On restricted Auslander algebras

阿部 弘樹（筑波大学）

A をアルティン多元環とし、$\mathcal{C}$ を有限生成右 A-加群の圏 mod-A の充満部分圏とする。いま $\mathcal{C} = \mathrm{add}(M)$ となる加群 $M \in \text{mod-}A$ が取れたと仮定し、$\Gamma_M := \mathrm{End}_A(M)$ とおく。A が有限表現型ならば、このような M は常に取ることができる。$\mathcal{C}$ として mod-A を取れば、Γ_M は A のアウスランダー多元環となることより、Γ_M を $\mathcal{C}$ に制限されたアウスランダー多元環と呼ぶ[*1]。Γ_M のホモロジー代数的性質と $\mathcal{C}$ の圏論的性質は密接に関わり合い、$\mathcal{C}$ をうまく取れば大変良い性質を持った多元環が現れることがある。例えば、捻れ理論 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ に制限されたアウスランダー多元環を考えると、その大域次元は $\mathcal{T}$、$\mathcal{F}$ の圏論的性質から定まる。２つの充満部分圏 $\mathcal{T}, \mathcal{F} \subset \text{mod-}A$ に対して、対 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ が mod-A の捻れ理論であるとは、次の４条件

(1) $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{0\}$、
(2) $\mathcal{T}$ は剰余加群を取る操作で閉、
(3) $\mathcal{F}$ は部分加群を取る操作で閉、
(4) $\forall M \in \text{mod-}A$ に対して、短完全列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ s.t. $M' \in \mathcal{T}, M'' \in \mathcal{F}$ が存在する、

が満たされることであった。いま $\mathcal{T} = \mathrm{add}(X)$ となる加群 $X \in \text{mod-}A$ が取れたと仮定すると、$\mathcal{T}$ に制限されたアウスランダー多元環 Γ_X が定まる。よく知られているように $\mathcal{T}$ には相対的な概分裂短完全列が存在し[*2]、この事実から Γ_X の大域次元が２以下だとわかる。$\mathcal{F}$ についても同様で、$\mathcal{F} = \mathrm{add}(Y)$ となる加群 $Y \in \text{mod-}A$ が取れたと仮定すると、$\mathcal{F}$ に制限されたアウスランダー多元環 Γ_Y の大域次元は２以下となる。本稿では、傾け加群が誘導する捻れ理論 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ に制限されたアウスランダー多元環を取り上げ、そのホモロジー代数的性質を探っていく[*3]。

[*1] オリジナルのアウスランダー多元環については参考文献 [3] を参照。
[*2] 例えば参考文献 [5] を参照。
[*3] 参考文献 [2] に基づく。

射影次元 1 以下の傾け加群 $T \in \text{mod-}A$、準同型環 $B := \mathrm{End}_A(T)$ に対して、函手

$$F := \mathrm{Hom}_A(T, -) : \text{mod-}A \to \text{mod-}B、$$
$$F' := \mathrm{Ext}^1_A(T, -) : \text{mod-}A \to \text{mod-}B$$

を考え $\mathcal{T} := \mathrm{Ker}\ F'$、$\mathcal{F} := \mathrm{Ker}\ F$ とおくと、対 $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ は mod-A の捻れ理論になる。同様に、$\mathcal{X} := \mathrm{Ker} - \otimes_B T$、$\mathcal{Y} := \mathrm{Ker}\mathrm{Tor}^B_1(-, T)$ とおくと、対 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ は mod-B の捻れ理論になる。次の命題は基本的である。

命題 1. 次が成り立つ。

(1) 函手 F は圏同値 $F : \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Y}$ を定める。
(2) 函手 F' は圏同値 $F' : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}$ を定める。
(3) $M \in \mathcal{T}, N \in \mathcal{F}, j \geq 1$ に対して、$\mathrm{Ext}^j_A(M, N) \cong \mathrm{Ext}^{j-1}_B(FM, F'N)$ が成り立つ。

