Grothendieck による遠アーベルセクション予想について

星 裕一郎*

京都大学 数理解析研究所

本稿は, 筆者が 2011 年 8 月 11 日に第 56 回代数学シンポジウムで行った講演 “Grothendieck による遠アーベル[*1][*2] セクション予想について” の内容をまとめたものである. §1 では数論的基本群という概念についての解説, §2 では遠アーベルセクション予想についての解説, §3 では [Hsh] の主結果の解説が与えられている.

筆者の知る限り, つい最近までそのような解説的文献はあまりなかったように思われるが, 2010 年 10 月に Mohamed Saïdi 氏が [Saïdi2] “Around the Grothendieck Anabelian Section Conjecture”, 2011 年 1 月に Jakob Stix 氏が [Stx4] “Evidence for the section conjecture in the theory of arithmetic fundamental groups” という, 遠アーベルセクション予想を主題とした解説的文献を発表した. 遠アーベルセクション予想についてより詳しいことを知りたい読者は, これらを参考にしていただきたい. [特に, 本稿では, 講演で行ったような遠アーベルセクション予想に関するこれまでの研究についての説明はほとんど与えられていないので, そのような事柄に興味のある読者は是非これらを参考にしていただきたい.] [Stx4] の §22.4 にも, 本稿で解説をする [Hsh] の主結果の解説が与えられている. また, Anna Cadoret 氏による原稿 [Cdr] にもその解説があり, 本稿では p 進局所体上での本稿定理 3.1 の証明の概略は与えられていないが, [Cdr] ではその証明の概略も与えられている.

最後に, 本稿の他に, 日本語で読むことのできる遠アーベル幾何学の解説的文献として, [和文解説 1], [和文解説 2], [和文解説 3], [和文解説 4], [和文解説 5], [和文解説 6] を紹介する. [ただし, これらの文献には, 遠アーベルセクション予想についての記述はあまりない.] 特に, [和文解説 2] は, この分野の先駆者であり大家である中村博昭氏, 玉川安騎男氏, 望月新一氏によって書かれた解説記事であり, 筆者がこの分野への入門を決めるきっかけとなった記事である.

謝辞

第 56 回代数学シンポジウムの運営にご尽力なさった関係者の皆様, また, 筆者に講演の依頼をくださった山崎隆雄さんに感謝をいたします.

第 56 回代数学シンポジウムで講演をなさった黒川信重先生は, [2003 年度の] 東京工業大学での筆者の指導教官でした. どのような状況, どのようなニュアンスであったか, 思い出すことができませんが, 筆者が学部学生であったそのときに黒川先生から “何か具体的な問題を持って数学をした方が良い” というような内容のお言葉をいただき[*3], それによって筆者が採用した具体的な数学の問題の 1 つが, 本稿で解説をする “遠アーベルセクション予想” でした. この場をお借りして, 黒川信重先生に感謝申し上げます.

筆者の研究は, 科学研究費 [若手研究 (B), no. 22740012] の助成を受けています.

---

* yuichiro@kurims.kyoto-u.ac.jp

*1 本稿は “非日本人の人名はアルファベットで表記する” という規則のもとで書かれているが, “遠 Abel” という表記にとうとう馴染めなかったため, “遠アーベル” の “アーベル” についてのみ, その例外とさせていただいた.

*2 講演中に確認をしたとおり, “anabelian” の訳語としての “遠アーベル” は中村博昭氏によるものだそうである.

*3 筆者がそのご発言の意図を勘違いしている可能性は否定できません. しかし, 少なくともそのような内容のご発言をなさった可能性があることは, 研究集会直後, 黒川先生ご本人に確認しました.

0 記号・用語

本稿では, $\mathfrak{Primes}$ をすべての素数からなる集合, $\mathbf{Q}$ をすべての有理数からなる体, $\mathbf{R}$ をすべての実数からなる体, $\mathbf{C}$ をすべての複素数からなる体とする. また, $p \in \mathfrak{Primes}$ に対して, $\mathbf{Q}_p$ を体 $\mathbf{Q}$ の p 進位相に関する完備化として得られる位相体とする.

$\mathbf{Q}$ の有限次拡大体と同型であるような体を**数体**と呼ぶ. また, $p \in \mathfrak{Primes}$ に対して, $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体と同型であるような体を ***p* 進局所体**と呼ぶ.

1 数論的基本群

§1 では, 数論的基本群という概念についての解説を行う. 従来の "代数的位相幾何学における基本群" が, 連結な位相空間とその上の基点というペアに対して定義される群であることと同様に, "数論的基本群" は, [局所 Noether 的な] 連結スキームとその上の [幾何学的] 点というペアに対して定義される [副有限な] 群である. 位相的基本群とは, 大雑把に言えば, 与えられた基点を始点終点とする位相空間上の道のホモトピー同値類全体に適切な群構造を与えて群とみなしたものである. この群は, 位相空間がある性質を満たす場合には, その位相空間の普遍被覆空間の被覆変換群と自然に同型となる. 従って, この同型を用いて, 位相的基本群を [少なくともそのある性質を満たす位相空間に対しては] "その位相空間の普遍被覆空間の被覆変換群" として定義することもできる. 数論的基本群は, 前者の方法ではなく, つまり, 与えられた空間の上の道を用いて定義をするのではなく, 後者の方法によって, つまり, 普遍被覆空間の被覆変換群として定義される. そして, それを実行するために考えなければならない位相空間に対する "[有限次] 被覆空間" という概念のスキームに対する類似は, "有限エタールなスキーム" という概念である.

局所 Noether 的な連結スキーム X とその幾何学的点 $\overline{x}$ を与える. $Y \to X$ を X 上有限でエタールなスキーム, $Y(\overline{x})$ を射 $\overline{x}$ の Y への持ち上げ全体のなす集合[*4] とすると, $Y(\overline{x})$ は有限集合となる. 従って, X 上有限でエタールなスキーム $Y \to X$ を全て考えることで有限集合の射影系 $\varprojlim_{Y \to X} Y(\overline{x})$ が得られる. 大雑把に言えば, ペア $(X, \overline{x})$ に対する数論的基本群 $\pi_1(X, \overline{x})$ は, この射影系の自己置換全体のなす群として定義される. このとき, 各 "$Y(\overline{x})$" が有限集合であることから, それらの射影系の自己置換全体のなす群して定義されるこの群 $\pi_1(X, \overline{x})$ には自然に副有限群[*5] の構造が入り, 特に, 自然に位相群と考えられることに注意しよう. また, その定義から, 位相的な基本群の場合と同様に, 基点の取り替えは数論的基本群の内部自己同型を生じさせる. 従って, 特に, 基点の取り替えは数論的基本群の同型類自体には影響を与えない. このため, 例えば数論的基本群の群論的構造のみを問題にする場合などには, 簡単のために, 基点を省略して, "$\pi_1(X, \overline{x})$" ではなく "$\pi_1(X)$" というように表記することもある.

その定義から, X 上有限でエタールなスキーム $Y \to X$ を与えると, $\pi_1(X, \overline{x})$ の有限集合 $Y(\overline{x})$ への連続な作用が自然に定まる. 実は, この対応によって, X 上有限でエタールなスキーム全体のなす圏と, $\pi_1(X, \overline{x})$ の連続作用を持つ有限集合のなす圏は, 圏同値となることが知られている [[SGA1], Exposé V, を参照]. 一般に, ある副有限群 G が存在して, G の連続作用を持つ有限集合のなす圏と圏同値となる圏を **Galois 圏**と呼び, 上で述べた事実は, 局所 Noether 的な連結スキーム上有限でエタールなスキーム全体のなす圏が Galois 圏になっているということを意味している.

X_1, X_2 を局所 Noether 的な連結スキーム, $f \colon X_1 \to X_2$ をスキームの射, $\overline{x}_1$ を X_1 の幾何学的点とすると, f と $\overline{x}_1$ の合成を考えることで, X_2 の幾何学的点 $\overline{x}_2$ が定まる. また, $Y_2 \to X_2$ を有限でエタールな射

[*4] つまり, $Y \to X$ の $\overline{x}$ でのファイバー.

