頂点作用素代数における Zhu の有限性条件の現在

安部 利之 (愛媛大学大学院理工学研究科)

1 序

頂点作用代数 (Vertex Operator Algebra, 以下 VOA) と呼ばれる代数系は, 整数と対応付けられた可算無限個の二項演算を備えたベクトル空間である. その演算達の間には Borcherds 恒等式と呼ばれる関係式があり, それらの演算は結合則も交換則も満たさないが, 頂点作用素と呼ばれる演算の母関数を考えると, その母関数が結合則や交換則にあたる関係式を満たしている. 講演では, VOA の定義から出発し, C_2-有限性という概念を中心に, 現在まで知られた結果や予想, 今後の展開についての解説を行った. この C_2-有限性 (C_2-余有限性とも呼ばれる）は, その定義は一見簡明なのであるが, VOA の表現論において非常に多くの豊かな性質を導く性質である. その意味においても, 具体的な模型において実際にその性質を満たすかどうかの検証は困難な場合が多い. そこで, ここでは C_2-有限性から得られる諸結果についてはまとめるだけにしておいて, どのように C_2-有限性を検証するのかという点に注目して述べていきたい.

今回の講演は, C_2-有限性に関する研究が現在までにどのくらい進んでいるのか, そしてどのような未解決問題があるのかまとめて, 発表する非常に良い機会でした. このような機会を与えていただいた, 代数学シンポジウムのオーガナイザーの皆様, 特に千吉良直紀氏にはこの場を借りてお礼申しあげます.

2 VOA

VOA の定義については幾つか流儀があるが, ここでは可算無限個の積を持つ代数系ということを強調するために Borcherds 恒等式を用いた定義を採用する (例えば [MN] を参照). またベクトル空間は $\mathbb{C}$ 上で考える. 全体を通して非負整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で表し, 正の整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{>0}$ で表す.

2.1 VOA の定義

VOA とは, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し, n-**積**と呼ばれる双線形演算

$$\cdot_{(n)}\cdot : V \times V \to V, \quad (a,b) \mapsto a_{(n)}b$$

を備えた $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graded ベクトル空間 $V = \bigoplus_{d=0}^{\infty} V_d$ であって, 特別な元 $\mathbf{1} \in V_0$ および $\omega \in V_2$ を持つものである. その公理は **(V1)**–**(V6)** まであるが, 必要な事柄を述べながら一つずつ挙げていく.

(V1) 任意の $a, b \in V$ に対し, 整数 N が存在して, $a_{(n)}b = 0$ $(n \geq N)$ が成り立つ.

(V2) Borcherds 恒等式 : $a, b, c \in V$, $p, q, r \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} (a_{(p+i)}b)_{(r+q-i)}c$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (-1)^i (a_{(p+r-i)}(b_{(q+i)}c) - (-1)^p b_{(p+q-i)}(a_{(r+i)}c)) \quad (2.1)$$

両辺とも無限和の形をしているが, 公理 (V1) より, 実際には a, b, c を固定すれば, 有限和となることがわかる.

この恒等式から導かれる式を幾つか挙げておこう.

- **交換公式**:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} (a_{(i)}b)_{(r+q-i)}c = a_{(r)}(b_{(q)}c) - b_{(q)}(a_{(r)}c) = [a_{(r)}, b_{(q)}]c. \quad (2.2)$$

この式は (2.1) において $p = 0$ とおけば得られる.

- **結合公式**:

$$(a_{(p)}b)_{(q)}c = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (-1)^i (a_{(p-i)}(b_{(q+i)}c) - (-1)^p b_{(p+q-i)}(a_{(i)}c)) \quad (2.3)$$

この式は (2.1) において $r = 0$ とすれば得られる.

(V3) (**真空元** $\mathbf{1} \in V_0$) 任意の $a \in V$, $m \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\mathbf{1}_{(m)}a = \delta_{m,-1}a, \quad a_{(-1)}\mathbf{1} = a, \quad a_{(m)}\mathbf{1} = 0 \quad \text{if } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

真空元に関しては次の公式が得られる.

