Aspects of F-regularity — old and new —

原 伸生 （東北大学大学院理学研究科）

F-正則という概念が Hochster と Huneke によって紹介されてから二十余年が経った. これは密着閉包と, F-純性つまり Frobenius 写像の分裂に起源をもつ正標数の可換環の性質であるが, F-正則環は, 正規, Cohen–Macaulay などの環論的に良い性質をもつだけでなく, 対数的端末特異点との密接な関係など代数幾何的な様相をもつ興味深い対象である. 本稿では, こうした F-正則環の新旧の諸相について, 筆者なりの観点から概観してみたい. はじめに, Hochster–Huneke とその一派によって研究された環論的な古典論に触れた後, F-正則及び F-純という「F-特異点」の "pair" への拡張とその大域版についての幾何的な解釈[1]と最近の動向について述べる. そして最後に, F-正則環 R の Frobenius 順像 $F^e_*R \cong R^{1/p^e}$ の R-加群としての漸近的な振る舞いと, 最近得られたその F-爆発への応用について紹介する.

1. 古典論

記号. R を標数 $p > 0$ の（つまり, 素体 $\mathbb{F}_p$ を部分環にもつ）Noether 可換環とし, その Frobenius 写像, すなわち, $a \mapsto a^p$ で与えられる環 R の自己準同型を $F\colon R \to R$ で表す. これに対応するスキーム $X = \mathrm{Spec}\ R$ の射も $F = (\mathrm{id}_X, F)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (X, \mathcal{O}_X)$ で表し, X の Frobenius 射とよぶ.

以下さらに, R は **F-有限**な整域, すなわち, Frobenius 射が有限射であるような整域と仮定し, 非負整数 e に対し, e 次 Frobenius 写像 $F^e\colon R \to R$ と $F^e\colon \mathcal{O}_X \to F^e_*\mathcal{O}_X$, 及び, R からその元の p^e 乗根からなる環 R^{1/p^e} への包含写像 $R \hookrightarrow R^{1/p^e}$ を同一視する.

定義 (Hochster–Roberts [HR], Hochster–Huneke [HH1]).

(1) R が **F-純 (F-pure)** であるとは, 包含写像 $R \hookrightarrow R^{1/p}$ が R-線型写像として分裂すること, 云いかえれば, R が R-加群 $R^{1/p}$ の直和因子であることをいう.

(2) R が **強 F-正則 (strongly F-regular)** であるとは, 任意の非零元 $c \in R$ に対し, ある整数 $e > 0$ が存在して, c^{1/p^e} を掛ける写像

$$R \xrightarrow{c^{1/p^e}} R^{1/p^e}$$

が R-線型写像として分裂すること, すなわち, $c^{1/p^e}R$ が R-加群 R^{1/p^e} の直和因子となることをいう.

密着閉包による定義 (Hochster–Huneke [HH2]). F-正則性の定義に密着閉包 (tight closure) を使う流儀もある. イデアル $I \subseteq R$ の**密着閉包** $I^* \subseteq R$ は次で定義される:

$$z \in I^* \overset{\text{def}}{\iff} 0 \neq \exists c \in R \text{ s.t. } cz^{p^e} \in I^{[p^e]} \text{ for } e \gg 0.$$

ここに, $I^{[p^e]} = (a^{p^e} \mid a \in I)$ は I の元の p^e 乗たちで生成される R のイデアルを表す. 一般に, イデアル I の密着閉包 I^* は I を含む R のイデアルであるが, R のすべてのイデアル I に対して $I = I^*$ が成り立つとき, R は **弱 F-正則 (weakly F-regular)** であるという.

注意. 強 F-正則環は弱 F-正則であり, 体上の次数環, $\mathbb{Q}$-Gorenstein 環などについてはその逆も成り立つ. そこで, 以下しばしば両者を区別せず単に **F-正則**という.

命題 (R の性質の基本的な関係). 正則 $\Rightarrow$ F-正則 $\Rightarrow$ F-純, 正規, Cohen–Macaulay.

[1] この部分に関しては 2001 年代数学シンポジウム報告集に書いた拙論も参照されたい.