[*5] 有限群の射影極限と同型な群を**副有限群**という. 射影系をなしている各有限群には離散位相を, そしてその射影極限には各有限群の離散位相から定まる直積位相の制限位相を導入することによって, 副有限群は自然に位相群と考えられる.

とすると, その引き戻し $Y_2 \times_{X_2} X_1 \to X_1$ が再び有限でエタールな射となることから, 自然な連続準同型射 $\pi_1(X_1, \overline{x}_1) \to \pi_1(X_2, \overline{x}_2)$ が定まる. つまり, "数論的基本群を取る" という操作は, 局所 Noether 的な連結スキームとその幾何学的点のペアのなす圏から副有限群のなす圏への [共変] 関手を与えている.

最後に, 数論的基本群のいくつかの具体例を与えて, この § を終えよう.

例 1.1.

(i) k を体, $X \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Spec} k$ とする. k の代数閉包 $\overline{k}$ を 1 つ固定すると, 自然な単射 $k \hookrightarrow \overline{k}$ がスキームの射 $\operatorname{Spec} \overline{k} \to \operatorname{Spec} k = X$ を, つまり, X の幾何学的点 $\overline{x}$ を定める. また, エタール射の定義から, "Spec を取る" という関手は X 上有限でエタールな連結スキームのなす圏と k の有限次分離拡大体のなす圏の間の圏同値を与える. 従って, 数論的基本群の定義から, 自然な同型

$$\pi_1(X, \overline{x}) \simeq \operatorname{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)$$

— ここで, k^{sep} は $\overline{k}$ の中での k の分離閉包 — が得られる.

(ii) X を局所 Noether 的で連結な正則スキーム, K を X の関数体, $\overline{K}$ を K のある代数閉包, $\overline{x}\colon \operatorname{Spec} \overline{K} \to X$ を自然な単射 $K \hookrightarrow \overline{K}$ が定める X の幾何学的点とする. このとき, Zariski・永田の純性定理 [[SGA1], Exposé X, Théorème 3.1, を参照] から, "関数体を取る" という関手が, X 上有限でエタールな連結スキームのなす圏と, K の有限次分離拡大であって X の任意の余次元 1 の点が定める K の離散付値に関して不分岐なものたちのなす圏の間の圏同値を与える. 従って, 数論的基本群の定義から, 自然な同型

$$\pi_1(X, \overline{x}) \simeq \varprojlim_{L} \operatorname{Gal}(L/K) \simeq \operatorname{Gal}((\varinjlim_{L} L)/K)$$

— ここで, L は, $K \subseteq L \subseteq \overline{K}$ なる K の有限次分離拡大体であって, X の任意の余次元 1 の点が定める K の離散付値に関して不分岐なものたち全体を走る — が得られる. 特に, $\eta_X \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Spec} K$ を X の生成点とすると, 自然な射 $\eta_X \to X$ は全射

$$\pi_1(\eta_X, \overline{x}) \simeq \operatorname{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \twoheadrightarrow \operatorname{Gal}((\varinjlim_{L} L)/K) \simeq \pi_1(X, \overline{x})$$

— ここで, K^{sep} は $\overline{K}$ の中での K の分離閉包, 最初の "$\simeq$" は (i) で得られた同型である — を定める.

(iii) X を $\mathbf{C}$ 上局所有限型の連結スキーム, X^{an} を X に付随する連結な複素解析空間とする. このとき, Riemann 存在定理 [[SGA1], Exposé XII, Théorème 5.1, を参照] によって, "付随する複素解析空間を取る" という関手は, X 上有限でエタールなスキームのなす圏と X^{an} の [従来の位相幾何学的な意味での] 有限次被覆空間のなす圏の間の圏同値を与える. 従って, "普遍被覆空間の被覆変換群は位相的基本群と自然に同型になる" という事実と, "被覆変換群に関する Galois 理論" により, 自然な同型

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}})^{\wedge}$$

— ここで, $\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}})$ は連結な複素解析空間 X^{an} の位相的な基本群, $\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}})^{\wedge}$ は群 $\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}})$ の副有限完備化[*6] — が得られる.

(iv) k を代数閉体, X を k 上固有な連結スキームとする. このとき, 代数閉体 k' と体の拡大 $k \subseteq k'$ に対して, 自然な射 $X \otimes_k k' \to X$ は同型射

$$\pi_1(X \otimes_k k') \xrightarrow{\sim} \pi_1(X)$$

[*6] 群 G と $\emptyset \neq \Sigma \subseteq \mathfrak{Primes}$ に対して, G の**副 Σ 完備化** G^{Σ} とは,

$$G^{\Sigma} \overset{\mathrm{def}}{=} \varprojlim_{N} G/N$$

— ここで, N は, 商群 G/N の位数の任意の素因子が Σ に属する G の指数有限正規部分群全体を走る — で定義される群である. また, G の**副有限完備化** $G^{\wedge}$ とは, G の 副 $\mathfrak{Primes}$ 完備化のことである.

を誘導する [[SGA1], Exposé X, Corollaire 1.8, を参照]. 特に, k の標数が 0 の場合, (iii) によって, ある複素解析空間 V と自然な同型

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1^{\mathrm{top}}(V)^\wedge$$

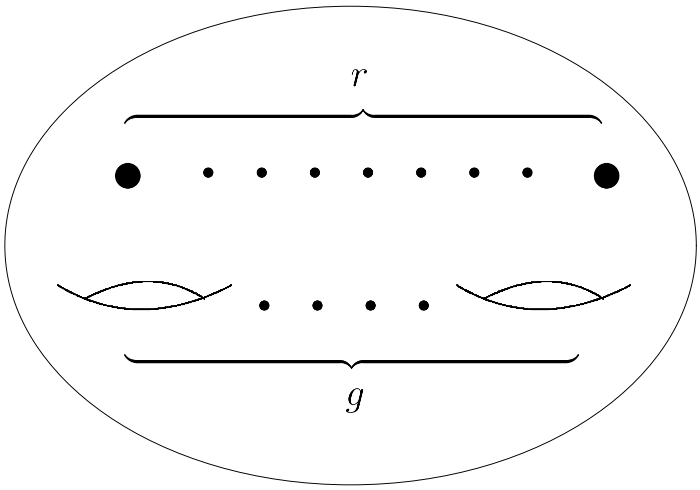
が存在する.

(v) k を代数閉体, X を k 上の滑らかな曲線, (g,r) を X の型[*7] とする [下図を参照]. このとき, もしも k の標数が 0 ならば, (iii), (iv), より, $\pi_1(X)$ は (g,r) 型の向きづけられた位相的曲面[*8] の位相的基本群の副有限完備化 [脚注 *6 を参照] と自然に同型である. つまり,

$$\Pi_{g,r} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g, \gamma_1, \cdots, \gamma_r \right\rangle / \prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i] \cdot \prod_{j=1}^{r} \gamma_j$$

とすると, $\pi_1(X)$ は $\Pi_{g,r}$ の副有限完備化と自然に同型である.

一方, k の標数が $p > 0$ ならば, 一般には $\pi_1(X)$ は $\Pi_{g,r}$ の完備化とは同型にはならないが[*9], 数論的基本群の特殊化の議論によって [[SGA1], Exposé X, また, [SGA1], Exposé XIII, を参照], $p \notin \Sigma$ となる任意の素数の集合 Σ に対して, $\pi_1(X)$ の最大副 Σ 商[*10] は $\Pi_{g,r}$ の副 Σ 完備化 [脚注 *6 を参照] と自然に同型となる [[SGA1], Exposé X, Corollaire 3.9, や [SGA1], Exposé XIII, Corollaire 2.12, を参照].



(g,r) 型の滑らかな曲線

*7 つまり, g は X の [一意的に定まる] 滑らかなコンパクト化 X^{cpt} の種数, r は有限集合 $X^{\mathrm{cpt}}(k) \setminus X(k)$ の濃度.