命題 2.1. 任意の $a, b \in V$, $n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$(a_{(-2)}\mathbf{1})_{(n)}b = -na_{(n-1)}b. \quad (2.4)$$

証明: 結合公式 (2.3) より,

$$\begin{aligned}
(a_{(-2)}\mathbf{1})_{(n)}b &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-2}{i} (-1)^i (a_{(-2-i)}\mathbf{1}_{(n+i)}b - \mathbf{1}_{(-2+n-i)}a_{(i)}b) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(\delta_{n+i+1,0}a_{(-2-i)}b - \delta_{n-i-1,0}a_{(i)}b) \\
&= -n \sum_{i=0}^{\infty} (\delta_{i,-n-1} + \delta_{i,n-1})a_{(n-1)}b \\
&= -na_{(n-1)}b.
\end{aligned}$$

□

(V4) (**Virasoro 元** ω) 任意の整数 n に対し, $\omega_{(n+1)}$ による左積を L_n とおく. この時, ある複素定数 c_V が存在して, Virasoro 代数の交換関係式

$$[L_m, L_n]a = (m-n)L_{m+n}a + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c_V a$$

が成り立つ. この c_V を V の **中心電荷**という.

別の言い方をすれば, $\{L_n, \mathrm{id}_V\}$ によって V は中心電荷 c_V の Virasoro 代数の加群となるということである.

(V5) 任意の $a \in V$ に対し, $L_{-1}a = a_{(-2)}\mathbf{1}$.

式 (2.4) を用いると次の式が成り立つことがわかる.

命題 2.2. 任意の $a, b \in V$, $n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$(L_{-1}a)_{(n)}b = (a_{(-2)}\mathbf{1})_{(n)}b = -na_{(n-1)}b \tag{2.5}$$

特に任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し,

$$a_{(-n-1)}\mathbf{1} = \frac{1}{n!}{L_{-1}}^n a \in L_{-1}V, \tag{2.6}$$

$$a_{(-n)}b = \frac{1}{(n-1)!}({L_{-1}}^{n-1}a)_{(-1)}b = (a_{(-n)}\mathbf{1})_{(-1)}b. \tag{2.7}$$

(V6) V_d は左積 L_0 に関する固有値 d の固有空間である. $a \in V_d$ のとき, a の **ウェイト** と呼ぶ. また $\dim_{\mathbb{C}} V_d < \infty$.

VOA V は $V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ であるとき, **CFT 型**と呼ばれる. このとき, $L_{-1}\mathbf{1} = \omega_{(0)}\mathbf{1} = 0$ より, $\mathbb{C}\mathbf{1} \subset \mathrm{Ker}\ L_{-1}$ である. 一方 $\{L_{-1}, 2L_0, L_1\}$ が sl_2-triple を与えることに注意すると, $\mathrm{Ker}\ L_{-1}$ は V の graded 部分空間であることがわかる. その L_0 の固有値は非負であり, 更に任意の $u \in \mathrm{Ker}\ L_{-1}$ に対し, u は有限次元 $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$-加群を生成するので, $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ の表現論から, $L_0 u = 0$ すなわち $u \in \mathbb{C}\mathbf{1}$ であることがわかる. このように CFT 型の VOA では

$$\mathrm{Ker}\ L_{-1} = \mathbb{C}\mathbf{1}$$

が成立している.

2.2 VOA の加群

VOA V の加群について簡単に述べる. まず **弱 V-加群** とは, 各整数 n に対し, 双線形写像

$$-_{(n)}- : V \times M \to M, \quad (a, u) \mapsto a_{(n)}u$$

を備えているベクトル空間 M であって, 次の公理を満たすものである.

(M1) 任意の $a \in V$, $u \in M$ に対し, ある $N \in \mathbb{Z}$ が存在して $a_{(n)}u = 0$ $(n \geq N)$.

(M2) Borcherds 恒等式：任意の $a, b \in V$, $u \in M$, $p, q, r \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} (a_{(p+i)}b)_{(r+q-i)}u = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (-1)^i (a_{(p+r-i)}(b_{(q+i)}u) - (-1)^p b_{(p+q-i)}(a_{(r+i)}u)).$$

(M3) 任意の $u \in M$, $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathbf{1}_{(n)}u = \delta_{n,-1}u$.

ここで $L_n := \omega_{(n+1)}$ $(n \in \mathbb{Z})$ とおくと M もまた中心電荷 c_V の Virasoro 代数の加群となる.