上の命題の証明を概観してみよう．まず, F-正則 $\Rightarrow$ F-純 は定義からただちである．F-正則 $\Rightarrow$ 正規 は次の密着閉包版 Briançon-Skoda の定理 (TCBS) からしたがう:

Briançon-Skoda 型定理 [HH2]. r 個の元で生成されるイデアル $I \subset R$ に対し,

$$\overline{I^r} \subseteq I^*.$$

ここに, $\overline{J}$ はイデアル J の整閉包, つまり, $z \in \overline{J} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists a_i \in J^i\ (1 \le i \le n)$ s.t. $z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0 \Leftrightarrow 0 \neq \exists c \in R$ s.t. $cz^N \in J^N$ for $N \gg 0$.

(証明) まず, $I = (x_1, \ldots, x_r)$ として TCBS を示す: $z \in \overline{I^r}$ ならば, $0 \neq c \in R$ が存在して $cz^q \in (x_1 \ldots, x_r)^{qr} \subseteq (x_1^q, \ldots, x_r^q) = I^{[q]}$ $(q = p^e \gg 0)$ が成り立つから, $z \in I^*$.

R が F-正則のとき, $z/x \in \mathrm{Frac}\ R$ に対し TCBS より $\overline{(x)} = (x)^* = (x)$ であるから, z/x が R 上整 $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists a_i \in R$ s.t. $(z/x)^n + a_1(z/x)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z/x + a_n = 0$ $\Leftrightarrow z \in \overline{(x)} = (x) \Leftrightarrow z/x \in R$, が成り立つ．したがって, F-正則環 R は正規である．□

F-正則 $\Rightarrow$ Cohen–Macaulay は次からただちにしたがう:

Colon-capturing [HH2]. $x_1, \ldots, x_n \in R$ が parameters, つまり, これらのうち任意の i 個 $(1 \le i \le n)$ が高さ i のイデアルを生成するとき

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}) : x_i \subseteq (x_1, \ldots, x_{i-1})^*.$$

注意. 正規性と Cohen–Macaulay 性は, F-正則より弱い『F-有理』の下で成立する.

正則 $\Rightarrow$ F-正則 は次からしたがう:

Kunz の定理 [K]. 標数 $p > 0$ の Noether 局所環 R に対し,

$$R \text{ が正則} \iff F\colon R \to R \text{ が平坦, つまり, } R^{1/p} \text{ が平坦 } R\text{-加群}.$$

例. R が F-有限のとき上の条件は $R^{1/p}$ が自由 R-加群であるということである．例えば, $R = k[[x_1, \ldots, x_d]]$ が標数 p の完全体 k 上の形式ベキ級数環のとき $q = p^e$ に対し

$$R^{1/q} = k[[x_1^{1/q}, \ldots, x_d^{1/q}]] = \bigoplus_{0 \le i_1, \ldots, i_d \le q-1} R x_1^{i_1/q} \cdots x_d^{i_d/q} \cong R^{\oplus q^d}$$

は階数 q^d の自由 R-加群である．この R の強 F-正則性を示す: $0 \neq c \in R$ に現れる項のうち, 単項式の辞書式順序に関して最低次のものを $ax_1^{j_1} \cdots x_d^{j_d}$ $(0 \neq a \in k)$ とする．このとき $q = p^e > \max\{j_1, \ldots, j_d\}$ ととれば, $R^{1/q}$ の R-基底

$$\{x_1^{i_1/q} \cdots x_d^{i_d/q} \mid 0 \le i_1, \ldots, i_d \le q-1\}$$

の元 $x_1^{j_1/q} \cdots x_d^{j_d/q}$ を $c^{1/q} = a^{1/q} x_1^{j_1/q} \cdots x_d^{j_d/q} +$(他の項) でとりかえたものも基底となる．よって, $c^{1/q}R$ は $R^{1/q}$ の直和因子である.

『正則 $\Rightarrow$ 弱 F-正則』の密着閉包による証明. 任意のイデアル $I \subset R$ に対し, $z \in I^*$ とすると, ある $0 \neq c \in R$ が存在して,$cz^q \in I^{[q]}$ $(q = p^e \gg 0)$ となる．この条件は R-加群 $R^{1/q}$ の平坦性より

$$cz^q \in I^{[q]} \Leftrightarrow c \in I^{[q]} : z^q = (I : z)^{[q]}$$

と云いかえられる．このときもし $z \notin I$ ならば, $I : z \subseteq \mathfrak{m}$ より $(I : z)^{[q]} \subseteq \mathfrak{m}^{[q]} \subseteq \mathfrak{m}^q$ となり,

$$c \in \bigcap_{q = p^e \gg 0} (I : z)^{[q]} \subseteq \bigcap_{q = p^e \gg 0} \mathfrak{m}^q = (0)$$

となって矛盾する．よって, $I = I^*$ が成り立つ．□

純拡大と splinter. 環の拡大 $R \subset S$ が**純 (pure)** であるとは, 任意の R-加群 M に対してひきおこされる写像 $M = R \otimes_R M \to S \otimes_R M$ が単射であることをいう.

