退化形式のジーゲル・ヴェイユ公式

大阪市立大学大学院理学研究科　山名俊介

1　ジーゲル公式

まず, ジーゲルの古典的結果の紹介から始める. T_m は m 次半整数対称行列の集合, T_m^+ は m 次正定値符合半整数対称行列の集合を表すことにする. 行列 A, X に対して, 積が定義できるとき, $A[X] = {}^tXAX$ とおく. 二つの行列 S_1, $S_2 \in T_m^+$ は, ある $\gamma \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$ が存在して, $S_2 = S_1[\gamma]$ となるとき, 同じ類に属すると言い, 任意の素数 p に対してある $\gamma_p \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}_p)$ が存在して, $S_2 = S_1[\gamma_p]$ となるとき, 同じ種に属すると言う. 種は有限個の類からなることが知られている.

素数 p と $S \in T_m^+$, $T \in T_n$ に対して,

$$A_{p^\nu}(S,T) = \#\{\xi \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z}) \mid S[\xi] \equiv T \pmod{p^\nu T_n}\},$$
$$\alpha_p(S,T) = 2^{-\delta_{mn}} \lim_{\nu\to\infty} p^{-\nu n(m-(n+1)/2)} A_{p^\nu}(S,T)$$

とおく. ここで, δ_{mn} はクロネッカーのデルタである. 第二式の右辺の値は, ν が十分大きいとき ν に依存しないので, 極限値は存在する. さらに $\alpha_\infty(S,T)$ を

$$\alpha_\infty(S,T) = \frac{2^{-\delta_{mn}} \pi^{mn/2} (\det S)^{-n/2} (\det T)^{(m-n-1)/2}}{(2\sqrt{\pi})^{n(n-1)/2} \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{m-j}{2}\right)}$$

と定義する. 一方, $A(S,T)$ は次式で定義する:

$$A(S,T) = \#\{\xi \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{Z}) \mid S[\xi] = T\}.$$

$A(S,T)$ は類不変量であるが, 種不変量ではない.

次が二次形式論で重要なジーゲル公式である.

定理 1.1 (ジーゲル [23]). *$m \geq n$, $S \in T_m^+$, $T \in T_n^+$ とする. S の定める種に属する類の完全代表系を $S_1, \ldots, S_h$ とするとき, 以下の等式が成り立つ:*

$$\prod_{v\leq\infty} \alpha_v(S,T) = \varkappa \sum_{j=1}^{h} E(S_j)^{-1} A(S_j,T) \Big/ \sum_{j=1}^{h} E(S_j)^{-1}.$$

左辺の無限積は (条件収束のときもあるが) 収束する. ここで,

$$E(S_j) = \#\{U \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}) \mid S_j[U] = S_j\},$$
$$\varkappa = \begin{cases} 2 & m = n > 1 \text{ または } m = n+1. \\ 1 & m = n = 1 \text{ または } m > n+1. \end{cases}$$

次数 n の実シンプレクティック群を

$$Sp_n(\mathbb{R}) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \,\middle|\, g \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} {}^t g = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

とする. $Sp_n(\mathbb{R})$ は上半空間 $\mathfrak{H}_n = \{Z = {}^tZ \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \Im Z > 0\}$ に

$$\begin{array}{ccc} Sp_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{H}_n & \to & \mathfrak{H}_n \\ (g, Z) & \mapsto & Z = (aZ+b)(cZ+d)^{-1} \end{array}$$

のように作用する. ここで, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と置いた. ジーゲルモジュラー群を $Sp_n(\mathbb{Z}) = Sp_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Z})$ と定義し,

$$\Gamma_{n,\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp_n(\mathbb{Z}) \,\middle|\, c = 0 \right\}$$

とおく. $n+1$ より大きい偶数 k に対して, アイゼンシュタイン級数を

$$E_k^n(Z) = \sum_{\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_{n,\infty} \backslash Sp_n(\mathbb{Z})} \det(cZ+d)^{-k} \qquad (Z \in \mathfrak{H}_n)$$

と定義する. E_k^n は絶対収束し, 重さ k のジーゲル保型形式を与える.