定義 2.3. (1) 弱 V-加群 M が適当な $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-grading $M = \bigoplus_{d=0}^{\infty} M(d)$ に関し,

$$a_{(n)}M(m) \subset M(k+m-n-1), \quad a \in V_k$$

を満たす時, M を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$**-gradable 加群**と呼ぶ (許容加群ともよぶ).

(2) 弱加群 M が, L_0 の有限次元固有空間の直和に分解するとき M は **(通常の) 加群**と呼ぶ.

定義 2.4. VOA V は任意の弱加群が既約な加群の直和に分解されるとき**正規** であるという. また任意の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-gradable 加群が既約な $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-gradable 加群の直和に分解するとき**有理的**であるという.

VOA が正規ならば有理的であることがわかる. 逆も正しいと予想されているが, 現在の所未解決であり, 次の節で述べる定理 3.2 のようにある仮定のもとでは成立することが知られている.

3 C_2-有限性の定義とその帰結

ここでは C_2-有限性の定義や性質について述べる. まず一般に C_N 有限性の定義をする. 任意の $N \geq 2$ に対し, V の部分空間

$$C_N(V) := \langle a_{(-N)}b | a, b \in V \rangle_{\mathbb{C}}.$$

を考える.

定義 3.1. VOA V が C_N**-有限** $\Leftrightarrow \dim V/C_N(V) < \infty$.

1992 年, Y. Zhu が C_2-有限性の概念を学位論文で導入した. その後出版された記念碑的論文 [Zh] では, Zhu は**有限性条件** C と呼んでいる. また Zhu はその論文の中で, 有理性についても考察しており, Zhu 代数と呼ばれる VOA の商空間として得られる単位的結合代数を導入し, 有理的ならば Zhu 代数が半単純であるという結果を証明した. この Zhu 代数はその既約加群から VOA の既約加群が構成できるなど, VOA の表現論と密接に関連している. 特に有理的であれば既約加群が有限個になることもわかる.

このようには有理性という概念がちょうど共形場理論における有理性に対応すると考えられていた. つまり単純な VOA に対し, 次の有理的共型場理論のモデルの持つ諸性質:

(i) 既約な通常の加群は同型を除き有限個.

(ii) 通常の加群は完全可約.

(iii) 跡関数のモジュラー不変性.

(iv) 中心電荷, 共形ウェイトは有理数.

(v) フュージョン則の有限性.

(vi) 有限生成 V-加群の圏は適当なテンソル積に関し, モジュラーテンソル圏 (Verlinde 公式が成立).

が有理性のみから導かれると期待されていた. 現在までに, これら諸性質は単純, 有理的かつ C_2-有限な VOA に対して成立することが証明されている. 参考となる文献としては (i), (ii), (iii) については [Zh], (iv) は (iii) 及び [AnM]. (v) は [AN] 及び [Bu]. (vi) については例えば [Hu1] でまとめられている.

実は有理性と C_2-有限性が成り立つとき, 任意の弱加群が完全可約になることが知られている.

定理 3.2. *CFT 型の VOA V が正規であるための必要十分条件は有理的かつ C_2-有限的であることである.*

証明は $(\Rightarrow)$ は [Li99], $(\Leftarrow)$ は [ABD04] による.

4 C_2-有限性の効用

前節では有理的共型場理論のもつ豊かな構造が, 有理性と C_2-有限性から導かれることを述べた. 実はこれらの構造の類似もしくは一般化が C_2-有限性のみから導かれることが知られている.

i) 既約加群は同型を除き有限個 ([Zh]).

ii) 有限生成加群は有限組成列を持つ ([Mi1]).

iii) 擬跡関数のモジュラー不変性 ([Mi1]).

iv) 中心電荷, 共形ウェイトは有理数 ([Mi1], [AnM]).

v) フュージョン則の有限性 ([AN]).

vi) 有限生成 V-加群の圏は適当なテンソル積に関し, ブレイドテンソル圏 ([Hu2]).

物理の分野では「logarithmic 共型場理論」が 1993 年頃から研究されていた (cf. [Gu]). これが「有理的とは限らない C_2-有限な VOA」 に対応すると考えられている. 有理的でない C_2-有限な VOA の例はここ数年でいろいろ発見されてきている.

例 4.1. Triplet VOA $\mathcal{W}_p$, $p \geq 2$ ([CF], [NT2]). 中心電荷は $c = c_{p,1} = 1 - 6\frac{(p-1)^2}{p}$.