これは, 任意のイデアル $I \subset R$ に対し $IS \cap R = I$ が成り立つこととほぼ同じである. また, R が R-加群として S の直和因子ならば, $R \subset S$ は純拡大であり, 有限拡大に対してはその逆も成り立つ. 先に定義した R の F-純性は, 拡大 $R \subset R^{1/p}$ が純であることにほかならない.

定義から F-正則性が純部分環に遺伝することはほぼ明らかである:

命題. 純拡大 $R \subset S$ において S が F-正則ならば, R も F-正則である.

注意. Hochster–Huneke はこの性質を用いて，多項式環に作用する線型簡約群の不変部分環の F-正則性とくに Cohen–Macaulay 性を示した [HH2].

定義. 整域 R がその任意の有限拡大整域 S の R-直和因子であるとき, R を **splinter** という.

命題. F-正則環は splinter である.

(強 F-正則 $\Rightarrow$ splinter の証明) 有限拡大 $R \subset S$ に対し, $\phi(1) \neq 0 \in R$ となる $\phi \in \mathrm{Hom}_R(S, R)$ をとり，$c := \phi(1)$ とおく．R の強 F-正則性より，ある $q = p^e$ と $\psi \in \mathrm{Hom}_R(R^{1/q}, R)$ に対して, $\psi(c^{1/q}) = 1$ となる．よって

$$\psi \circ \phi^{1/q} \colon S^{1/q} \xrightarrow{\phi^{1/q}} R^{1/q} \xrightarrow{\psi} R$$

は $\psi \circ \phi^{1/q}(1) = 1$ をみたし，$R \to S \to S^{1/q}$ の分裂を与える．□

実は, 正標数では適当な条件下で F-正則と splinter は同値である:

定理 (Singh [Si]). 標数 $p > 0$ の正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 局所環 R に対し，R が F-正則であることと R が splinter であることとは同値である.

注意. 標数 0 における splinter の同値条件は, 正規性である (F-正則よりずっと弱い).

Fedder の判定法 [F]. $(S, \mathfrak{m})$ を正則局所環，I をそのイデアルとし，$R = S/I$ とおく．

(1) R が F-純 $\iff I^{[p]} : I \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p]}$.

(2) R が F-正則 $\iff \forall c \in R \setminus I, \exists e \in \mathbb{N}$ s.t. $c(I^{[p^e]} : I) \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p^e]}$.

超曲面 $R = k[[x, y, z]]/(f)$ にこの判定法を適用すると, R が F-純 $\Leftrightarrow f^{p-1} \notin (x^p, y^p, z^p)$ などとなる.

例. k は標数 $p > 0$ の完全体とする.

(1) 位数が p で割り切れない有限群 G が多項式環 $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ に作用するとき (tame な作用)，その不変部分環 $R = S^G$ は F-正則.

(2) トーリック環 $R = k[\sigma^\vee \cap M]$ は F-正則.

(3) $R = k[x, y]/(xy)$ と $k[x, y]/(x^2 + x^3 - y^2)$ は F-純だが F-正則でない (非正規).

(4) $R = k[x, y, z]/(x^2 + y^3 + z^5)$ に対し，R が F-正則 $\iff R$ が F-純 $\iff p > 5$.

(5) $R = k[x, y, z]/(x^3 + y^3 + z^3)$ は F-正則でなく，R が F-純 $\iff p \equiv 1 \pmod 3$.

(6) E を楕円曲線, L を $A = E \times E$ 上の豊富な直線束 とするとき, 正規次数環

$$R = R(A, L) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(A, L^n)$$

は F-正則でなく (Cohen-Macaulay でもない)，R が F-純 $\iff E$ が ordinary.

2. 幾何的な解釈

引き続きとくに断らない限り, R は標数 $p>0$ の F-有限整域を表すものとする. 環 R の F-純, F-正則などの性質を R と $\mathbb{R}$-因子の組 (pair) の性質に一般化して定義し, 標数 0 の "組の特異点" と比較する試みについて紹介する ([HW], [Sc]).