簡単のために $S \in T_m^+$ かつ $\det(2S) = 1$ であると仮定する. このとき, m は 8 の倍数である. テータ級数を次式で定義する:

$$\theta_S^n(Z) = \sum_{\xi \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{Z})} e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(S[\xi]Z)} \qquad (Z \in \mathfrak{H}_n).$$

$\theta_S^n(Z)$ も絶対収束し, 重さ $m/2$ のジーゲル保型形式を与える. 定義より

$$\theta_S^n(Z) = \sum_{T \in T_n} A(S,T) e^{2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(S[\xi]Z)}$$

である. 一方 $T \in T_n^+$ に対して, $E_k^n(Z)$ のフーリエ係数は $\prod_{v \le \infty} \alpha_v(S,T)$ である. 従って, ジーゲル・ヴェイユ公式の最も簡単な場合が定理 1.1 から証明できる.

定理 1.2 (ジーゲル [23]). $\det(2S) = 1$, $m > 2n+2$ とする. S の定める種に属する類の完全代表系を $S_1, \ldots, S_h$ とするとき, 等式

$$E_{m/2}^n(Z) = \sum_{j=1}^h E(S_j)^{-1} \theta_{S_j}^n(Z) \Bigg/ \sum_{j=1}^h E(S_j)^{-1}$$

が成立する.

Proof. 定理 1.1 より, 左辺と右辺の差は重さ $m/2$ の退化形式になるが, $m/2 > n+1$ より, この退化形式は 0 でなければならない. □

2　ヴェイユによるジーゲル・ヴェイユ公式

定理 1.2 のようなアイゼンシュタイン級数とテータ関数の平均の間の等式はずっと一般的に成立する．例えば，ジーゲル [24] は不定符合二次形式について類似の等式を研究した．以下ではしかし，ジーゲル・ヴェイユ公式のヴェイユによるアデール群を使った定式化を紹介する．

F を代数体とし，そのアデール環を $\mathbb{A}$ と書く．$D(F)$ は F 自身か F 上の四元数体を表すとする．ここで，D を F 上の代数多様体とみなしている．すなわち，F 代数 A に対して $D(A) = D(F) \otimes_F A$ と書く．$x \mapsto x^\iota$ は $D(F) = F$ のときは恒等写像，そうでないときは主対合であるとし，D 上の行列 y に対して，$x^* = {}^t y^\iota$ とおく．D 上の行列環 $\mathrm{M}_n(D)$ の被約トレースを τ，被約ノルムを ν とおく．

$\epsilon \in \{\pm 1\}$ を固定し，左 D ベクトル空間 $U = D^{2n}$ 上の ϵ-歪エルミート形式を

$$\langle x, y \rangle = x \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} y^* \qquad\qquad (x,\ y \in U)$$

により定義する．$V = D^m$ を右 D ベクトル空間とし，F 上の線形写像 $(\ ,\ ) : V \times V \to D$ を ϵ-エルミート形式とする．すなわち，

$$(x, y)^\iota = \epsilon (y, x), \qquad (xa, yb) = a^\iota (x, y) b \qquad (a,\ b \in D;\ x,\ y \in V).$$

さらに，$(U, \langle\ ,\ \rangle)$ と $(V, (\ ,\ ))$ のユニタリ群を

$$\begin{aligned} G &= \{ g \in \mathrm{GL}_{2n}(D) \mid \langle xg, yg \rangle = \langle x, y \rangle \quad (x,\ y \in U) \}, \\ H &= \{ h \in \mathrm{GL}_m(D) \mid (hx, hy) = (x, y) \quad (x,\ y \in V) \} \end{aligned}$$

と定義する．G の放物型部分群 $P = MN$ を次式で定義する:

$$\begin{aligned} M &= \left\{ m(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & {}^t(a^{-1})^* \end{pmatrix} \ \middle|\ a \in \mathrm{GL}_n(D) \right\}, \\ N &= \left\{ n(b) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & b \\ 0 & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} \ \middle|\ b \in \S^n_\epsilon \right\}. \end{aligned}$$