例 4.2. symplectic-fermionic VOSA の偶部分 ([Ab1]).

例 4.3. W-代数 $\mathcal{W}_{2,q}$ q : (奇数 ≥ 3) ([FGST], [AdM]) . 一般の $\mathcal{W}_{p,q}$ についてはまだ予想. ただし, この VOA は単純ではない.

C_2-有限性の与える VOA の構造への寄与に関しては Gaberdiel と Neitzke による論文 [GN] が非常に大きな影響を与えた.

定理 4.4. (Gaberdiel-Neitzke による生成系定理) V を CFT 型の VOA とし, 部分空間 U を $C_2(V)$ の補空間とする; $V = U \oplus C_2(V)$. このとき

$$V = \langle a^1_{(-n_1)} \cdots a^r_{(-n_r)} \mathbf{1} | a^i \in U, n_1 > n_2 > \cdots > n_r \geq 1 \rangle_{\mathbb{C}}. \tag{4.1}$$

この定理より, 直ちに次の定理が得られる.

定理 4.5. V を CFT 型の頂点作用素代数とする. このとき V が C_2-有限であることと, ある $N \geq 2$ に対し C_N-有限となることは同値である.

この定理からも C_2-有限性が非常に強い拘束条件であることがわかる. 定理 4.4 は Buhl ([Bu]) により, 有限生成弱加群に対し少し生成系に条件の入った形で一般化され, その後, 宮本氏 ([Mi1]), 永友-土屋両氏 ([NT1]) により改良されている.

定理 4.6. V を CFT 型の VOA とし, M を $u \in M$ で生成された弱 V-加群とする. また U を V における $C_2(V)$ の補空間とする. このとき

$$M = \langle a^1_{(-n_1)} \cdots a^r_{(-n_r)} u | a^i \in U, n_1 > n_2 > \cdots > n_r \rangle_{\mathbb{C}}. \tag{4.2}$$

C_N-有限性は弱加群に対しても自然に定義できるが, 定理 4.6 により, 次の定理が成り立つことがわかる.

定理 4.7. V を CFT 型の頂点作用素代数とし, M を有限生成弱 V-加群とする. このとき M が C_2-有限であることと, ある $N \geq 2$ に対し, C_N-有限となることは同値である.

5　C_2-有限性の検証方法

ここでは実際にどのように C_2-有限性が検証されていくのか, 幾つかに分けて見ていく. [Zh] で示されているように, 商空間

$$R(V) := V/C_2(V)$$

には, $\overline{a} := a + C_2(V)$ $(a \in V)$ とおいたとき, 可換結合積を $\overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a_{(-1)}b}$, Lie 積を $[\overline{a}, \overline{b}] := \overline{a_{(0)}b}$ $(a, b \in V)$ と定義することで Poisson 代数の構造が入る. 言い換えれば -1-積と 0-積がそれぞれ $R(V)$ に可換結合積と Lie-積を誘導する.

今, 任意の $a \in V$ に対し, $L_{-1}a = a_{(-2)}\mathbf{1}$ であるので,

$$L_{-1}V \subset C_2(V)$$

となることがわかる. 特に (2.6) より, 任意の正の整数 n に対し,

$$\overline{a_{(-n-1)}\mathbf{1}} = 0 \tag{5.1}$$

が得られる.

5.1　強生成系を用いた検証方法

まず強生成系の定義を述べる.

定義 5.1. V を CFT 型の VOA とし, $S \subset V$ とする. S が V の **強生成系**であるとは,

$$V = \langle a^1_{(-n_1)} \cdots a^r_{(-n_r)}\mathbf{1} | a^i \in S, n_i \in \mathbb{Z}_{>0} \rangle_{\mathbb{C}}$$

が成り立つことをいう.

