられましたが、一般には入手困難な形態であったことが残念なことでした。

今世紀を迎えて、２００３年の絶対微分（絶対導分）の黒川・落合・若山論文

●N.Kurokawa, H. Ochiai and M. Wakayama: Absolute derivations and zeta functions, Doc. Math. 2003, 565-584.

および、２００４年にスーレさんの一元体上の代数幾何学の論文

●C. Soule: Les variete sur le corps a un element, Moscow Math. J.4 (2004) , 217-244.

続いて２００５年に

● Kurokawa, Nobushige: Zeta functions over F1. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 81 (2005), no. 10, 180-184 .

と出版（この論文は「絶対ゼータ関数」の状況を見るのに良い文献ですので是非参照してください）された頃から、徐々に世界的に研究の機運が高まってきました。

リーマンゼータ２個の絶対テンソル積については２００５年のロシア語論文

●Koyama, Shin-ya; Kurokawa, Nobushige: Multiple Euler products.(in Russian) Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society 11(2005)123-166,(英語訳：Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XI, 101-140, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 218, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.)

のあとに

●Akatsuka, Hirotaka：The double Riemann zeta function. Commun. Number Theory Phys. 3 (2009), no. 4, 619－653.

が完璧な論文を完成しました。

絶対数学は、２００９年にコンヌさんが非可換幾何学からの流れで絶対数学に参入して以来、世界的な大流行となってきました。

読者の参考のため、最近（２０１１年）のプレプリントをいくつか紹介しておきましょう：

●Anton Deitmar： Congruence schemes （arXiv:1102.4046 ）［合同スキーム論（素合同から作られるスキーム論：２００３年の黒川・落合・若山論文参照）］

●Anton Deitmar： Belian categories（arXiv:1105.5290 ）[合同スキームのコホモロジー論]
●Oliver Lorscheid： The geometry of blueprints. Part I: Algebraic background and scheme theory（arXiv:1103.1745 ）[合同スキームなど青写真としての基本空間論]
●Alain Connes, Caterina Consani： On the arithmetic of the BC-system（arXiv:1103.4672 ）[ボスト・コンヌ系の数論]

ボスト・コンヌ系(BC-system)とは「ゼータ関数＝分配関数」という等式が成立している物理系(１９９５年にBost-Connesが研究)で、コンヌさんのリーマン予想研究の基盤にあるものです。次の解説を見てください：
黒川信重・小山信也『リーマン予想の数理物理：ゼータ関数と分配関数』サイエンス社、２０１１年１１月。

このように、絶対数学は日々進化しています。残念なことですが、日本では２０１１年３月１１日の東日本大震災で数学研究にも大きな障害が起きていると思います。とくに、絶対数学のような危なく見える分野は日本では通常でも不人気です。外国で評価されてから再輸入され飛びつくというのが通例ですので。今後は、復興日本からの絶対数学研究発信に期待しています。この困難な時期に、大震災からの日本の復興に尽力されてこられた、菅直人・首相、枝野幸男・内閣官房長官、吉田昌郎・福島第一原発所長の三人の方々(偶然ですが、三人は私の高校か大学の同窓生です)に感謝の意を表しておきたいと思います。

最後に、もう一度述べますが、絶対数学の現状については、単行本『絶対数学』を見てください。その本で詳しく解説している「すべてを一元体上で」という視点を楽しんでください。とくに、一元体への誘導（絶対誘導：すべてのゼータ関数を一元体上のゼータ関数「絶対ゼータ関数」に帰着させる、つまり、一点のゼータ関数に帰着させること）の重要性を強調して、この話を終えることにしましょう。

暑さを忘れ幾分か涼しくなっていただけましたら幸いです。御清聴ありがとうございました。　　　　　　　　　　　　　　（２０１１年８月）