ここで，

$$S^n_\epsilon = \{ b \in \mathrm{M}_n(D) \mid b = \epsilon b^* \}$$

とおいた．$D(F)$ の極大整環 $\mathcal{O}$ を一つ固定する．$D = F$ ならば，$\mathcal{O}$ は当然 F の整数環である．F の各素点 v に対して，K_v を $G(F_v)$ の標準的極大コンパクト部分群とする．例えば，v が有限素点のとき，$\mathcal{O}$ の $D(F_v)$ での閉包を $\mathcal{O}_v$ として，

$$K_v = G(F_v) \cap \mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_v)$$

である．$K = \prod_v K_v$ とおく．

$\mathbb{A}^\times$ のイデールノルムを $|\cdot|$ と書く．以下では，

$$\begin{aligned} &\varrho = n + \epsilon, && s_0 = (m - n - \epsilon)/2, && \delta = 2 && (D(F) = F) \\ &\varrho = n - \tfrac{\epsilon}{2}, && s_0 = m - n + \tfrac{\epsilon}{2}, && \delta = 1 && (D(F) \neq F) \end{aligned}$$

とおく．ヘッケ指標 $\chi : \mathbb{A}^\times/F^\times \to \mathbb{T}$ と複素数 s に対して, 誘導表現 $I(s,\chi) = \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\chi|\nu(\cdot)|^s)$ は, 次式を満たす $G(\mathbb{A})$ の K-有限な滑らか函数の空間上の $G(\mathbb{A})$ の右移動作用である: $a \in \mathrm{GL}_n(D(\mathbb{A}))$ と $b \in S_\epsilon^n(\mathbb{A})$ に対して

$$f^{(s)}(m(a)n(b)g) = |\nu(a)|^{s+\varrho/\delta}\chi(\nu(a))f^{(s)}(g).$$

K-有限な函数 $f^{(s)} : G(\mathbb{A}) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は s に関して正則かつ s を固定したとき $f^{(s)} \in I(s,\chi)$ であるとき, $I(s,\chi)$ の正則切断と呼ばれる．$I(s,\chi)$ の正則切断 $f^{(s)}$ に対して, アイゼンシュタイン級数

$$E\big(g; f^{(s)}\big) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} f^{(s)}(\gamma g)$$

は $\Re s > \varrho$ のとき絶対収束し, $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式を与える．

$V(F)$ の $D(F)$ 上の基底 $x_1, \ldots, x_m$ を取り, 行列 $((x_i, x_j))$ の被約ノルムの $F^\times/F^{\times 2}$ への像を $\det V$ で表す．$(\ ,\ )_{F_v}$ を F_v のヒルベルト記号とし, 二次指標 $\chi_V : \mathbb{A}^\times/F^\times \to \{\pm 1\}$ を $\epsilon\delta \in \{-1, 2\}$ のとき $\chi_V = 1$, $\epsilon\delta \in \{1, -2\}$ のときは

$$\chi_V(x) = \prod_v (x_v, (-1)^{m/\delta}\det V)_{F_v}, \qquad x = (x_v) \in \mathbb{A}^\times$$

により定義する．

ヴェイユの結果を述べるために, ヴェイユ表現を導入する．詳しい話は [25] を参照してください．$\ll\ ,\ \gg = \frac{1}{2}\tau((\ ,\ ) \otimes \langle\ ,\ \rangle^\iota)$ は $\mathbb{W} = V \otimes_D U$ 上の交代形式を定め, G と H は $(\mathbb{W}, \ll\ ,\ \gg)$ のシンプレクティック群 $Sp(\mathbb{W})$ の双対簡約対をなす．$Sp(\mathbb{W})$ のアデールの二重被覆を $Mp(\mathbb{W})$ と書き, $\mathbb{A}/F$ の自明でない指標 ψ を固定すれば, $Mp(\mathbb{W})$ のヴェイユ表現 $\omega = \omega_\psi$ が定義され, シュヴァルツ空間 $\mathcal{S}(V^n(\mathbb{A}))$ に実現される．簡単のため, $D(F) = F$ かつ $\epsilon = 1$ のとき, m は偶数であると仮定する．このとき, 分裂 $G(\mathbb{A}) \times H(\mathbb{A}) \to Mp(\mathbb{W})$ が存在し, ヴェイユ表現の制限は $G(\mathbb{A}) \times H(\mathbb{A})$ の表現を定める．特に, $P(\mathbb{A})$ と $H(\mathbb{A})$ の作用は以下の通り:

$$\begin{aligned}
&\omega(h)\Phi(x) = \Phi(h^{-1}x) && h \in H(\mathbb{A}),\\
&\omega(m(a))\Phi(x) = \chi_V(\nu(a))|\nu(a)|_{\mathbb{A}}^{m/\delta}\Phi(xa) && a \in \mathrm{GL}_n(D(\mathbb{A})),\\
&\omega(n(b))\Phi(x) = \psi(\tau(bQ(x)))\Phi(x) && b \in S_\epsilon^n(\mathbb{A}).
\end{aligned}$$

ここで, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V^n(\mathbb{A})$ に対して, $Q(x) = \frac{1}{2}(x_i, x_j) \in S_\epsilon^n(\mathbb{A})$ と書いた．

$g \in G(\mathbb{A})$ を岩澤分解

$$g = pk, \qquad p = m(a)n(b) \in P(\mathbb{A}), \qquad k \in K$$

して, $|a(g)| = |\nu(a)|$ とおく．$S(V^n(\mathbb{A}))$ を無限素点 v で K_v と $H(F_v)$ の適当な極大コンパクト部分群に関する多項式 Fock 空間に対応する $\mathcal{S}(V^n(\mathbb{A}))$ の部分空間とする．(分かりにくければ, 全ての無限素点 v に対して K_v-有限な函数のなす $\mathcal{S}(V^n(\mathbb{A}))$ の部分空間を代わりに考えても良い)．$\Phi \in S(V^n(\mathbb{A}))$ に対して,

$$f_\Phi^{(s)}(g) = |a(g)|^{s-s_0}\omega(g)\Phi(0)$$

は $I(s, \chi_V)$ の正則切断を定める.

$\Phi \in \mathcal{S}(V^n(\mathbb{A}))$ に対して, テータ函数を

$$\Theta(g, h; \Phi) = \sum_{x \in V^n(F)} \omega(g)\Phi(h^{-1}x)$$

と定義する. $\Theta(g, h; \Phi)$ は $G(F)$ と $H(F)$ に関して左不変であり, $G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \times H(F)\backslash H(\mathbb{A})$ 上の緩増加函数を定める. dh を $H(\mathbb{A})$ のハル測度とする. 双曲型二元二次形式付き空間を $\mathcal{H}$ で表す. V が $\mathcal{H}$ と同型でないときには, $H(F)\backslash H(\mathbb{A})$ の体積が 1 となるように dh を正規化する. テータ函数の積分

$$I(g; \Phi) = \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \Theta(g, h; \Phi) dh$$

は以下の条件が満たされるとき, 絶対収束することが知られている [26, 命題 8]:

- V が非等方的, または
- $m - r > \varrho$.

ただし, r は V の Witt 指数である.

定理 2.1 (ヴェイユ [26])**.** *$m > 2\varrho$ のとき, 任意の $\Phi \in S(V^n(\mathbb{A}))$ に対して, 等式*

$$E\big(g; f_\Phi^{(s_0)}\big) = I(g; \Phi)$$

が成り立つ.

注意 2.2. (1) $m > 2\varrho$, すなわち $s_0 > \varrho$ はアイゼンシュタイン級数が絶対収束するための必要十分条件である. このときは, 上の等式は任意の $\Phi \in \mathcal{S}(V^n(\mathbb{A}))$ に対しても成り立つ.