このとき, (2.7) より,

$$a^1_{(-n_1)} \cdots a^r_{(-n_r)}\mathbf{1} = (a^1_{(-n_1)}\mathbf{1})_{(-1)}(a^2_{(-n_2)}\mathbf{1})_{(-1)} \cdots a^r_{(-n_r)}\mathbf{1}.$$

従って, ある i について $n_i \geq 2$ ならば,

$$\overline{a^1_{(-n_1)} \cdots a^r_{(-n_r)}\mathbf{1}} = \overline{a^1_{(-n_1)}\mathbf{1}} \cdot \overline{a^2_{(-n_2)}\mathbf{1}} \cdot \cdots \cdot \overline{a^r_{(-n_r)}\mathbf{1}} = 0$$

となることがわかる. また明らかに

$$\overline{a^1_{(-1)} \cdots a^r_{(-1)}\mathbf{1}} = \overline{a^1} \cdot \overline{a^2} \cdot \cdots \cdot \overline{a^r}.$$

従って, 次の命題を得る .

命題 5.2. V が S で強生成されるならば, $R(V)$ は可換代数として $\overline{S} = \{\overline{a} | a \in S\}$ で生成される.

このように強生成系 S を一つ取り, $R(V)$ の生成系 $\overline{S}$ に対し, $\dim R(V) < \infty$ を示すのに十分な関係式を見つけることで C_2-有限性が検証できる.

例 5.3. (極小系列に属する Virasoro VOA) 中心電荷 c の 単純 Virasoro VOA $L(c,0)$ は $\{\omega\}$ を強生成系に持つ. つまり

$$R(L(c,0)) = \mathbb{C}[\overline{\omega}] \cong \text{“}\mathbb{C}[x] \text{ の商環”}$$

となることがわかる.

ここで $c = c_{p,q} = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$ $(p,q \geq 3, (p,q) = 1)$ の場合を考える. VOA $L(c,0)$ において, ある $w \in C_2(L(c,0))$ が存在して, $L_{-2}^{\frac{(p-1)(q-1)}{2}} \mathbf{1} + w = 0$ が成り立つことが知られている (cf. [IK]). 従って

$$\overline{\omega}^{\frac{(p-1)(q-1)}{2}} = 0 \quad \text{in } R(L(c,0)).$$

となることがわかる. このことより, $R(L(c_{p,q},0))$ には $\mathbb{C}[x]/(x^{\frac{(p-1)(q-1)}{2}})$ から全射準同型が存在するので $R(L(c_{p,q},0))$ は有限次元, すなわち $L(c_{p,q},0)$ が C_2-有限であることがわかる.

この $c = c_{p,q}$ は極小系列の中心電荷と呼ばれており, $L(c,0)$ は C_2-有限であるための必要十分条件が適当な p,q に対し $c = c_{p,q}$ となることが知られている (cf. [Ar1]).

この例以外にも強生成系を用いて証明されている主な例として以下のものがある.

1: 正定値偶格子 L に付随して得られる格子 VOA V_L ([DLM])

2: 単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に付随するレベル k 単純 affine VOA $L_k(\mathfrak{g})$. $L_k(\mathfrak{g})$ が C_2-有限 $\Leftrightarrow k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($\Leftarrow$ [DLM], $\Rightarrow$ cf. [Ar1]).

3: 階数 1 の格子 VOA $V_{\mathbb{Z}\sqrt{2n}}$ の $\mathbb{Z}_2$-オービフォールド模型 $V_{\mathbb{Z}\sqrt{2n}}^{+}$ ([Yam]), $\sqrt{2}A_2$ に付随した格子 VOA の $\mathbb{Z}_3$-オービフォールド模型 ([TY]).

4: 一般の格子 VOA の $\mathbb{Z}_3$-オービフォールド模型 ([Mi2]).

5: 単純, 非有理な C_2-有限 simple VOA; triplet VOA $\mathcal{W}_p$, W-代数 $\mathcal{W}_{2,p}$.

6: affine Lie 代数に付随する W-代数 ([Ar1]).

5.2 充満部分 VOA を用いた方法

別の検証方法として, 充満部分 VOA を用いた方法も知られている.

定義 5.4. V を VOA, U を V の部分 VOA, つまり V の n 積で閉じていて, その n-積に関し VOA となる部分空間とする. U の Virasoro 元が V の Virasoro 元と一致する時, U を V の **充満部分 VOA** という.

充満部分 VOA の C_2-有限性に関しては, 次の定理が知られている.

定理 5.5. V が C_2-有限な充満部分 *VOA* を含むならば V は C_2-有限である.

証明: V は U-加群として有限生成となるので, 定理 4.6 より, U-加群として C_2-有限である. よって V-加群としても C_2-有限である. □

従って V の C_2-有限な充満部分 VOA を見つけることによって, V の C_2-有限性が示される. 以下は C_2-有限な充満部分 VOA を見つけることで C_2-有限性が検証される例である.