命題 1 (1)(2) はブレンナー・バトラーの定理として知られる[*4]。以下、

$$\mathcal{T} = \mathrm{add}(X), \quad \mathcal{F} = \mathrm{add}(Y)$$

となる加群 $X, Y \in \text{mod-}A$ が取れたと仮定する。命題 1 より直ちに $\mathcal{X} = \mathrm{add}(F'Y), \mathcal{Y} = \mathrm{add}(FX)$ が従う。こうして T が誘導する捻れ理論に制限されたアウスランダー多元環 $\Gamma_X, \Gamma_Y, \Gamma_{F'Y}, \Gamma_{FX}$ が得られ、これらは大域次元 2 以下の多元環となる。さらに T が誘導する捻れ理論に制限されたアウスランダー多元環として

$$\Gamma_{X \oplus Y} := \mathrm{End}_A(X \oplus Y), \quad \Gamma_{F'Y \oplus FX} := \mathrm{End}_A(F'Y \oplus FX)$$

を考える。次の命題も本質的には $\mathcal{T}, \mathcal{F}$ および $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ に相対的な概分裂短完全列が存在することから導かれる。

命題 2. $\Gamma_{X \oplus Y}$ と $\Gamma_{F'Y \oplus FX}$ の大域次元は 3 以下。

さて $\Gamma_{X \oplus Y}$、$\Gamma_{F'Y \oplus FX}$ に対する多元環同型およびその部分多元環

$$\Gamma_{X \oplus Y} \cong \begin{pmatrix} \Gamma_X & \mathrm{Hom}_A(Y, X) \\ 0 & \Gamma_Y \end{pmatrix} \supset \begin{pmatrix} \Gamma_X & \mathrm{Ihom}_A(Y, X) \\ 0 & \Gamma_Y \end{pmatrix}$$

ただし、$\mathrm{Ihom}_A(Y, X) = \{f \in \mathrm{Hom}_A(Y, X) \mid f$ は移入加群を経由する $\}$

[*4] 参考文献 [4] 参照。

$$\Gamma_{F'Y\oplus FX} \cong \begin{pmatrix} \Gamma_{F'Y} & \mathrm{Hom}_B(FX,F'Y) \\ 0 & \Gamma_{FX} \end{pmatrix} \supset \begin{pmatrix} \Gamma_{F'Y} & \mathrm{Phom}_B(FX,F'Y) \\ 0 & \Gamma_{FX} \end{pmatrix}$$

ただし、$\mathrm{Phom}_B(FX,F'Y) = \{g \in \mathrm{Hom}_B(FX,F'Y) \mid g$ は射影加群を経由する $\}$

に注目する。命題 1 より $\Gamma_{F'Y\oplus FX}$ に対して、

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{F'Y} & \mathrm{Hom}_B(FX,F'Y) \\ 0 & \Gamma_{FX} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \Gamma_X & \mathrm{Ext}^1_A(X,Y) \\ 0 & \Gamma_Y \end{pmatrix} \cong \mathrm{End}_{\mathcal{D}(\text{mod-}A)}(X, Y[1])$$

であり、三角行列環の導来圏同値の結果[*5]より

$$\mathrm{End}_{\mathcal{D}(\text{mod-}A)}(X, Y[1]) \underset{\text{導来圏同値}}{\sim} \begin{pmatrix} \Gamma_X & \mathrm{Ihom}_A(Y,X) \\ 0 & \Gamma_Y \end{pmatrix}$$

を示すことができる。同様の議論を $\Gamma_{X\oplus Y}$ においても行い、次の定理を得る。

定理 3. 次が成り立つ。

(1) $\Gamma_{F'Y\oplus FX}$ と $\begin{pmatrix} \Gamma_X & \mathrm{Ihom}_A(Y,X) \\ 0 & \Gamma_Y \end{pmatrix}$ は互いに導来圏同値である。

(2) $\Gamma_{X\oplus Y}$ と $\begin{pmatrix} \Gamma_{F'Y} & \mathrm{Phom}_B(FX,F'Y) \\ 0 & \Gamma_{FX} \end{pmatrix}$ は互いに導来圏同値である。

ここで記号

$\overline{\mathrm{Hom}}_A(Y,X) := \mathrm{Hom}_A(Y,X)/\mathrm{Ihom}_A(Y,X)$、

$\underline{\mathrm{Hom}}_B(FX,F'Y) := \mathrm{Hom}_B(FX,F'Y)/\mathrm{Phom}_B(FX,F'Y)$