(2) $F = D(F) = \mathbb{Q}$, $\epsilon = 1$, $(x, y) = {}^t x S y$ のとき, 定理 2.1 で $\Phi = \otimes_v \Phi_v \in S(V^n(\mathbb{A}))$ を次のように取れば, 定理 1.2 が得られる:

$$\Phi_v = \begin{cases} e^{-\pi \operatorname{tr}(S[x])} & \text{if } v = \infty. \\ \mathbb{Z}_p^m \text{の定義関数} & \text{if } v = p. \end{cases}$$

(3) ヴェイユの定式化は第二種の対合を持つ単純多元環の場合 (例えば, V が F の二次拡大上のエルミート空間の場合など) も含んでいるが, 簡単のためにこれらは省いた.

(4) 一方, W. T. Gan [1, 2, 3] は類似の等式をある種の例外型簡約対に対して証明している.

3 ジーゲル・ヴェイユ公式の拡張

筆者の主定理を述べる前に, クドラとラリスの結果を紹介する. しばらく, $D(F) = F$, $\epsilon = 1$, m は偶数とする.

テータ積分が絶対収束する場合

$m > 2\varrho = 2n+2$ はのテータ積分の絶対収束条件より強いため, ジーゲル・ヴェイユ公式の左辺が絶対収束しなくても右辺が絶対収束することがある. 一方, ラングランズの理論より, $I(s,\chi)$ の正則切断 $f^{(s)}$ に対して, アイゼンシュタイン級数

$$E\big(g; f^{(s)}\big) = \sum_{\gamma \in P(F)\backslash G(F)} f^{(s)}(\gamma g)$$

は全平面に有理型解析接続され, 函数等式

$$E\big(g; f^{(s)}\big) = E\big(g; M(s) f^{(s)}\big)$$

を満たす. ここで, 絡作用素 $M(s) : I(s,\chi) \to I(-s,\chi^{-1})$ は, $\Re s > \varrho$ では積分

$$M(s) f^{(s)}(g) = \int_{S^n_\epsilon(\mathbb{A})} f^{(s)}\Big(\begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix} n(b) g\Big) db$$

により, 一般には解析接続により定義される. 最初にこの場合に, クドラとラリスはジーゲル・ヴェイユ公式を拡張した.

定理 3.1 (クドラ–ラリス [11, 12]). $\Phi \in S(V^n(\mathbb{A}))$ とし, 前節のテータ積分の収束条件が成り立つと仮定する. このとき, $E\big(g; f^{(s)}_\Phi\big)$ は $s = s_0$ で正則であり, 等式

$$E\big(g; f^{(s)}_\Phi\big)|_{s=s_0} = \varkappa I(g;\Phi)$$

が成り立つ. ここで,

$$\varkappa = \begin{cases} 2 & m \le n+1. \\ 1 & m > n+1. \end{cases}$$

注意 3.2. (1) 定理 3.1 は, V が非等方的であるとき [11] により, $m - r > n+1$ のとき [12] により証明されている.

(2) すなわち, 定理 1.2 は $m \le 2n+2$ でも左辺を解析接続により定義すれば成り立つ. ついでに比例因子 $\varkappa$ は定理 1.1 でも観察できる.

(3) 類似の結果が, D が四元数体の場合には筆者 [29] に, ユニタリ群の場合には市野氏 [6] と筆者 [28] にある.

Regularization

定理 3.1 は一見すると満足すべき結果に見える. ところが, クドラとラリスが [15] で導入した regularization 用いれば, $m \le \varrho$ のときには V が非等方的でなくてもテータ積分を定義することができる. つまり, 「ヴェイユの収束条件の一番目の条件は本質的ではない」と言える.

regularization を説明するために, $m \le \varrho$ かつ V が等方的であると仮定する. 函数 $\Phi \in S(V^n(\mathbb{A}))$ を固定し, F の良い有限素点 v を選べば, $H(F_v)$ のヘッケ作用素 α で 0 でない固有値 c_α を持ち, $\Theta(g,h;\omega(\alpha)\Phi)$ が $H(F)\backslash H(\mathbb{A})$ 上の急減少函

数になるものがある (詳しくは [4] などを参照). α の条件より, regularized テータ積分を絶対収束積分

$$c_\alpha^{-1}\int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})}\Theta(g,h;\omega(\alpha)\Phi)dh$$

により定義できる. この定義は一見 ad hoc に見えるけれども, テータ積分の収束域からの唯一の $H(\mathbb{A})$-不変な拡張を実現している. すなわち, 上の積分は v や α の取り方によらず, テータ積分 $I(g;\Phi)$ が絶対収束する Φ に対してはそれと一致する. 以下では regularized テータ積分も $I(g;\Phi)$ と書く.