1: コード VOA やフレーム VOA, 特にムーンシャイン VOA. これらの VOA は, Ising フレームと呼ばれる $L(\frac{1}{2},0)$ の幾つかのテンソル積を充満部分 VOA として含むので C_2-有限. ここで $\frac{1}{2}=c_{4,3}$ より, $L(\frac{1}{2},0)$ は C_2-有限である.

2: 階数 d の格子 VOA は階数 1 の格子 VOA の d 個のテンソル積を充満部分 VOA として含むので C_2-有限.

3: 階数 d の格子 VOA の $\mathbb{Z}_2$-オービフォールド模型.

4: 中心電荷 $-2d$ の symplectic-fermionic VOSA の偶部分 ([Ab1]).

6 C_2-有限性に関する未解決問題

幾つかのトピックに分けて予想や未解決問題を紹介する .

6.1 オービフォールド模型

単純 VOA V とその有限自己同型群 G に対し,

$$V^G := \{a \in V | g(a) = a, \forall g \in G\}$$

は V の充満部分 VOA となる (オービフォールド模型).

予想 6.1. G が有限自己同型群の時, V が C_2-有限ならば V^G も C_2-有限である.

この予想に関しては $|G| = 2$ でも未解決である. G が巡回群の場合には宮本氏による研究があり, 現在検証中である (cf. 宮本氏の前年度代数学シンポジウム報告集).

オービフォールドに関する予想 6.1 の特別な場合であるが, 現在研究中の置換オービフォールド模型について最近の進展を紹介する.

CFT 型の VOA V に対し, その n 個のテンソル積 $T^n(V) = V^{\otimes n}$ は自然に VOA となる. $T^n(V)$ にはテンソル因子の置換として, n 次対称群 S_n が自己同型群として自然に作用する. このとき得られるオービフォールド模型 $T^n(V)^{S_n}$ を **S_n-置換オービフォールド模型**という. 一般の置換群 $\Omega \subset S_n$ に関しても $T^n(V)^{\Omega}$ を考えることができる. ただ C_2-有限性という観点から見れば, $T^n(V)^{\Omega}$ は $T^n(V)^{S_n}$ を充満部分 VOA として含むので, $T^n(V)^{S_n}$ の C_2-有限性が示されれば, 定理 5.5 より $T^n(V)^{\Omega}$ が C_2-有限であることが導かれる.

予想 6.2. V が C_2-有限ならば, $T^n(V)^{S_n}$ は C_2 有限である.

最近 [Ab2] において, $n = 2$ の場合は解決されてた.

6.2 コミュタント (コセット 構成)

V を VOA とし, ω を V の Virasoro 元, U を V の (充満ではない) 部分 VOA, ω^1 を U の Virasoro 元とする. このとき V の部分空間

$$\mathrm{Com}_V(U) = \{u \in V | a_{(i)}u = 0, \forall a \in U, i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

は, $\mathrm{Com}_V(U)$ は Virasoro 元 を $\omega^2 = \omega - \omega^1$ とする V の部分 VOA となる ([FZ]). この部分 VOA $\mathrm{Com}_V(U)$ を U の V における **コミュタント** という. 実際には, コミュタントは U というより, むしろ Virasoro 元 ω^1 のみを用いて,

$$\mathrm{Com}_V(U) = \{u \in V | \omega^1_{(0)}u = 0\}$$

によって与えられる.

今, W を Virasoro 元が ω^1 の V の部分 VOA とすると,

$$\omega^2_{(0)}w = \omega_{(0)}w - \omega^1_{(0)}w = w_{(-2)}\mathbf{1} - w_{(-2)}\mathbf{1} = 0, \quad w \in W.$$

が得られるので, 包含関係

$$W \subset \mathrm{Com}_V(\mathrm{Com}_V(U))$$

が成立する. 二重コミュタント $\mathrm{Com}_V(\mathrm{Com}_V(U))$ は ω^1 を Virasoro 元とする最大の部分 VOA であることがわかる.

予想 6.3. V および U が C_2-有限ならば $\mathrm{Com}_V(U)$ は C_2-有限である.