定義. 正規環 R と $X=\operatorname{Spec} R$ 上の有効実係数因子 Δ の組 (R,Δ) を考える.

(1) (R,Δ) が **F-純 (F-pure)** であるとは, 任意の整数 $e>0$ に対して $\mathcal{O}_X$-加群の射 $F^e\colon \mathcal{O}_X \to F^e_*\mathcal{O}_X(\lfloor (p^e-1)\Delta \rfloor)$ が分裂することをいう.

(2) (R,Δ) が**鋭 F-純 (sharply F-pure)** であるとは, 無限個の整数 $e>0$ に対し $\mathcal{O}_X$-加群の射 $F^e\colon \mathcal{O}_X \to F^e_*\mathcal{O}_X(\lceil (p^e-1)\Delta \rceil)$ が分裂することをいう.

(3) (R,Δ) が**強 F-正則 (strongly F-regular)** であるとは, 任意の有効因子 D に対し, ある整数 $e>0$ が存在して, $\mathcal{O}_X$-加群の射 $F^e\colon \mathcal{O}_X \to F^e_*\mathcal{O}_X(\lceil p^e\Delta + D\rceil)$ が分裂することをいう.

X が射影多様体のとき, 上の条件 (1), (2), (3) をみたす組 (X,Δ) をそれぞれ **F-分裂的 (F-split)**, **鋭 F-分裂的 (sharply F-split)**, **大域的 F-正則 (globally F-regular)** であるという.

一般に, 強 F-正則 $\Rightarrow$ 鋭 F-純 $\Rightarrow$ F-純 (大域的 F-正則 $\Rightarrow$ 鋭 F-分裂的 $\Rightarrow$ F-分裂的) である.

観察. X は smooth であるとする. $F^e\colon \mathcal{O}_X \to F^e_*\mathcal{O}_X$ の分裂 $\phi\colon F^e_*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ は

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F^e_*\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F^e_*\mathcal{O}_X,\omega_X)\otimes\omega_X^{-1} \cong F^e_*(\omega_X)\otimes\omega_X^{-1} \cong F^e_*(\omega_X^{\otimes 1-p^e})$$

の大域切断 $\phi\in H^0(X,\mathcal{O}_X((1-p^e)K_X))$ とみなせる. 分裂 ϕ の定める有効因子を $D\sim(1-p^e)K_X$ とすると

$$\begin{array}{ccc}
(F^e)^\vee\colon H^0(X,\mathcal{O}_X((1-p^e)K_X)) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{O}_X) \\
\cup & & \Cup \\
H^0(X,\mathcal{O}_X((1-p^e)K_X-D)) \ni \phi & \mapsto & 1
\end{array}$$

となる. 再び双対をとれば, $F^e\colon \mathcal{O}_X \to F^e_*\mathcal{O}_X \hookrightarrow F^e_*\mathcal{O}_X(D)$ が ϕ によって分裂することがわかる. この分裂性より, 因子 D に現れる各素因子の重複度 $<p^e$ である.

$$\Delta := \frac{1}{p^e-1}D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$$

とおけば, (X,Δ) は F-分裂的, $K_X+\Delta\sim_{\mathbb{Q}}0$ で, Δ の係数 ≤ 1 である.

以上の基本的な考察を精密化することにより次を得る. 雑な云い方をすれば, 対数的 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 性の下で, F-正則 $\Rightarrow$ klt, F-純 $\Rightarrow$ lc が成り立つということである.

定理 [HW]. R を正規環, Δ を $X=\operatorname{Spec} R$ 上の有効有理係数因子とし, $K_X+\Delta$ が $\mathbb{Q}$-Cartier であると仮定する. 正規な $\widetilde{X}$ からの双有理固有射 $f\colon \widetilde{X}\to X$ に対し,

$$K_{\widetilde{X}} = f^*(K_X+\Delta) + \sum_{i=1}^r a_iE_i,$$

ここに, $E_1,\dots,E_r$ は f の例外因子または Δ の強変換の既約因子で $a_1,\dots,a_r\in\mathbb{Q}$, とおく. このとき

(1) (R,Δ) が F-純ならば, 各 $i=1,\dots,r$ に対し, $a_i\ge -1$.

(2) (R,Δ) が強 F-正則ならば, 各 $i=1,\dots,r$ に対し, $a_i>-1$.