*8 つまり, 種数 g の向きづけられた位相的閉曲面から, 相異なる r 点を除いて得られる位相的曲面. よく知られているように, こういった位相的曲面の同相類は (g,r) から一意的に定まる.

*9 例えば, Hurwitz の公式を用いることで, $(g,r) = (0,0)$ の場合には, $\pi_1(X)$ が自明となることが確認できるので, 特に, $\Pi_{0,0}$ [$\simeq \{1\}$] の完備化と同型となることがわかる [詳しくは [SGA1], Exposé XI, Proposition 1.1, を参照]. 一方, 例えば, [Gll], §1, で行われている考察によって, 正標数の代数閉体 k 上のアフィン直線 $\mathbf{A}_k^1$ の数論的基本群 $\pi_1(\mathbf{A}_k^1)$ の同型類は基礎体 k に依存することが知られているため, 特に, $\pi_1(\mathbf{A}_k^1)$ の同型類はその型 $(g,r) = (0,1)$ のみからは定まらない. また, より深い結果の例として, 玉川安騎男氏によって, k が有限体の代数閉包の場合には, ある固定された双曲的曲線 [後述の定義 2.3 を参照; この場合には, $2g-2+r > 0$ であるということ] X に対して, 位相群としての同型 $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ が存在するような双曲的曲線 Y の同型類は高々有限個であることが証明されている [[Tama2], Theorem 0.1, を参照]. 従って, 特に, 双曲的曲線 X の 数論的基本群 $\pi_1(X)$ の同型類はその型のみからは決まらない.

*10 副有限群 G と $\emptyset \neq \Sigma \subseteq \mathfrak{Primes}$ に対して, G の**最大副 $\boldsymbol{\Sigma}$ 商**とは,

$$\varprojlim_{N} G/N$$

— ここで, N は, 商群 G/N の位数の任意の素因子が Σ に属する G の正規開部分群全体を走る — で定義される群である.

2 遠アーベルセクション予想

§2 では, 遠アーベルセクション予想についての解説を行う. k を [簡単のために] 完全体, X を k 上有限型で幾何学的に連結なスキームとする. また, k の代数閉包 $\overline{k}$ と, 構造射 $X \otimes_k \overline{k} \to \operatorname{Spec} \overline{k}$ のセクションとして得られる $X \otimes_k \overline{k}$ の幾何学的点 $\overline{x}$ を固定する. 今, X は k 上幾何学的に連結であるので, $X \otimes_k \overline{k}$ は連結なスキームである. 従って, 連結スキームの可換図式

$$\begin{array}{ccc} X \otimes_k \overline{k} & \longrightarrow & X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \operatorname{Spec} \overline{k} & \longrightarrow & \operatorname{Spec} k \end{array}$$

が得られ, “π_1” の関手性によって, 副有限群の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X \otimes_k \overline{k}, \overline{x}) & \longrightarrow & \pi_1(X, \overline{x}) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \pi_1(\operatorname{Spec} \overline{k}, \overline{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\operatorname{Spec} k, \overline{x}) \end{array}$$

— ここで, 4 つの “π_1” の中の “$\overline{x}$” は上で固定した $X \otimes_k \overline{k}$ の幾何学的点 $\overline{x}$ によって誘導された幾何学的点とする— を得る. これより, $G_k \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$ とすると, 例 1.1, (i), によって, 副有限群の列

$$1 \longrightarrow \pi_1(X \otimes_k \overline{k}, \overline{x}) \longrightarrow \pi_1(X, \overline{x}) \longrightarrow G_k \longrightarrow 1$$

が得られる. 実は, この系列は完全系列となる [[SGA1], Exposé IX, Théorème 6.1, を参照].

定義 2.1. $\emptyset \neq \Sigma \subseteq \mathfrak{Primes}$ とする.

(i) 副有限群 $\pi_1(X \otimes_k \overline{k}, \overline{x})$ の最大副 Σ 商 [脚注 $*10$ を参照] を

$$\Delta^{\Sigma}_{X/k}$$

と書き, この副 Σ 群[*11]を X/k の**副 $\boldsymbol{\Sigma}$ 幾何学的基本群**と呼ぶ.

(ii) 閉部分群 $\pi_1(X \otimes_k \overline{k}, \overline{x}) \subseteq \pi_1(X, \overline{x})$ は正規部分群であって, 自然な全射 $\pi_1(X \otimes_k \overline{k}, \overline{x}) \twoheadrightarrow \Delta^{\Sigma}_{X/k}$ の核は $\pi_1(X \otimes_k \overline{k}, \overline{x})$ の特性的閉部分群[*12] であることから, 自然な全射 $\pi_1(X \otimes_k \overline{k}, \overline{x}) \twoheadrightarrow \Delta^{\Sigma}_{X/k}$ の核は $\pi_1(X, \overline{x})$ の正規閉部分群であることがわかる. この正規閉部分群による $\pi_1(X, \overline{x})$ の商を

$$\Pi^{\Sigma}_{X/k}$$

と書き, この副有限群を X/k の**幾何学的副 $\boldsymbol{\Sigma}$ 数論的基本群**と呼ぶ.

(iii) 構成から, 完全系列

$$1 \longrightarrow \pi_1(X \otimes_k \overline{k}, \overline{x}) \longrightarrow \pi_1(X, \overline{x}) \longrightarrow G_k \longrightarrow 1$$

によって誘導された列

$$1 \longrightarrow \Delta^{\Sigma}_{X/k} \longrightarrow \Pi^{\Sigma}_{X/k} \longrightarrow G_k \longrightarrow 1$$

は完全系列である. この副有限群の完全系列を

$$\mathcal{E}^{\Sigma}_{X/k}$$

と書き, X/k の**副 $\boldsymbol{\Sigma}$ 基本完全系列**と呼ぶ.

[*11] $\emptyset \neq \Sigma \subseteq \mathfrak{Primes}$ に対して, 位数のすべての素因子が Σ に属する有限群を **$\boldsymbol{\Sigma}$ 群**と呼び, Σ 群の射影極限と同型な群を**副 $\boldsymbol{\Sigma}$ 群**と呼ぶ. 定義から, 副 Σ 群は副有限群である.

[*12] G を群, $H \subseteq G$ を G の部分群とする. G の任意の自己同型射 α に対して $\alpha(H) = H$ となるとき, H は G の**特性的部分群**であるという.

(iv) X/k の副 Σ 基本完全系列 $\mathcal{E}^{\Sigma}_{X/k}$ の連続で群論的なセクション, つまり, 連続な準同型射 $G_k \to \Pi^{\Sigma}_{X/k}$ であって, 自然な全射 $\Pi^{\Sigma}_{X/k} \twoheadrightarrow G_k$ との合成が G_k の恒等写像となるものを, X/k の**副 Σ Galois セクション**と呼ぶ.

(v) X/k の副 Σ Galois セクションたちのなす集合の $\Delta^{\Sigma}_{X/k}$ の共役による作用の商集合を

$$\mathrm{Sect}^{\Sigma}(X/k)$$

と書く.

(vi) X の k 有理点 $x \in X(k)$ を与えると, "π_1" の関手性から, x は自然な全射 $\pi_1(X, \overline{x}) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathrm{Spec}\, k, \overline{x}) \simeq G_k$ のセクション $G_k \to \pi_1(X, \overline{x})$ を $\pi_1(X \otimes_k \overline{k}, \overline{x})$ の元による共役を除いて誘導する[*13]. 従って, 副 Σ Galois セクションを $\Delta^{\Sigma}_{X/k}$ の元による共役を除いて定める. このようにして得られる写像を

$$\Phi^{\Sigma}_{X/k} \colon X(k) \longrightarrow \mathrm{Sect}^{\Sigma}(X/k)$$

と書く.

注意 2.2. X が Abel 多様体の場合を考えよう. X の副 Σ Tate 加群

$$\varprojlim_{n} \mathrm{Ker}(n \colon X(\overline{k}) \to X(\overline{k}))$$

— ここで, n はその素因子がすべて Σ の元であるような正の整数全体を走る— を $T_{\Sigma}(X)$ と書く. このとき, 自然な同型

$$\Delta^{\Sigma}_{X/k} \simeq T_{\Sigma}(X)$$

が存在することに注意しよう [例えば, [Mmf], §18, を参照].