この予想は, ω^2 を Virasoro 元として含む C_2-有限な V の部分 VOA W が存在する場合には正しいことがわかる. 実際,

$$\mathrm{Com}_V(U) = \mathrm{Com}_V(\mathrm{Com}_V(W)) \supset W.$$

が成り立つので, $\mathrm{Com}_V(U)$ は W を充満部分 VOA として含む. 従って定理 5.5 より, $\mathrm{Com}_V(U)$ が C_2-有限であることがわかる.

予想 6.3 の解決に向けて, 一般論からの決定的な手掛かりはまだ見つかってないが, 予想を裏付けるいくつかの例が知られている。

例 6.4. (1) ([GKO]): $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathrm{Com}_{L_k(\mathfrak{sl}_2)\otimes L_1(\mathfrak{sl}_2)}(L_{k+1}(\mathfrak{sl}_2)) \cong L\left(c_{k+2,k+3}, 0\right)$.

(2) ([AdP]): $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\mathrm{Com}_{L_1(\mathfrak{o}_{2k})\otimes L_1(\mathfrak{o}_{2k})}(L_2(\mathfrak{o}_{2k})) \cong V^+_{\mathbb{Z}\sqrt{2k}}$.

例 6.5. Parafermion VOA (Dong, Lam, Wang, Yamada の研究 (2009–2011, *J. Alg.*) : $\mathfrak{g}$ を有限次元単純 Lie 環, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $M(k)$ を $\mathfrak{g} \subset L_k(\mathfrak{g})_1$ のカルタン部分環から生成される $L_k(\mathfrak{g})$ の部分 VOA とする. このとき, コミュタント

$$\mathcal{K}(\mathfrak{g}, k) = \mathrm{Com}_{L_k(\mathfrak{g})}(M(k)).$$

に関し, 次が知られている.

$\mathfrak{g}$ が A, D, E 型 $\Rightarrow k \leq 6$ ならば $\mathcal{K}(\mathfrak{g}, k)$ は C_2-有限.

$\mathfrak{g}$ が G_2 型 $\Rightarrow k \leq 2$ ならば $\mathcal{K}(\mathfrak{g}, k)$ は C_2-有限.

$\mathfrak{g}$ が上記以外の型 $\Rightarrow k \leq 3$ ならば $\mathcal{K}(\mathfrak{g}, k)$ は C_2-有限. ただしこの k の上限は現在発表されている数値であり, 任意の k について成立すると考えられている.

6.3 表現論との関連

一般に $\dim R(V)$ を正確に計算することは非常に困難である. したがって $R(V)$ の次元と表現論との関連については現在のところはっきりしとしたものは見つかっていない. しかし幾つかの例を通して様々な観察がなされている.

• $\dim R(V)$ に何か意味があるのか？

この問題に関しては, $\dim R(V)$ と Zhu 代数 ([Zh]) の次元との関連について [GaGa] において例を通し議論されている. affine VOA に関して [FL], [FFL] において次元の等価が確認されている.

• $R(V)$ の Poisson 代数構造と表現論の関係は？

可換環 $R(V)$ に付随する代数多様体との関連について荒川氏の研究がある ([Ar1]). 荒川氏はこの観点から affine リー代数に付随する種々の W-代数の C_2-有限性の証明を与えている.

参考文献

[Ab1] T. Abe, A $\mathbb{Z}_2$-orbifold model of the simplectic fermionic vertex operator superalgebra, *Math. Z.* **255**(2007), No. 4, 755–792.

[Ab2] T. Abe, C_2-cofiniteness of 2-cyclic permutation orbifold models, arXiv:1107.2709.

[ABD] T. Abe, G. Buhl, C. Dong, Rationality, regularity, and C_2-cofiniteness. *Trans. Amer. Math. Soc.* bf 356 (2004), no. 8, 3391–3402.

[AN] T .Abe, K. Nagatomo, Finiteness of conformal blocks over the projective line, "Vertex Operator Algebras in Mathematics and Physics", Fields Institute Communications 39 (2003), 1–12.

[AdM] D. Adamovic, A. Milas, On W-algebras associated to $(2, p)$ minimal models and their representations *Int. Math. Res. Not.* IMRN(2010), no. 20, 3896–3934.

[AdP] : D.Adamovic, O. Perse, On coset vertex algebras with central charge 1, *Math. Commun.* **15** (2010), no. 1, 143–157.