を導入すると、定理 3 より $\overline{\mathrm{Hom}}_A(Y,X) = 0$ または $\underline{\mathrm{Hom}}_B(FX,F'Y) = 0$ ならば、$\Gamma_{X\oplus Y}$ と $\Gamma_{F'Y\oplus FX}$ は互いに導来圏同値となることがわかる。この条件 $\overline{\mathrm{Hom}}_A(Y,X) = 0$ と $\underline{\mathrm{Hom}}_B(FX,F'Y) = 0$ が同値な条件であることを示す。そのため、

---

*5 R, S を環、M を S-R-両側加群とする。このとき右 R-加群として M の射影次元 $d < \infty$ であって、$i \neq d$ で $\mathrm{Ext}^i_R(M,R) = 0$ ならば、三角行列環

$$\begin{pmatrix} S & M \\ 0 & R \end{pmatrix} と \begin{pmatrix} R & \mathrm{Ext}^d_R(M,R) \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

は互いに導来圏同値である（参考文献 [1] 参照）。

$$U := \mathrm{Ext}^1_A(X \oplus Y, Y) \oplus \mathrm{Hom}_A(X \oplus Y, X) \in \mathrm{mod}\text{-}\Gamma_{X\oplus Y}、$$

$$V := \mathrm{Ext}^1_B(F'Y, F'Y \oplus FX) \oplus \mathrm{Hom}_B(FX, F'Y \oplus FX) \in \mathrm{mod}\text{-}\Gamma^{\mathrm{op}}_{F'Y\oplus FX}$$

とおき、これらの性質を調べる。

補題 4. 次が成り立つ。

(1) 多元環同型 $\mathrm{End}_{\Gamma_{X\oplus Y}}(U) \cong \Gamma_{F'Y\oplus FX}$ が成り立つ。

(2) $\overline{\mathrm{Hom}}_A(Y, X) = 0$ であることと $U \in \mathrm{mod}\text{-}\Gamma_{X\oplus Y}$ が射影次元 2 の傾け加群であることは同値である。

(3) $\overline{\mathrm{Hom}}_A(Y, X) = 0$ ならば、左 $\Gamma_{F'Y\oplus FX}$-加群として $U \cong V$ である。

他方、傾け加群 $T \in \mathrm{mod}\text{-}A$ は左 B-加群としても傾け加群であり、$\mathrm{mod}\text{-}B^{\mathrm{op}}$ の捻れ理論 $(\mathrm{add}(DFX), \mathrm{add}(DF'Y))$ を誘導する。ここで $D(-)$ はマトリス双対である。V は左 $\Gamma_{F'Y\oplus FX}$-加群として

$$V \cong \mathrm{Ext}^1_{B^{\mathrm{op}}}(DFX \oplus DF'Y, DF'Y) \oplus \mathrm{Hom}_{B^{\mathrm{op}}}(DFX \oplus DF'Y, DFX)$$

となるから、補題 4 と同様にして次が得られる。

補題 5. 次が成り立つ。

(1) 多元環同型 $\mathrm{End}_{\Gamma^{\mathrm{op}}_{F'Y\oplus FX}}(V) \cong \Gamma^{\mathrm{op}}_{X\oplus Y}$ が成り立つ。

(2) $\underline{\mathrm{Hom}}_B(FX, F'Y) = 0$ であることと $V \in \mathrm{mod}\text{-}\Gamma^{\mathrm{op}}_{F'Y\oplus FX}$ が射影次元 2 の傾け加群であることは同値である。

(3) $\underline{\mathrm{Hom}}_B(FX, F'Y) = 0$ ならば、右 $\Gamma_{X\oplus Y}$-加群として $V \cong U$ である。

こうして次が得られる。

定理 6. $\overline{\mathrm{Hom}}_A(Y, X) = 0$ と $\underline{\mathrm{Hom}}_B(FX, F'Y) = 0$ は同値である。このとき $\Gamma_{X\oplus Y}$ と $\Gamma_{F'Y\oplus FX}$ は互いに導来圏同値となる。

以上、傾け加群が誘導する捻れ理論に制限したアウスランダー多元環に関して、現時点で判明しているホモロジー代数的性質の概説を与えた。充満部分圏に制限したアウスランダー多元環は、$M \in \mathrm{mod}\text{-}$ に対して充満部分圏 $\mathrm{add}(M)$ の圏論的性質と多元環 $\mathrm{End}_A(M)$ のホモロジー代数的性質の対応を見ていると捉えることもできる。A が有限表現型ならば構成も容易である。様々な良い多元環が現れると期待されるので、色々試してみるとおもしろいと思う。