F-正則性については “標数 $p \gg 0$” で前定理の逆も成り立つ:

定理 ([H2], Takagi [T]). 標数 0 の組 (R, Δ) が川又対数的端末特異点のみをもつなら, その標数 $p \gg 0$ への還元 (R_p, Δ_p) は強 F-正則である.

定理の大域版 (Smith–Schwede [SS]).

(1) X を標数 $p > 0$ の大域的 F-正則な射影多様体とする. すると, X 上の有効 $\mathbb{Q}$-因子 Δ で, (X, Δ) が大域的 F-正則かつ $-(K_X + \Delta)$ が豊富な $\mathbb{Q}$-Cartier 因子であるものが存在する.

(2) (X, Δ) を標数 0 の対数的 Fano 多様体, すなわち, (X, Δ) が klt かつ $-(K_X+\Delta)$ が豊富な $\mathbb{Q}$-Cartier 因子であるとする. すると, (X, Δ) の標数 $p \gg 0$ への還元 (X_p, Δ_p) は大域的 F-正則である.

注意. 上の大域版 (1) の Δ は標数 p によって決まるもので, 標数 p への還元が大域的 F-正則となる標数 0 の X 上でこのような Δ がとれるかどうかはわからない. Fujino–Gongyo [FG] はこの結果と標数 p への還元の手法を巧妙に組み合わせて, 標数 0 の弱 Fano 多様体の像が弱 Fano 多様体であることの証明を得ている.

大域的 F-正則な射影多様体の特殊な例として, 射影的トーリック多様体の他に次が知られている.

定理 (Lauritzen–Raben-Pedersen–Thomsen [LRT], Hashimoto [Has]).
正標数の Schubert 多様体は大域的 F-正則である.

注意. 鋭 F-純 (sharply F-pure) の定義は K. Schwede [Sc] による. Schwede はこれを用いて標数 0 の極小モデル理論に現れる特異点のそれらと類似する F-特異点の以下の性質を定式化した ([Sc2], [Sc3]):

- center of sharp F-purity
- F-adjunction and its inverse

これらの性質は鋭 F-純との相性が良く, 鋭 F-純の代わりに F-純を用いるとうまく定式化できない. F-純と鋭 F-純は一長一短であって, その一方で, 次に定義する F-純閾値は, 鋭 F-純より F-純との相性が良いように思われる.

定義. R が F-正則局所環のとき, 組 (R, Δ) の **F-純閾値 (F-pure threshold)** を

$$\mathrm{fpt}(R, \Delta) := \sup\{t \in \mathbb{R}_{>0} \,|\, (R, t\Delta)\colon \text{F-純}\,\}$$

で定義する. 一般に,

$$\mathrm{fpt}(R, \Delta) = \sup\{t \in \mathbb{R}_{>0} \,|\, (R, t\Delta)\colon \text{強 F-正則}\,\} = \sup\{t \in \mathbb{R}_{>0} \,|\, (R, t\Delta)\colon \text{鋭 F-純}\,\}$$

であり, Δ が Cartier 因子のとき, $\mathrm{fpt}(R, \Delta) = \max\{t \in \mathbb{R}_{>0} \,|\, (R, t\Delta)\colon \text{F-純}\,\}$ である.

言うまでもなく, F-純閾値は標準的対数閾値 (log canonical threshold) の正標数版である. F-純閾値が有理数値をとることは明らかではないが, Blickle–Mustaţă–Smith により次が示され, さらに [BSTZ] で一般化されている.

定理 [BMS]. R が標数 $p > 0$ の完全体上の多項式環, $0 \neq f \in R$ のとき,

$$\mathrm{fpt}(R, \mathrm{div}(f)) \in \mathbb{Q}.$$

3. R-加群 $R^{1/q}$ の構造

$(R,\mathfrak{m})$ は d 次元 Noether 局所整域で，標数 $p>0$ の完全体 $k=R/\mathfrak{m}$ 上定義されているとする．標数 p の各ベキ $q=p^e$ に対して, 直和分解

$$R^{1/q}=R^{\oplus a_q}\oplus M_q$$

を考える．ここに，M_q は自由な直和因子をもたない R-加群とする．

定理・定義 (Huneke–Leuschke [HL], Aberbach–Leuschke [AL]). 上の記号の下で次の三条件は同値である:

(1) R は強 F-正則;

(2) $\displaystyle\limsup_{q\to\infty}\frac{a_q}{q^d}>0$;

(3) $\displaystyle\liminf_{q\to\infty}\frac{a_q}{q^d}>0$.