[AnM] G. Anderson, G. Moore, Rationality in conformal field theory, *Commun. Math. Phys.* **117** (1988), no. 3, 441–450.

[Ar1] T. Arakawa, A remark on the C_2-cofiniteness condition on vertex algebras, *Math. Z.*, online first.

[Bu] G. Buhl, A spanning set for VOA modules, *J. Algebra* **254** (2002), no. 1, 125–151.

[CF] N. Carqueville, M. Flohr, Nonmeromorphic operator product expansion and C_2-cofiniteness for a family of $\mathcal{W}$-algebras, *J. Phys. A* **39**(2006), No. 4, 951-966.

[DLM] C. Dong, H. Li, G. Mason, Vertex Lie algebras, vertex Poisson algebras and vertex algebras, *Contemp. Math.*, **297**(2002), 69–96, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[FFL] B. Feigin, E. Feigin, P. Littelmann, Zhu's algebras, C_2-algebras and abelian radicals, *J. Algebra* **329**(2011), Issue 1, 130–146.

[FGST] B. Feigin, A. Gainutdinov, A. Semikhatov, I. Tipunin, Logarithmic extensions of minimal models : characters and modular transformations, *Nucl. Phys.* **B 757** (2006) 303–343.

[FHL] I. Frenkel, Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules, *Mem. Amer. Math. Soc.* **104**, (1993).

[FL] E. Feigin, P. Littelmann, Zhu's algebra and the C_2-algebra in the symplectic and the orthogonal cases, *J. Phys.* A: Math. Theor. 43 (2009).

[FZ] I. Frenkel, Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke. Math. J* **66**(1992), No. 1, 123–168.

[GaGa] M. Gaberdiel, T. Gannon, Zhu's algebra, the C_2 algebra, and twisted modules, *Comtemporary Math.***497** (2009), 65–78.

[GN] M. Gaberdiel , A. Neitzke, Rationality, quasirationality and finite W-algebras, *Commun. Math. Phys.* **238**(2003), no. 1-2, 305–331.

[GKO] P. Goddard, A. Kent, D. Olive, Virasoro algebras and coset space models, *Phys. Lett.* **152** B, 88(1985), 88–92.

[Gu] V. Gurarie, Logarithmic operators in conformal field theory, *Nucl. Phys.* **B410** (1993) 535–549.

[Hu1] Y. Huang, Rigidity and modularity of vertex tensor categories, *Comm. Contemp. Math.* **10** (2008), 871–911.

[Hu2] Y. Huang, Cofiniteness conditions, projective covers and the logarithmic tensor product theory, *J. Pure Appl. Alg.* **213** (2009), 458–475.

[IK] K. Iohara, Y. Koga, Representation theory of the Virasoro algebra, **Springer Mon. Math.**, Springer, 2011.

[Li] H. Li, Some finiteness properties of regular vertex operator algebras *J. Algebra* **212** (1999), no. 2, 495–514.

[MN] A. Matsuo and K. Nagatomo, Axioms for a vertex algebra and the locality of quantum fields, *MSJ Memoirs* **4**, Mathematical Society of Japan, (1999).

[Mi1] M. Miyamoto, Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2-cofiniteness. *Duke Math. J.* **122** (2004), no. 1, 51–91.

[Mi2] M. Miyamoto, A $\mathbb{Z}_3$-orbifold theory of lattice vertex operator algebra and $\mathbb{Z}_3$-orbifold constructions, arXiv:1003.0237.

[NT1] K. Nagatomo, A. Tsuchiya, Conformal field theories associated to regular chiral vertex operator algebras. I. Theories over the projective line, *Duke Math. J.* **128** (2005), no. 3, 393–471.

[NT2] K. Nagatomo, A. Tsuchiya, The Triplet Vertex Operator Algebra W(p) and the Restricted Quantum Group at Root of Unity, arXiv:0902.4607.

[TY] K. Tanabe, H. Yamada, The fixed point subalgebra of a lattice vertex operator algebra by an automorphism of order three, *Pacific J. Math.* **230**(2007) no. 2, 469–510.

[Yam] G. Yamskulna, C_2-cofiniteness of the vertex operator algebra V_L^+, *Commun. Alg.* **38**(2004), 927-954.

[Zh] Y.-C. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9**, 237–302, (1996).