アイゼンシュタイン級数は $\Re s=0$ で一般的に正則であり, V が等方的なときには regularization を用いれば, 以下の等式が証明される.

定理 3.3 (クドラ [10])**.** $m=n+1$ かつ V は分裂二元二次形式付き空間 $\mathcal{H}$ と同型ではないと仮定する. このとき, 任意の $\Phi\in S(V^n(\mathbb{A}))$ に対して, 等式

$$E\big(g;f_\Phi^{(s)}\big)|_{s=0}=2I(g;\Phi)$$

が成り立つ.

注意 3.4. クドラは regularization 作用素として, ヘッケ作用素ではなく, 微分作用素を用いているため, F を総実体にしている. 定理 3.7 に関しても同様である.

Regularized ジーゲル・ヴェイユ公式

以下では $m\le n$ とする. F の有限アデール環を $\mathbb{A}_\mathrm{f}$, F の無限素点の集合を S_∞ と書く. $v\in S_\infty$ に対して, $G(F_v)$ のリー環の複素化を $\mathfrak{g}_v$ と書き,

$$\mathfrak{g}=\prod_{v\in S_\infty}\mathfrak{g}_v,\qquad\qquad K_\infty=\prod_{v\in S_\infty}K_v$$

とおく. $U=V\oplus\mathcal{H}^{n+1-m}$ とおき, 以下の $(\mathfrak{g},K_\infty)\times G(\mathbb{A}_\mathrm{f})$-加群を導入する:

$$\Pi(V)=\{f_\Phi^{(s_0)}\mid\Phi\in S(V^n(\mathbb{A}))\},$$
$$\Pi(U)=\{f_\Psi^{(-s_0)}\mid\Psi\in S(U^n(\mathbb{A}))\}.$$

注意 3.5. V と U がこのような関係にあるとき, V は U の補空間と呼ばれる. $-s_0=\frac{1}{2}(\dim U-n-1)$ より $\Pi(U)\subset I(-s_0,\chi_V)$ である.

v が有限素点のとき F_v の剰余体の位数を q_v とすれば, F の局所ゼータ因子は

$$\zeta_v(s)=\begin{cases}\pi^{-s/2}\mathit{\Gamma}(s/2) & v\text{ が実素点のとき}\\ 2(2\pi)^{-s}\mathit{\Gamma}(s) & v\text{ が複素素点のとき}\\ (1-q_v^{-s})^{-1} & v\text{ が有限素点のとき}\end{cases}$$

である．局所エル因子 $L_v(s,\chi_V)$ を [27] のように定義し，$a(s)$ と $b(s)$ を

$$a_v(s) = L_v\left(s-\frac{n-1}{2},\chi_V\right)\prod_{j=1}^{[n/2]}\zeta_v(2s-n+2j),$$
$$b_v(s) = L_v\left(s+\frac{n+1}{2},\chi_V\right)\prod_{j=1}^{[n/2]}\zeta_v(2s+n+1-2j)$$

のオイラー積で与える．絡作用素 $M(s)$ の正規化を $M^\circ(s)=\frac{b(s)}{a(s)}M(s)$ とする．

命題 3.6. $\Pi(U)$ には唯一の $(\mathfrak{g},K_\infty)\times G(\mathbb{A}_\mathrm{f})$-既約商表現が存在し，それは $\Pi(V)$ に同型である．$M^\circ(s)$ は $s=-s_0$ で正則であり，$M^\circ(-s_0)$ の $\Pi(U)$ への制限は商写像 $\Pi(U)\to\Pi(V)$ を実現する．