(i) X の単位元セクションの $\Phi^{\Sigma}_{X/k}$ による像として得られる $\mathrm{Sect}^{\Sigma}(X/k)$ の元を s_0 とする. このとき, $\mathrm{Sect}^{\Sigma}(X/k)$ の元 s に対して, 写像

$$\begin{array}{ccc} G_k & \longrightarrow & \Pi^{\Sigma}_{X/k} \\ g & \mapsto & s(g)s_0(g)^{-1} \end{array}$$

は Galois コホモロジー $H^1(k, \Delta^{\Sigma}_{X})$ の元 ϕ_s を定めるが, 実はこの対応

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sect}^{\Sigma}(X/k) & \longrightarrow & H^1(k, \Delta^{\Sigma}_{X/k}) \simeq H^1(k, T_{\Sigma}(X)) \\ s & \mapsto & \phi_s \end{array}$$

が全単射であることが確認される. この観察により, $\mathrm{Sect}^{\Sigma}(X/k)$ は [Abel 多様体とは限らない] スキームに対するある種の "Tate 加群の Galois コホモロジー" と考えることができる.

(ii) X に対する副 Σ Kummer 射[*14]を

$$\kappa^{\Sigma}_{X/k} \colon X(k) \longrightarrow H^1(k, T_{\Sigma}(X))$$

[*13] X の k 有理点とは, 構造射 $X \to \mathrm{Spec}\, k$ のセクション $\mathrm{Spec}\, k \to X$ のことであることに注意.

[*14] これは以下のようにして定義される準同型射である: 正整数 n に対して, 例えば, [Mmf], §6, Application 2, によって, G_k 加群の列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Ker}(n \colon X(\overline{k}) \to X(\overline{k})) \longrightarrow X(\overline{k}) \xrightarrow{n} X(\overline{k}) \longrightarrow 1$$

は完全である. 従って, Galois コホモロジーを取ることによって, 射

$$X(k) = H^0(k, X(\overline{k})) \longrightarrow H^1(k, \mathrm{Ker}(n \colon X(\overline{k}) \to X(\overline{k})))$$

を得る. この射の, Σ に応じた適当な n に関する射影極限として, 副 Σ Kummer 射は定義される.

と書くと, 例えば [Naka], Theorem 2.1, の証明中でなされている考察 [特に, [Naka], Claim 2.2, を参照] によって, 図式

$$\begin{tikzcd} X(k) \arrow[r, "\Phi^{\Sigma}_{X/k}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Sect}^{\Sigma}(X/k) \arrow[d, "\wr"] \\ X(k) \arrow[r, "\kappa^{\Sigma}_{X/k}"] & H^1(k, \Delta^{\Sigma}_{X/k}) \simeq H^1(k, T_{\Sigma}(X)) \end{tikzcd}$$

— ここで, 右側の垂直な矢は (i) で得られた全単射— は可換する. この観察により, $\Phi^{\Sigma}_{X/k}$ は, [Abel 多様体とは限らない] スキームに対するある種の "Kummer 射" と考えることができる.

定義 2.3. S をスキーム, C を S 上のスキームとする. C が以下の条件を満たすとき, C を S 上の [(g,r) 型の] **双曲的曲線**であるという:

- 非負整数の組 (g,r),
- S 上幾何学的に連結, 固有, 滑らか, 相対次元 1 のスキーム C^{cpt},
- C^{cpt} の閉部分スキーム $D \subseteq C^{\mathrm{cpt}}$

が存在して,

- $2g-2+r>0$, つまり, $(g,r) \notin \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0)\}$,
- $C^{\mathrm{cpt}} \to S$ の任意の幾何学的ファイバーは [連結で固有で滑らかな] 種数 g の曲線,
- 合成 $D \hookrightarrow C^{\mathrm{cpt}} \to S$ は次数 r の有限でエタールな射,
- C と $C^{\mathrm{cpt}} \setminus D$ は S 上同型

となる.

注意 2.4. その定義から, "固有な双曲的曲線" とは, 種数が 2 以上の固有で滑らかな曲線 [の族] のことである.

Alexander Grothendieck 氏による遠アーベルセクション予想とは, 以下のような予想である [[Letter] を参照].

予想 2.5. k を $\mathbf{Q}$ の有限生成拡大体, X を k 上の固有な双曲的曲線とする. このとき, 写像

$$\Phi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k} \colon X(k) \longrightarrow \mathrm{Sect}^{\mathfrak{Primes}}(X/k)$$

は全単射である.

注意 2.6. 予想 2.5 の状況において, X が k 上固有ではない場合には, X のカスプ[*15] から生じる Galois セクション— つまり, その像がカスプの分解群に含まれてしまうような Galois セクション— を考察することによって, $\Phi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k}$ は一般には全射にはならないことが直ちに確認される[*16]. しかし, そのようなカスプから生じる Galois セクションを考慮に入れることによって, 固有とは限らない双曲的曲線に対してもセクション予想を定式化することができる. 詳しくは [Letter] を参照.

注意 2.7. 予想 2.5 の状況では, Mordell 予想 [Gerd Faltings 氏の定理] によって, $X(k)$ は有限集合である. 従って, 予想 2.5 が正しければ, $\mathrm{Sect}^{\mathfrak{Primes}}(X/k)$ は有限集合でなければならない. 一方, 後述の定理 2.12 の証明の議論で確認できるように, Mordell 予想を経由することなく $\Phi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k}$ の単射性を証明することができるの

[*15] X の滑らかなコンパクト化の幾何学的点であって, その像が X に含まれないものを, X の **カスプ** と呼ぶ. この場合には, 定義 2.3 にあらわれる "X^{cpt}" の幾何学的点であって, その像が閉部分スキーム "D" に含まれるもののことである.

[*16] 実際, 例えば, X が k 有理なカスプを 1 つでも持てば, $\Phi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k}$ は全射とはならない.

で[*17], "$\mathrm{Sect}^{\mathfrak{Primes}}(X/k)$ は有限集合である" という事実の証明を与えることは [もちろんそれが Mordell 予想を経由していなければ] Mordell 予想の別証明を与えることとなる.

現在までの研究によって $\Phi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k}$ の単射性は知られているが [後述の定理 2.12, あるいは 脚注 *17 を参照], $\Phi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k}$ の全射性について知られていることはほとんど何もない, といっても過言ではないと思われる. また, 注意 2.7 の観点から, $\mathrm{Sect}^{\mathfrak{Primes}}(X/k)$ の有限性も興味の対象となり得るが, 筆者の知る限り, $\mathbf{Q}$ の有限生成拡大体や [ある $p \in \mathfrak{Primes}$ に対する] p 進局所体 k 上の双曲的曲線 X であって $\mathrm{Sect}^{\mathfrak{Primes}}(X/k)$ が空ではない有限集合になる例すら 1 つも知られていない[*18].

次に, 上述の遠アーベルセクション予想をもう少し一般的な視点から眺めるために, Alexander Grothendieck 氏による遠アーベル Grothendieck 予想について復習をしよう. [Letter] では, 遠アーベル幾何学に関するいくつかの哲学が述べられているが, その "哲学" にあらわれる概念には数学的に定式化されていないものも少なくない. 例えば, "遠アーベル多様体" という遠アーベル幾何学の主役ともいうべき概念の正確な定義は, [Letter] の中では [そして, それ以降のどの研究においても, 筆者の知る限り] 与えられていない[*19]. しかし, [Letter] の中で, 数学的に厳密に定式化される予想の 1 つとして, Alexander Grothendieck 氏によって以下の "双曲的曲線に対する遠アーベル Grothendieck 予想" が提出されている.