極限 $\displaystyle\lim_{q\to\infty}\frac{a_q}{q^d}\in\mathbb{R}$ が存在するとき，これを R の **F-符号（F-signature)** とよぶ.

この結果は『F-正則 $\Leftrightarrow$ $R^{1/q}$ の自由な直和因子が多い』という直観を裏付けている．では $R^{1/q}$ の他の直和因子については何が云えるだろうか? F-正則より強い仮定の下で次が知られている.[2]

命題 (Smith–Van den Bergh [SVB]). $R=S^G$ を標数 p の体 k 上の多項式環 S に作用する群 G の不変部分環とし, G は次のいずれかであると仮定する:

(1) 線型簡約群,　または　(2) 位数が $\mathrm{ch}(k)=p$ で割り切れない有限群.

このとき，R は **FFRT**, すなわち, すべての $R^{1/q}$, $q=p^e$ の直和分解に現れる直既約 R-加群の同型類は高々有限個である.

注意. 本質的なことは，S 自身が FFRT で R が S の純部分環となっていることで，上の (2) の場合を含む次の場合にも R は FFRT である:

(2') $R\subset S$: 有限純拡大，S は正則局所環.

命題の (2) の場合，拡大 $R\subset S$ は分離的だが，(2') は非分離拡大の場合も含んでおり, その場合には R は群作用の不変式環とはならないことを注意しておく．一方で, (1), (2), (2') のいずれの場合も R は強 F-正則ゆえ, $R^{1/q}$ の直和因子はすべて $R^{1/pq}$ の直和因子となる.

以下，$R\subset S$ は (2') の仮定をみたすとする．R-加群 R^{1/p^e} $(e=0,1,2,\dots)$ の直和分解に現れる直既約 R-加群の同型類すべての代表を $M_1,\dots,M_r$ とし,

$$R^{1/p^e}=\bigoplus_{i=1}^{r}M_i^{\oplus a_{i,e}}$$

とおくとき, 各 $i=1,\dots,r$ に対し次の極限が存在し正の有理数値をとる [SVB]:

$$\lim_{e\to\infty}\frac{a_{i,e}}{p^{de}}\in\mathbb{Q}_{>0}.$$

S の正則性より, $R^{1/q}$ の直和因子である M_i たちは MCM(極大 Cohen–Macaulay) 加群であり, その $R^{1/q}$ の直和分解に現れる個数 $a_{i,e}$ は q^d の増大度をもつことになるが, では, どの直既約 MCM 加群が $R^{1/q}$ の直和因子として現れるのだろうか?

---

[2] 一般の F-正則環では高次元で FFRT でない例があるという (A. Singh).

2 次元の場合. 以下では基礎体 k は代数閉体として, 上の問を 2 次元で考える. この場合の答は, すべての直既約 MCM 加群 (2 次元では反射的加群と同じ) が $R^{1/q}$ ($q = p^e \gg 0$) の直和因子として現れる, ということである. 証明のポイントは, S の直和因子である R の強 F-正則性を使うことであり, そのために以下の分類を用いる.

定理 [H1]. 2 次元の F-正則特異点は, 対数的端末特異点であり, その最小特異点解消の例外集合の重み付き双対グラフの型と標数 p により以下のように分類される.

(1) A 型, p は任意;
(2) D 型, $p \neq 2$;
(3) E_6, E_7 型, $p > 3$;
(4) E_8 型, $p > 5$.

上の分類結果を case by case に調べることにより次を得る (cf. [A], [LN]). 一般に, (F-) 正則環の純部分環が F-正則であることは前節で述べたが, 逆に, F-正則環が正則な有限純拡大環をもつということは 2 次元特有の現象である.

定理 [H3]. 標数 $p > 0$ の代数閉体 k を係数体とする 2 次元完備局所環 R に対し, R が F-正則であることと有限純拡大 $R \subseteq S = k[[t,u]]$ が存在することは同値である.

系. 2 次元 F-正則特異点 (X,x) の完備局所環 $R = \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ 上有限生成な直既約反射的加群の同型類は高々有限個である.

より精しく, すべての直既約反射的 R-加群 (の同型類) は, 上の定理の有限純拡大 $R \subset S = k[[t,u]]$ において, S の直和因子として現れる. 同様にして次が示される.