Proof. 特異表現に関する J. S. Li の一般的結果 [18] より，$\Pi(V)$ は既約ユニタリ表現である．$\Pi(U)$ の各素点での成分の既約商表現はハウ予想より唯一であり，それら既約商が $\Pi(V)$ の成分に同型であることは [13, 14, 16, 17] から確かめられる．[19, 20, 7] より $a(s)^{-1}M(s)$ が s の整函数であることが知られている．さらに $b(s)$ は右半平面 $\{s\in\mathbb{C}\mid \Re s>0\}$ で極も零も持たないので，第二の主張が従う．最後の主張は有限素点では [14] により，無限素点では直接確かめられる． □

定理 3.7 (クドラ–ラリス [15])**.** *0 でない定数 c_0 が存在して以下が成り立つ: $I(s,\chi_V)$ の正則切断 $f^{(s)}$ が $f^{(-s_0)}\in\Pi(U)$ であるとき，$\Phi\in S(V^n(\mathbb{A}))$ を*

$$M^\circ(-s_0)f^{(-s_0)}=f_\Phi^{(s_0)}$$

を満たす任意の函数とすれば，

$$\mathrm{Res}_{s=-s_0}E\big(g;f^{(s)}\big)=c_0I(g;\Phi).$$

注意 3.8. 池田氏 [8] 及び市野氏 [4] による定理 3.7 の別証明と精密化，ユニタリ群や直交群の場合の類似の結果 [5, 9] も知られている．

4　主定理

定理 4.1 (Y. [28])**.** *$D(F)=F$, $\epsilon=1$, $m\le n$ と仮定する．任意の $\Phi\in S(V^n(\mathbb{A}))$ に対し，以下が成り立つ:*

(1) V が $\mathcal{H}$ と同型ではないとき，$E\big(g;f_\Phi^{(s)}\big)$ は $s=s_0$ で正則であり，

$$E\big(g;f_\Phi^{(s)}\big)|_{s=s_0}=2I(g;\Phi).$$

(2) $V=\mathcal{H}$ のとき，

$$E\big(g;f_\Phi^{(s)}\big)|_{s=s_0}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial s}E\big(g;f_\Phi^{(s)}\big)\Big|_{s=s_0}=2I(g;\Phi).$$

注意 4.2. V が等方的ならば, 当然右辺は regularization により定義される.

さて, $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の二次指標 χ を固定する. 各素点 v に対して, 二次形式付きの m 次元ベクトル空間 $\mathcal{V}_v$ で以下を満たすものが与えられているとする. 素点 v に対して, $F_v^\times$ の指標 $\chi_{\mathcal{V}_v}$ を $\chi_{\mathcal{V}_v}(x) = (x, (-1)^{m/2} \det \mathcal{V}_v)_{F_v}$ で定める.

(i) 任意の v に対して, $\chi_v = \chi_{\mathcal{V}_v}$;

(ii) F 上の二次形式付きの m 次元ベクトル空間 U が存在して, ほとんど全ての素点 v に対して, $U(F_v)$ と $\mathcal{V}_v$ は同型.

(ii) は, ほとんど全ての素点で $\mathcal{V}_v$ が不分岐であると言い換えてもよい. (ii) より制限テンソル積 $\otimes_v' S(\mathcal{V}_v^n)$ を定義することができ, $\Phi \in \otimes_v' S(\mathcal{V}_v^n)$ に対して, 以前と同様にしてアイゼンシュタイン級数 $E\big(g; f_\Phi^{(s)}\big)$ も定義できる. $m \leq n+1$ のとき, もし $\mathcal{V}_v$ を局所化に持つ F 上の二次形式付き空間が存在しなければ, $E\big(g; f_\Phi^{(s)}\big)|_{s=s_0}$ は恒等的に零になることも示される. そこで次の問題を提出する.

問題 4.3. $m \leq n+1$ かつ $\mathcal{V}_v$ を局所化に持つ F 上の二次形式付き空間が存在しないとする. このとき $\Phi \in \otimes' S(\mathcal{V}_v^n)$ に対して, 導函数

$$\frac{\partial}{\partial s} E\big(g; f_\Phi^{(s)}\big)|_{s=s_0}$$

はどのような性質を持つか?