予想 2.8. k を $\mathbf{Q}$ の有限生成拡大体, X, Y を k 上の双曲的曲線とする. このとき, "π_1" の関手性によって誘導される写像

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{dom}}_k(Y, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{G_k}(\Pi^{\mathfrak{Primes}}_{Y/k}, \Pi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k})/\mathrm{Inn}(\Delta^{\mathfrak{Primes}}_{X/k})$$

— ここで, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{dom}}_k(Y, X)$ は Y から X への k 上の支配的な射のなす集合, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{open}}_{G_k}(\Pi^{\mathfrak{Primes}}_{Y/k}, \Pi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k})$ は $\Pi^{\mathfrak{Primes}}_{Y/k}$ から $\Pi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k}$ への G_k 上の開準同型射のなす集合をあらわす— は全単射である.

この予想は, 中村博昭氏, 玉川安騎男氏らの研究の後, 最終的には望月新一氏によって, 以下のように, より強い形で肯定的に解決している [[Mzk1], Theorem A; [Mzk2], Theorem 4.12, を参照].

*17 定理 2.12 の証明の議論の中で後述の定理 2.9 が用いられるが, 定理 2.9 の証明は純粋に p 進的なものであり, Mordell 予想のような難しい大域的な事実を必要としていない. また, 例えば, [Naka] で与えられている以下の議論によって [[Naka], Theorem 2.1 を参照], $\mathbf{Q}$ の有限生成拡大体 k とその上の双曲的曲線 X に対する $\Phi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k}$ の単射性は, Mordell 予想と比較してずっと簡単な Mordell·Weil の定理からほとんど直ちに従う:

$\Phi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k}$ の単射性を証明するためには, $\Pi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k}$ を適当な開部分群に取り替える [つまり, X を適当な X 上の有限でエタールな連結スキームに取り替える] ことによって, $X(k) \neq \emptyset$, かつ, X の滑らかなコンパクト化の種数が 1 以上であると仮定しても良い. $x_0 \in X(k)$ を X の k 有理点, J_X を X の滑らかなコンパクト化の Jacobi 多様体, $\phi\colon X \hookrightarrow J_X$ を k 有理点 x_0 から定まる埋め込みとする. このとき, 注意 2.2 によって, 以下の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccc} X(k) & \overset{\Phi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k}}{\to} & \mathrm{Sect}^{\mathfrak{Primes}}(X/k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_X(k) & \overset{\kappa^{\mathfrak{Primes}}_{J_X/k}}{\to} & H^1(k, \Delta^{\mathfrak{Primes}}_{J_X/k}) \simeq \mathrm{Sect}^{\mathfrak{Primes}}(J_X/k) \end{array}$$

— ここで, 左側の垂直の矢は ϕ から誘導される射, 右側の垂直の矢は ϕ から誘導される全射 $\Pi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k} \twoheadrightarrow \Pi^{\mathfrak{Primes}}_{J_X/k}$ によって定まる射である. 従って, 上の図式の左側の垂直の矢 $X(k) \to J_X(k)$ の単射性から, $\Phi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k}$ の単射性を証明するためには, Kummer 射 $\kappa^{\mathfrak{Primes}}_{J_X/k}$ の単射性を証明すれば充分である. その上, Kummer 射の定義から, $\kappa^{\mathfrak{Primes}}_{J_X/k}$ の核は $J_X(k)$ の可除元全体のなす部分群と一致する. 従って, $\kappa^{\mathfrak{Primes}}_{J_X/k}$ の単射性を証明するためには, $J_X(k)$ が非自明な可除元を持たないことを証明すれば充分である. 一方, Mordell·Weil の定理から, $J_X(k)$ は有限生成 Abel 群なので, 特に $J_X(k)$ は非自明な可除元を持たない. 従って, $\Phi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k}$ は単射である.

また, この議論によって, k が $\mathbf{Q}$ 上有限生成のときには, 双曲的曲線でなくても X が以下の条件を満たせば, $\Phi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k}$ が単射となることがわかる: X の連結なエタール被覆 Y が存在して, Y は Abel 多様体に埋め込むことができる.

*18 これまでの研究によって, $\mathrm{Sect}^{\mathfrak{Primes}}(X/k) = \emptyset$ となるような組 (k, X) の例の存在は知られている [例えば, [Stx3], §7, や [HS], Proposition 1.3, を参照]. この場合, 写像 $\Phi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k}$ の存在から, $X(k) = \emptyset$ となるため, $\Phi^{\mathfrak{Primes}}_{X/k}$ は自動的に [空集合の間の] 全単射となる. 一方, 筆者の知る限り, $\mathrm{Sect}^{\Sigma}(X/k) \neq \emptyset$ であり, かつ, $\Phi^{\Sigma}_{X/k}$ が全単射となるような 3 つ組 (Σ, k, X) の存在は知られていない.

*19 "遠アーベル多様体" という概念の定義に向けての考察は, 例えば Jakob Stix 氏によってなされている [[Stx1], [Stx2] を参照].

定理 2.9. $p \in \Sigma \subseteq \mathfrak{Primes}$ とする. このとき, 以下が成立する:

(i) k を劣 p 進体[*20], X を k 上の双曲的曲線, S を k 上有限型, 幾何学的に連結, 分離的, 滑らかなスキームとする. このとき, “π_1” の関手性によって誘導される写像

$$\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{dom}}(S, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_k}^{\mathrm{open}}(\Pi_{S/k}^{\Sigma}, \Pi_{X/k}^{\Sigma})/\mathrm{Inn}(\Delta_{X/k}^{\Sigma})$$

— ここで, $\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{dom}}(S, X)$ は S から X への k 上の支配的な射のなす集合, $\mathrm{Hom}_{G_k}^{\mathrm{open}}(\Pi_{S/k}^{\Sigma}, \Pi_{X/k}^{\Sigma})$ は $\Pi_{S/k}^{\Sigma}$ から $\Pi_{X/k}^{\Sigma}$ への G_k 上の開準同型射のなす集合をあらわす— は全単射.

(ii) k を一般化劣 p 進体[*21], X, Y を k 上の双曲的曲線とする. このとき, “π_1” の関手性によって誘導される写像

$$\mathrm{Isom}_k(Y, X) \longrightarrow \mathrm{Isom}_{G_k}(\Pi_{Y/k}^{\Sigma}, \Pi_{X/k}^{\Sigma})/\mathrm{Inn}(\Delta_{X/k}^{\Sigma})$$

は全単射.

定理 2.9, (i), において問題となっている写像

$$\mathrm{Hom}_k^{\mathrm{dom}}(S, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{G_k}^{\mathrm{open}}(\Pi_{S/k}^{\Sigma}, \Pi_{X/k}^{\Sigma})/\mathrm{Inn}(\Delta_{X/k}^{\Sigma})$$

から “dom” と “open” を取り除き, また, S を $\mathrm{Spec}\, k$, Σ を $\mathfrak{Primes}$ とすると, これは遠アーベルセクション予想 [予想 2.5 を参照] で問題となっている写像 $\Phi_{X/k}^{\mathfrak{Primes}}$ それ自身である. この観点から, 遠アーベル Grothendieck 予想, つまり, 定理 2.9, (i), は遠アーベルセクション予想の “非退化版” と考えることができる. 一方, この “非退化版” の全単射性は, 定理 2.9, (i), のように, より一般的な k や Σ に対して成立する. そこで, 予想 2.5 [を解決することは直ちには難しそうなので, そ] の代わりに, 以下のような問題について考察をしたい.

問題 2.10. どのような 3 つ組 (k, X, Σ) — ここで, k は体, X は k 上の固有な双曲的曲線, Σ は空でない素数の集合— に対して, 写像

$$\Phi_{X/k}^{\Sigma} \colon X(k) \longrightarrow \mathrm{Sect}^{\Sigma}(X/k)$$

は全単射となるだろうか?

この問題に関する研究には, 例えば, $k = \mathbf{R}$ の場合の研究として [Mzk2], §3, や [Wck], Theorem 1.1, などがあり[*22], k が p 進局所体の場合の研究として [PS] などがあり, また, k が数体や p 進局所体の場合の研究として [Saïdi1] などがある.