定理 [H3]. 2 次元 F-正則特異点 (X,x) の完備局所環 $R = \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ 上の任意の直既約反射的加群は R^{1/p^e} ($e \gg 0$) の直和因子となる.

(証明) 直既約反射的 R-加群が有限個だから, 任意の反射的加群 M 上の c 倍写像が

$$c : M \to R^{\oplus r} \to M$$

と階数 $r = \operatorname{rank} M$ の自由加群を経由するような $0 \neq c \in R$ がとれる. R の F-正則性より, ある $q = p^e$ が存在して, 写像 $R \hookrightarrow R^{1/q} \xrightarrow{c^{1/q}} R^{1/q}$ が分裂する. よって

$$M = \operatorname{Hom}_R(M^\vee, R) \to \operatorname{Hom}_R(M^\vee, R^{1/q}) \xrightarrow{c^{1/q}} \operatorname{Hom}_R(M^\vee, R^{1/q})$$

も分裂する. $M^{(e)} = \operatorname{Hom}_R(M^\vee, R^{1/q})$ は反射的 $R^{1/q}$-加群ゆえ, $c^{1/q}\colon M^{(e)} \to M^{(e)}$ は自由 $R^{1/q}$-加群 $(R^{1/q})^{\oplus r}$ を経由し, M はその直和因子であることがわかる. □

F-爆発への応用. 前定理の応用として, 2 次元 F-正則特異点の F-爆発が非常に良い双有理変換であることが示される.

定義 (Yasuda [Y]). X を標数 $p > 0$ の代数多様体, e を非負整数とする.
$\mathcal{O}_X$-加群 $F^e_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X^{1/p^e}$ の普遍的平坦化を X の e 次 **F-爆発 (F-blowup)** とよび, $\varphi_e\colon \mathrm{FB}_e(X) \to X$ で表す. すなわち, φ_e は, $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{O}_X^{1/p^e}$ の $Z = \mathrm{FB}_e(X)$ への捩れを除いた引き戻し $\varphi_e^\star\mathcal{O}_X^{1/p^e} = \varphi_e^*\mathcal{O}_X^{1/p^e}/\mathrm{torsion}$ が平坦な $\mathcal{O}_Z$-加群となるという性質に関して普遍的な双有理固有射である.

F-爆発 $\varphi_e\colon \mathrm{FB}_e(X) \to X$ は X_{sm} 上同型な射影的双有理射である (cf. Kunz の定理).

定理 [H3]. 2 次元 F-正則特異点 (X,x) の e 次 F-爆発 $\varphi_e\colon \mathrm{FB}_e(X) \to X$ は $e \gg 0$ において最小特異点解消と一致する.

これは，標数 0 において，2 次元商特異点の G-Hilb が最小特異点解消であるという結果 (Ito–Nakamura [IN], A. Ishii [I]) の正標数版と考えられる. 実際, 高次元でも従順 (tame) な商特異点について次が示されている.

定理 (Toda–Yasuda [TY]). 位数が $\mathrm{ch}(k) = p$ で割り切れない有限群 G が多項式環 $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ に作用しているとし，$\pi\colon Y = \mathrm{Spec}\ S \to X = Y/G = \mathrm{Spec}\ S^G$ を商写像とする．このとき $e \gg 0$ に対して

$$\mathrm{FB}_e(X) \cong \mathrm{Hilb}^G(Y).$$

従順な有限群の作用の不変式環は純部分環だが, 野蛮 (wild) な作用の不変式環は純部分環とは限らない. そこで, 上の従順な商特異点に関する結果の一般化として次が成り立つことが期待される.

予想. 標数 p の F-正則局所環 R が正則局所環 S を有限純拡大にもつとし，対応する有限被覆を $\pi\colon Y = \mathrm{Spec}\ S \to X = \mathrm{Spec}\ R$ とする．このとき $e \gg 0$ に対して

$$\mathrm{FB}_e(X) \cong \mathrm{Bl}_{\pi_*\mathcal{O}_Y}(X)$$

であろう．この右辺は R-加群 $S = \pi_*\mathcal{O}_Y$ の普遍的平坦化である．

この予想は, $\mathrm{End}_R(S)$ が MCM 加群という仮定の下で成り立つことが Yasuda [Y2] により示されている.

F-正則でない特異点の F-爆発は, 2 次元 F-純の場合でさえ, あまり良い振る舞いを示さないことがわかってきている [HSY].