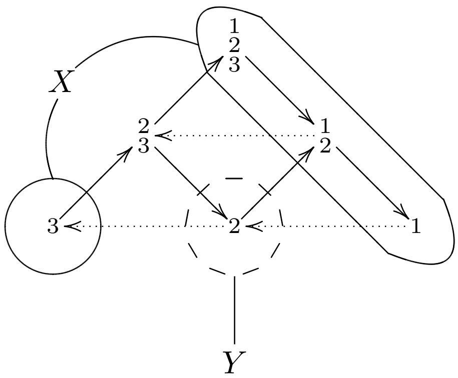
最後に、ブレンナー・バトラーの定理から展開される道多元環の計算手法の中に定理 6 を位置付けよう。多元環 A をクゥイバー

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

が定める道多元環とし、加群圏 mod-A をアウスランダー・ライテンクゥイバーによって

$$\begin{tikzcd}
 & & \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \\
 & \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & \\
3 \arrow[ur] & & 2 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & 1 \arrow[ll, dotted]
\end{tikzcd}$$

と表しておく。傾け加群 $T = 3 \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix} \oplus 1$ が誘導する捻れ理論に対して X, Y を取ると、アウスランダー・ライテンクゥイバー上には



と現れるから、$\Gamma_{X \oplus Y}$ はクゥイバー

$$\begin{tikzcd}
 & & & \bullet \arrow[dd, dash, dotted, bend left] \\
\bullet \arrow[r] \arrow[rr, dash, dotted, bend left] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[ur] & \\
 & & & \bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

（点線は零リレーション）

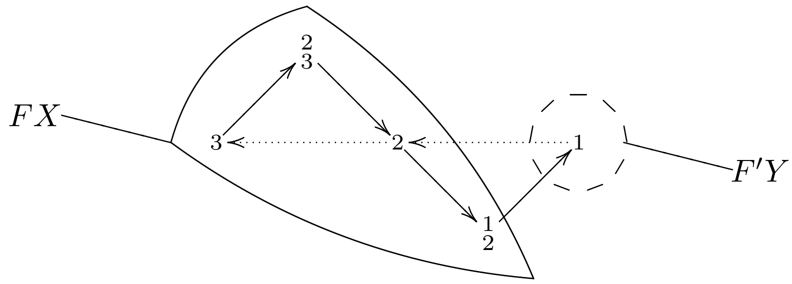
が定める道多元環となり、$\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ が移入加群であることより $\overline{\mathrm{Hom}}_A(Y, X) = 0$ も同時にわかる。他方 $B = \mathrm{End}_A(T)$ はクゥイバー

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[rr, dash, dotted, bend right] & 2 \arrow[r] & 3
\end{tikzcd}$$

（点線は零リレーション）

が定める道多元環であり、ブレンナー・バトラーの定理より $FX, F'Y$ は加群圏 mod-B

のアウスランダー・ライテンクウィバー上に



と現れる。よって $\Gamma_{F'Y\oplus FX}$ はクウィバー

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \qquad \text{（点線は零リレーション）}$$

が定める道多元環となる。以上の事柄に定理 6 を適用すれば、$\Gamma_{X\oplus Y}$ と $\Gamma_{F'Y\oplus FX}$ は互いに導来圏同値であることが得られる。このように定理 6 はブレンナー・バトラーの定理をより豊かな内容にするのである。

参考文献

[1] H. Abe and M. Hoshino, *Derived equivalences for triangular matrix rings*, Algebras and Representation theory **13** (2010), 61–67.

[2] H. Abe and M. Hoshino, Derived equivalences associated with torsion theories, in preparation.

[3] M. Auslander, I. Reiten and S. O. Smalø, *Representation theory of artin algebras*, Cambridge studies in advanced mathematics., 36, Cambridge University Press, 1995.

[4] S. Brenner and M. C. R. Butler, Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors, in: *Representation theory II*, 103–169, Lecture Notes in Math. **832**, Springer, 1980.

[5] M. Hoshino, On splitting torsion theories induced by tilting modules, Comm. Algebra **11** (1983), no. 4, 427–439.

Institute of Mathematics
University of Tsukuba
Ibaraki 305-8571 JAPAN
e-mail address : abeh@math.tsukuba.ac.jp