Σ を取り替える際の, $\Phi_{X/k}^{\Sigma}$ の単射性や全射性について, 以下の結果が知られている. この証明の議論は, 本質的には, 玉川安騎男氏によって与えられたものである [[Tama1], Proposition 2.8, (iv), の証明を参照].

命題 2.11. k を $\mathbf{Q}$ 上有限生成な拡大体, あるいは, [ある $p \in \mathfrak{Primes}$ に対する] p 進局所体とする. また, $\emptyset \neq \Sigma' \subseteq \Sigma \subseteq \mathfrak{Primes}$ とする. このとき, 以下が成立する:

(i) X を k 上の固有な双曲的曲線とする. このとき, $\Phi_{X/k}^{\Sigma'}$ が単射であるならば, $\Phi_{X/k}^{\Sigma}$ は単射である.

(ii) k 上の任意の固有な双曲的曲線 X に対して $\Phi_{X/k}^{\Sigma'}$ が全射 [あるいは全単射] であるならば, k 上の任意の固有な双曲的曲線 X に対して $\Phi_{X/k}^{\Sigma}$ は全射 [あるいは全単射] である.

[*20] $\mathbf{Q}_p$ の有限生成拡大体の部分体と同型な体を**劣 p 進体**と呼ぶ. 数体の有限生成拡大体, p 進局所体の有限生成拡大体などが劣 p 進体の例である.

[*21] $\mathbf{Q}_p$ の最大不分岐拡大体の p 進完備化の有限生成拡大体の部分体と同型な体を**一般化劣 p 進体**と呼ぶ.

[*22] $k = \mathbf{R}$ の場合には, $\Phi_{X/\mathbf{R}}^{\Sigma}$ が単射にならないこと, より正確には, $\Phi_{X/\mathbf{R}}^{\Sigma}$ が自然な全射 $X(\mathbf{R}) \twoheadrightarrow \pi_0(X(\mathbf{R}))$ を経由してしまうことがすぐに確認できる. $k = \mathbf{R}$ の場合の研究の 1 つの目標は, この結果として得られる写像 $\pi_0(X(\mathbf{R})) \to \mathrm{Sect}^{\Sigma}(X/\mathbf{R})$ の全単射性を証明することである.

証明. 主張 (i) は $\Phi^{\Sigma'}_{X/k}$ が $\Phi^{\Sigma}_{X/k}$ を経由することから明らか. 主張 (ii) を証明する. 主張 (i) によって, 主張 (ii) を証明するためには, 主張 (ii) の “全射” に関する部分を証明すれば充分であるので, それを証明する. X を k 上の固有な双曲的曲線, $s\colon G_k \to \Pi^{\Sigma}_{X/k}$ を X/k の副 Σ Galois セクション [つまり, X/k の副 Σ 基本完全系列のセクション] とする. ここで,

$$\mathrm{Im}(s) \subseteq \cdots \subseteq H_3 \subseteq H_2 \subseteq H_1 \subseteq H_0 = \Pi^{\Sigma}_{X/k}$$

を $\mathrm{Im}(s)$ を含む $\Pi^{\Sigma}_{X/k}$ の開部分群の列であって, $\bigcap_{i=0}^{\infty} H_i = \mathrm{Im}(s)$ を満たすもの, また, 各自然数 i に対して, $X_i \to X$ を, 開部分群 $H_i \subseteq \Pi^{\Sigma}_{X/k}$ に対応する連結なエタール被覆とする. このとき, 様々な定義や仮定から, X_i が k 上の固有な双曲的曲線であること, 及び, $\Pi^{\Sigma}_{X_i/k} = H_i \subseteq \Pi^{\Sigma}_{X/k}$ となることに注意しよう.

今, $\mathrm{Im}(s) \subseteq \Pi^{\Sigma}_{X_i/k} = H_i$ であるので, 特に, 合成 $G_k \xrightarrow{s} \Pi^{\Sigma}_{X_i/k} \twoheadrightarrow \Pi^{\Sigma'}_{X_i/k}$ を考えることによって, $\mathrm{Sect}^{\Sigma'}(X_i/k) \neq \emptyset$. 従って, $\Phi^{\Sigma'}_{X_i/k}$ が全射であるという仮定により, $X_i(k) \neq \emptyset$ が得られる. この考察, 及び, k が $\mathbf{Q}$ の有限生成拡大体である場合には Mordell 予想 [Gerd Faltings 氏の定理], k が p 進局所体の場合には X_i の k の整数環上の適当なモデルを考えることによって, 上の開部分群の列から自然に誘導される集合の列

$$\cdots \longrightarrow X_3(k) \longrightarrow X_2(k) \longrightarrow X_1(k) \longrightarrow X_0(k) = X(k)$$

は, 空ではないコンパクト集合の連続写像による列となることがわかる. 従って, 空ではないコンパクト集合の連続写像による列の射影極限は空ではないので, ある元 $x_\infty \in \varprojlim X_i(k)$ が存在する. この x_∞ から定まる $\Pi^{\Sigma}_{X/k} \twoheadrightarrow G_k$ のセクションを s_∞ とすると, その定義から, $\mathrm{Im}(s_\infty) \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} \Pi^{\Sigma}_{X_i/k} = \bigcap_{i=0}^{\infty} H_i = \mathrm{Im}(s)$ となり, 従って, $s = s_\infty$ となる. 特に, s から自然に定まる $\mathrm{Sect}^{\Sigma}(X/k)$ の元は, x_∞ から自然に定まる $X(k)$ の元の $\Phi^{\Sigma}_{X/k}$ による像である. □

この命題によって, 一般に, Σ が小さくなるほど $\Phi^{\Sigma}_{X/k}$ の全単射性は強い条件となることがわかる. 次の § で紹介する [Hsh] の主結果の主張は, 簡単に述べてしまえば, Σ がもっとも小さい場合, つまり, Σ がただ 1 つの素数からなる場合には, セクション予想の反例, つまり, $\Phi^{\Sigma}_{X/k}$ が全単射にはならないような 3 つ組 (k, X, Σ) が存在する, というものである.

この § の残りの部分で, 遠アーベル Grothendieck 予想の肯定的解決, つまり, 定理 2.9 から自然に得られる, 遠アーベルセクション予想に対する重要な応用を紹介しよう [この定理の証明の議論については, [Mzk1], Theorem C, の証明を参照].

定理 2.12. $p \in \Sigma \subseteq \mathfrak{Primes}$, k を一般化劣 p 進体 [脚注 *21 を参照], X を k 上の双曲的曲線とする. このとき, $\Phi^{\Sigma}_{X/k}$ は単射.

証明. $x, y \in X(k)$ を X の k 有理点であって, $\Phi^{\Sigma}_{X/k}(x) = \Phi^{\Sigma}_{X/k}(y)$ となるものとする. 命題 2.11, (i), によって, $\Sigma = \{p\}$ と仮定しても一般性を失わないので, そのように仮定する. X_2 を X の 2 次配置空間, つまり, $X \times_k X$ から対角因子を除いて得られる $X \times_k X$ の開部分スキームとする. このとき, スキームの可換図式

$$\begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{\subseteq} & X \times_k X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \mathrm{pr}_1 \\ X & = & X \end{array}$$

によって, 副有限群の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \Pi^{\Sigma}_{X_2/k} & \longrightarrow & \Pi^{\Sigma}_{X \times_k X/k} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Pi^{\Sigma}_{X/k} & = & \Pi^{\Sigma}_{X/k} \end{array}$$

が得られる. 今, $a \in \{x, y\}$ に対して, 上のスキームの図式の $a\colon \mathrm{Spec}\, k \to X$ によるファイバー積を考えることによって, スキームの可換図式

$$\begin{tikzcd} X \setminus \{a\} \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\, k \arrow[r, equal] & \mathrm{Spec}\, k \end{tikzcd}$$