References

[AL] I. Aberbach and G. Leuschke, *The F-signature and strong F-regularity*, Math. Res. Lett. **10** (2003), 51–56.

[A] M. Artin, *Covering of the rational double points in characteristic p, in* Complex Analysis and Algebraic Geometry, pp.11–22, Iwanami Shoten, Tokyo, 1977.

[BMS] M. Blickle, M. Mustaţă and K. E. Smith, *Discreteness and rationality of F-thresholds*, Michgan Math. J. **57** (2008), 43–61.

[BSTZ] M. Blickle, K. Schwede, S. Takagi, W. Zhang, *Discreteness and rationality of F-jumping numbers on singular varieties*, Math. Ann. **347** (2010), 917–949.

[F] R. Fedder, *F-purity and rational singularity*, Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1983), 461–480.

[FG] O. Fujino and Y. Gongyo, *On images of weak Fano manifolds*, arXiv:1003.1483

[H1] N. Hara, *Classification of two-dimensional F-regular and F-pure singularities*, Adv. Math. **133** (1998), 33–53.

[H2] N. Hara, *A characterization of rational singularities in terms of injectivity of Frobenius maps*, Amer. J. Math. **120** (1998), 981–996.

[H3] N. Hara, *F-blowups of F-regular surface singularities*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[HSY] N. Hara, T. Sawada and T. Yasuda, *F-blowups of normal surface singularities*, arXiv:1108.1840

[HW] N. Hara and K.-i. Watanabe, *F-regular and F-pure rings vs. log terminal and log canonical singularities*, J. Algebraic Geom. **11** (2002), 363–392.

[Has] M. Hashimoto, *Another proof of the global F-regularity of Schubert varieties*, Tohoku Math. J. **58** (2006), 323–328.

[HH1] M. Hochster and C. Huneke, *Tight closure and strong F-regularity*, Mem. Soc. Math. France, **38** (1989), 119–133.

[HH2] M. Hochster and C. Huneke, *Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990) 31–116.

[HR] M. Hochster and J. Roberts, *The purity of the Frobenius and local cohomology*, Adv. Math. **21** (1976), 117–172.

[HL] C. Huneke and G. Leuschke, *Two theorems about maximal Cohen-Macaulay modules*, Math. Ann. **324** (2002), 391–404.

[I] A. Ishii, *On the McKay correspondence for a finite small subgroup of $GL(2, \mathbb{C})$*, J. Reine Angew. Math. **549** (2002), 221–233.

[IN] Y. Ito and I. Nakamura, *McKay correspondence and Hilbert schemes*, Proc. Japan Acad. **72**, Ser. A (1996), 135–138.

[K] E. Kunz, *On Noetherian rings of characteristic p*, Amer. J. Math. **98** (1976), 999–1013.

[LRT] N. Lauritzen, U. Raben-Pedersen and J. F. Thomsen, *Global F-regularity of Schubert varieties with applications to $\mathcal{D}$-modules*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), 345–355.

[LN] Y. Lee and N. Nakayama, *Simply connected surfaces of general type in positive characteristic via deformation theory*, preprint.

[Sc] K. Schwede, *Generalized test ideals, sharp F-purity, and sharp test elements*, Math. Res. Lett. **15** (2008), 1251–1261.

[Sc2] K. Schwede, *F-adjunction*, Algebra & Number Theory (2009), 907-950.

[Sc3] K. Schwede, *Centers of F-purity*, Math. Z. **265** (2010), 687-714.

[SS] K. Schwede and K. E. Smith, *Globally F-regular and log Fano varieties*, Adv. Math. **224** 863–894.

[Si] A. Singh, *$\mathbb{Q}$-Gorenstein splinter rings of characteristic p are F-regular*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **127** (1999), 201–205.

[SVB] K. E. Smith and M. Van den Bergh, *Simplicity of rings of differenial operators in prime characteristic*, Proc. London Math. Soc. **(3) 75** (1997), 32–62.

[T] S. Takagi, *An interpretation of multiplier ideals via tight closure*, J. Algebraic Geom. **13** (2004), 393–415.

[TY] Y. Toda and T. Yasuda, *Noncommutative resolution, F-blowups and D-modules*, Adv. Math. **222** (2009), 318-330.

[Y] T. Yasuda, *Universal flattening of Frobenius*, arXiv:0706.2700

[Y2] T. Yasuda, *Pure subrings of regular local rings, endomorphism rings and Frobenius morphisms*, arXiv:1108.5797