が得られるので, $\Sigma = \{p\}$ であることから, 上の副有限群の図式の $\Phi^{\Sigma}_{X/k}(a)\colon G_k \to \Pi^{\Sigma}_{X/k}$ によるファイバー積を考えることによって, 副有限群の可換図式

$$\begin{tikzcd} \Pi^{\Sigma}_{(X\setminus\{a\})/k} \arrow[r] \arrow[d] & \Pi^{\Sigma}_{X/k} \arrow[d] \\ G_k \arrow[r, equal] & G_k \end{tikzcd}$$

が得られる. この考察により, $\Phi^{\Sigma}_{X/k}(x) = \Phi^{\Sigma}_{X/k}(y)$ であるので, 副有限群の可換図式

$$\begin{tikzcd} \Pi^{\Sigma}_{(X\setminus\{x\})/k} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \Pi^{\Sigma}_{(X\setminus\{y\})/k} \arrow[d] \\ \Pi^{\Sigma}_{X/k} \arrow[r, equal] & \Pi^{\Sigma}_{X/k} \end{tikzcd}$$

— ただし, 垂直の矢はそれぞれ自然な開埋め込み $X \setminus \{x\}$, $X \setminus \{y\} \hookrightarrow X$ から誘導される準同型射— が得られる. ここで定理 2.9, (ii), を適用することにより, スキームの可換図式

$$\begin{tikzcd} X \setminus \{x\} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\cap"'] & X \setminus \{y\} \arrow[d, "\cap"'] \\ X \arrow[r, equal] & X \end{tikzcd}$$

が得られ, 特に, $x = y$ となる. □

3 副 p 版における反例

§3 では, [Hsh] の主結果についての解説を行う. 命題 2.11 の下で述べたとおり, [Hsh] の主結果は, 以下のように, Σ がもっとも小さい場合, つまり, Σ がただ 1 つの素数からなる場合には, セクション予想の反例, つまり, $\Phi^{\Sigma}_{X/k}$ が全単射とはならないような 3 つ組 (k, X, Σ) が存在する, というものである [[Hsh], Theorem A, を参照].

定理 3.1. ある素数 p, ある数体 [あるいは p 進局所体] k, ある k 上の固有な双曲的曲線 X が存在して, $\Phi^{\{p\}}_{X/k}$ は全射ではない.

注意 3.2. 定理 3.1 の状況では, 数体も p 進局所体もどちらも一般化劣 p 進体であるため, 定理 2.12 によって, $\Phi^{\{p\}}_{X/k}$ は単射である.

注意 3.3. 遠アーベルセクション予想の “非退化版” と考えられる遠アーベル Grothendieck 予想 [定理 2.9 の下で行った議論を参照] は, 定理 2.9, (i), の主張のとおり, $\Sigma = \{p\}$ の場合にも成立する. この観点と定理 3.1 の内容から, 遠アーベルセクション予想とその “非退化版” には, 何か本質的な違いがあると考えられる.

注意 3.4. 本稿では紹介しなかったが, 遠アーベルセクション予想には “双有理版” が存在して, Florian Pop 氏によって p 進局所体上でのその副 p 版が成立することが証明されている [[Pop] を参照]. この観点と定理 3.1 の内容から, 遠アーベルセクション予想とその “双有理版” には, 何か本質的な違いがあると考えられる.

注意 3.5. Σ がただ 1 つの素数からなり, また, 定理 3.1 では考察されていない場合として, 以下のような問題を考えることができる: $\Phi^{\{l\}}_{X/k}$ が全射とはならないような, ある相異なる素数 $p \neq l$, ある p 進局所体 k, ある k 上の固有な双曲的曲線 X は存在するか? 実は, この問題は $p = l$ の場合よりずっと簡単に肯定的に解決をすることができる. 詳細は例えば [Saïdi1], Proposition 4.2.1, を参照. また, この場合, 一般には, そもそも $\Phi^{\{l\}}_{X/k}$ は単射にはならないことを, それほどの困難なく確認することができる.

また, 注意 2.7 で述べたとおり, k が $\mathbf{Q}$ の有限生成拡大体の場合には, 集合 $\mathrm{Sect}^{\Sigma}(X/k)$ の有限性も興味の対象となり得るが, 以下の結果が示すように, Σ がただ 1 つの素数からなる場合には, この有限性は一般には成立しない [[Hsh], Theorem B, を参照].

定理 3.6. ある素数 p, ある数体 k, ある k 上の固有な双曲的曲線 X が存在して, $\mathrm{Sect}^{\{p\}}(X/k)$ は無限集合.

注意 3.7. k が数体の場合には, Mordell 予想 [Gerd Faltings 氏の定理] によって, k 上の固有な双曲的曲線 X に対する $X(k)$ の有限性が知られているため, 定理 3.6 は数体上の定理 3.1 を直ちに導く:

$$\text{定理 3.6} + \text{Mordell 予想による有限性} \Longrightarrow \text{数体上の定理 3.1}.$$

一方, k が p 進局所体の場合には, k 上の固有な双曲的曲線 X に対する $X(k)$ は, 空でなければ無限集合であるため, このような簡単な帰着は不可能である. [Hsh] では, 定理 3.6 の証明の議論で得られた結果に, Manin·Mumford 予想 [Michel Raynaud 氏の定理] による有限性を組み合わせることによって, p 進局所体上の定理 3.1 を証明している:

$$\text{定理 3.6 の証明の議論} + \text{Manin·Mumford 予想による有限性} \Longrightarrow p \text{ 進局所体上の定理 3.1}.$$

この § の残りの部分で, 定理 3.6 の証明の概略を与える. [注意 3.7 によって, これは数体上の定理 3.1 の証明の概略を与えることにもなる.]

定理 *3.6* の証明の概略. p を 11 以上の正則な素数, $\overline{\mathbf{Q}}$ を有理数体 $\mathbf{Q}$ の代数閉包, $\zeta_p \in \overline{\mathbf{Q}}$ を 1 の原始 p 乗根, $k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{Q}(\zeta_p)$, $\mathfrak{o}_k$ を k の整数環, X を k 上の p 次の Fermat 曲線 [つまり, k 上の射影平面の中で, "$x^p + y^p + z^p = 0$" で定義される曲線][*23], J_X を X の Jacobi 多様体とする. このとき, 以下が成立することが確認できる:

(i) X は $\mathfrak{o}_k[1/p]$ 上の良い還元を持つ. つまり, $\mathfrak{o}_k[1/p]$ 上の双曲的曲線 $\mathfrak{X}$ が存在して, X と $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{o}_k[1/p]} k$ は k 上同型.

(ii) J_X の p 等分点の座標を添加して得られる k の有限次 Galois 拡大の k 上の拡大次数は p のべき.

Q を $\pi_1(\mathfrak{X})$ [上述の (i) を参照] の最大副 p 商 [脚注 *10 を参照] とすると, 自然な開埋め込み $X \hookrightarrow \mathfrak{X}$ は全射 $\Pi^{\{p\}}_{X/k} \twoheadrightarrow Q$ を誘導する. その上, 上述の (ii) と数論的基本群の特殊化の議論によって,

> 合成 $\Delta^{\{p\}}_{X/k} \hookrightarrow \Pi^{\{p\}}_{X/k} \twoheadrightarrow Q$ は単射となり, また, この合成の像による Q の商群は, 自然に $\mathrm{Gal}(k^{\text{un-}p}/k)$ と同型になる. ここで, $k^{\text{un-}p} \subseteq \overline{\mathbf{Q}}$ は, p を割らない k の任意の有限素点で不分岐な k の副 p Galois 拡大で最大なもの.

*23 $5 \leq p$ であるので, X は k 上の双曲的曲線である.

従って, 副有限群の可換図式

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Delta^{\{p\}}_{X/k} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Pi^{\{p\}}_{X/k} \arrow[r] \arrow[d] & G_k \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \Delta^{\{p\}}_{X/k} \arrow[r] & Q \arrow[r] & \mathrm{Gal}(k^{\text{un-}p}/k) \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

— ただし, 水平な列は完全系列, 垂直の矢は全射— を得る. また, 同様の議論によって, $\mathfrak{J}_{\mathfrak{X}}$ を $\mathfrak{X}$ の Jacobi 多様体, Q_J を $\pi_1(\mathfrak{J}_{\mathfrak{X}})$ の最大副 p 商 [脚注 *10 を参照] とすると, 副有限群の可換図式

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \Delta^{\{p\}}_{J_X/k} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Pi^{\{p\}}_{J_X/k} \arrow[r] \arrow[d] & G_k \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \Delta^{\{p\}}_{J_X/k} \arrow[r] & Q_J \arrow[r] & \mathrm{Gal}(k^{\text{un-}p}/k) \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

— ただし, 水平な列は完全系列, 垂直の矢は全射— を得る. これら 2 つの可換図式において, 左側の垂直の矢は同型射であるので, 特に, 右側の四角はカルテシアン. 従って, これら 2 つの可換図式の下の完全系列のセクションは, 上の完全系列のセクションを自然に誘導する. この考察から, $\mathrm{Sect}(Q)$, $\mathrm{Sect}(Q_J)$ をそれぞれこれら 2 つの可換図式の下の完全系列のセクションのなす集合の $\Delta^{\{p\}}_{X/k}$, $\Delta^{\{p\}}_{J_X/k}$ の共役による作用の商集合とすると, [X の適当な k 有理点による] 閉埋め込み $X \hookrightarrow J_X$ は, 集合の可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sect}(Q) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sect}(Q_J) \arrow[d] \\ \mathrm{Sect}^{\{p\}}(X/k) \arrow[r] & \mathrm{Sect}^{\{p\}}(J_X/k) \simeq H^1(k, T_p(J_X)) \end{tikzcd}$$

を自然に定める. ここで,

> 有限体上の Abel 多様体の Tate 加群に対する Frobenius 元の作用の重みの理論 [例えば [Mmf], §21, Application II, を参照] から, 右側の垂直の矢 $\mathrm{Sect}(Q_J) \to \mathrm{Sect}^{\{p\}}(J_X/k) \simeq H^1(k, T_p(J_X))$ が全射となる

ことがわかり, また,

> p が正則な素数であることから $\mathrm{Gal}(k^{\text{un-}p}/k)$ が自由副 p 群になるので [[Sfr], Theorem 5 の下の最初の例, を参照], 上の水平の矢 $\mathrm{Sect}(Q) \to \mathrm{Sect}(Q_J)$ が全射となる

ことがわかるので, 結論として, 下の水平の矢

$$\mathrm{Sect}^{\{p\}}(X/k) \to \mathrm{Sect}^{\{p\}}(J_X/k) \simeq H^1(k, T_p(J_X))$$

は全射となる. 一方, $11 \leq p$ であることから, $J_X(k)$ は無限集合であるので [[GR], Theorem 2.1, を参照], 特に, 注意 2.2 で与えられている議論によって, $\mathrm{Sect}^{\{p\}}(J_X/k) \simeq H^1(k, T_p(J_X))$ は無限集合. 従って, $\mathrm{Sect}^{\{p\}}(X/k)$ も無限集合である. □

参考文献

[Cdr] A. Cadoret, *Contre-exemple à la conjecture de la section pro-p (d'après Yuichiro Hoshi)*, exposé. Available at `http://www.math.polytechnique.fr/~cadoret/Travaux.html`

[Gll] P. Gille, Le groupe fondamental sauvage d'une courbe affine en caractéristique $p > 0$, *Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique* (Luminy, 1998), 217–231, Progr. Math., **187**, Birkhäuser, Basel, 2000.

[GR] B. H. Gross and D. E. Rohrlich, Some results on the Mordell-Weil group of the Jacobian of the Fermat curve, *Invent. Math.* **44** (1978), no. **3**, 201–224.

[SGA1] A. Grothendieck and M. Raynaud, *Revêtements étales et groupe fondamental* (SGA 1), Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61, Documents Mathématiques, **3**, Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[Letter] A. Grothendieck, Letter to G. Faltings, *Geometric Galois actions, 1*, London Math. Soc. Lecture Note Ser, **242**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 285–293, 1997.

[HS] D. Harari and T. Szamuely, Galois sections for abelianized fundamental groups, with an appendix by E. V. Flynn, *Math. Ann.* **344** (2009), no. **4**, 779–800.

[Hsh] Y. Hoshi, Existence of nongeometric pro-p Galois sections of hyperbolic curves, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **46** (2010), no. **4**, 829–848,

[Mzk1] S. Mochizuki, The local pro-p anabelian geometry of curves, *Invent. Math.* **138** (1999), no. **2**, 319–423.

[Mzk2] S. Mochizuki, Topics surrounding the anabelian geometry of hyperbolic curves, *Galois groups and fundamental groups*, 119–165, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **41**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[Mmf] D. Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. **5** Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Oxford University Press, London 1970.

[Naka] H. Nakamura, Galois rigidity of algebraic mappings into some hyperbolic varieties, *Internat. J. Math.* **4** (1993), no. **3**, 421–438.

[Pop] F. Pop, On the birational p-adic section conjecture, *Compos. Math.* **146** (2010), no. **3**, 621–637.

[PS] F. Pop and J. Stix, *Arithmetic in the fundamental group of a p-adic curve. On the p-adic section conjecture for curves*, preprint, Philadelphia-Heidelberg-Cambridge, August 2010. Available at `http://www.math.upenn.edu/~pop/Research/Papers.html` or `http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~stix/index-en.html`

[Sfr] I. R. Šafarevič, Extensions with given points of ramification, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **18** (1964), 295–319; English transl. in *Amer. Math. Soc. Transl.* Ser. **2**, **59** (1966), 128–149.

[Saïdi1] M. Saïdi, *Good Sections of Arithmetic Fundamental Groups*, preprint (arXiv:math.AG/10101313 October 2010).

[Saïdi2] M. Saïdi, *Around the Grothendieck Anabelian Section Conjecture*, preprint (arXiv:math.AG/10101314 October 2010).

[Stx1] J. Stix, *Maps to anabelian varieties and extending curves*, preprint, Bonn, August 2004. Available at `http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~stix/index-en.html`

[Stx2] J. Stix, On the geometry of higher dimensional anabelian varieties, *Arithmetic and Differential Galois Groups*, Oberwolfach report **4** (2007), no. **2**, 1501–1504.

[Stx3] J. Stix, On the period-index problem in light of the section conjecture, *Amer. J. Math.* **132** (2010), no. **1**, 157–180.

[Stx4] J. Stix, *Evidence for the section conjecture in the theory of arithmetic fundamental groups*, Habilitationsschrift, School of Mathematics and Computer Science at the Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, January 2011.

[Tama1] A. Tamagawa, The Grothendieck conjecture for affine curves, *Compositio Math.* **109** (1997), no. **2**, 135–194.

[Tama2] A. Tamagawa, Finiteness of isomorphism classes of curves in positive characteristic with prescribed fundamental groups, *J. Algebraic Geom.* **13** (2004), no. **4**, 675–724.

[Wck] K. Wickelgren, *2-Nilpotent Real Section Conjecture*, preprint (arXiv:math.AG/10060265 June 2010).

[和文解説 1] 中村博昭, 副有限基本群のガロア剛性, 数学 **47**, 1995, 1–17.

[和文解説 2] 中村博昭, 玉川安騎男, 望月新一, 代数曲線の基本群に関する Grothendieck 予想, 数学 **50**, 1998, 113–129.

[和文解説 3] 玉川安騎男, 代数曲線の数論的基本群に関する Grothendieck 予想, 第 41 回代数学シンポジウム報告集.

[和文解説 4] 玉川安騎男, Galois 群や基本群から元の対象を復元する問題に関する歴史と最近の発展, 数理解析研究所講究録 **998**.

[和文解説 5] 玉川安騎男, 正標数代数曲線の被覆に関する数論幾何, 数理解析研究所講究録 **1324**.

[和文解説 6] 玉川安騎男, 代数曲線の数論的基本群に関する Grothendieck 予想 その後, 第 49 回代数学シンポジウム報告集.