$m = n+1$ の場合には, この問題はクドラら ([12] など) が研究している.

シンプレクティック群の内部形式のジーゲル・ヴェイユ公式

筆者 [28] は定理 4.1 と類似の等式を m が奇数の場合やユニタリ群や直交群の場合にも証明したが, 定理 4.1 の内部形式版, すなわち G が四元数体上のエルミート形式のユニタリ群の場合の結果を紹介する. 四元数体上の歪エルミート形式に関してはハッセの原理が成り立たないので, この場合はなかなか面白いと思う.

命題 4.4 (cf. [21])**.** $D(F)$ を代数体 F 上の四元数体であるとし, $D(F_v)$ が斜体である F の素点 v の個数を s_D と書く. V を D 上の非退化歪エルミート形式付きの空間とする. このとき, 全ての素点 v で局所化が $V(F_v)$ と同型になる D 上の歪エルミート形式付き空間の同型類は正確に 2^{s_D-2} 個存在する.

$l = 2^{s_D-2}$ とおき, V と局所同型な歪エルミート形式付き空間の同型類の代表系 $V_1, \ldots, V_\ell$ を取る. $\Phi \in S(V^n(\mathbb{A}))$ に対して, V_j に関するテータ積分 $I_j(g;\Phi)$(の regularization) が同様に定義される. アイゼンシュタイン級数は局所的な情報だけから構成される一方, テータ関数は大域的な情報を含んでいることを注意しておく. このとき, 次の等式が成立する.

定理 4.5 (Y. [29])**.** D は四元数体, $\epsilon = -1$, $m \leq n$ と仮定する. 任意の $\Phi \in S(V^n(\mathbb{A}))$ に対し, $E\big(g; f_\Phi^{(s)}\big)$ は $s = s_0$ で正則であり,

$$E\big(g; f_\Phi^{(s)}\big)|_{s=s_0} = \ell^{-1} \sum_{j=1}^{\ell} I_j(g;\Phi).$$

5　定理 4.1 の証明

証明は三段階からなる．最初にアイゼンシュタイン級数の函数等式と右半平面 $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re s > 0\}$ での解析的挙動を組み合わせて, $E\bigl(g; f_\Phi^{(s)}\bigr)$ が $s = s_0$ で正則であることを証明する．次に regularized ジーゲル・ヴェイユ公式をアイゼンシュタイン級数の函数等式を用いて書き直せば, 定理 4.1 の等式が比例因子の差を除いて得られることを示す．最後に両辺の階数 $m-1$ のフーリエ係数を比較して比例定数を決定する．

$E\bigl(g; f_\Phi^{(s)}\bigr)$ の $s = s_0$ での正則性

F の素点 v を固定し, $V_v = V \otimes_F F_v$ とおく．誘導表現 $I(s, \chi_V)$ や絡作用素 $M(s)$ の局所的な対応物を $I_v(s, \chi_{V_v})$ や $M_v(s)$ と表す．局所ヴェイユ表現を ω_v と書き,

$$R(V_v) = \{f_{\Phi_v}^{(s_0)}(g) = \omega_v(g)\Phi_v(0) \mid \Phi_v \in S(V_v^n)\}$$

とおけば, $\Pi(V)$ は $R(V_v)$ の制限テンソル積である．$f_{\Phi_v}^{(s_0)}$ を以前と同様に拡張して, $I_v(s, \chi_{V_v})$ の正則切断 $f_{\Phi_v}^{(s)}$ を定める．命題 3.6 の証明や以下の議論では $I_v(s, \chi_{V_v})$ や $R(V_v)$ の加群構造に関する情報が重要であることを注意する．

v が有限素点であり, χ_{V_v} が不分岐のとき, K_v 上 1 であるような $I_v(s, \chi_{V_v})$ の切断を $f_{0,v}^{(s)}$ と書く．Gindikin-Karpelevich の方法により

$$\frac{b_v(s)}{a_v(s)} M_v(s) f_{0,v}^{(s)} = f_{0,v}^{(-s)}$$

が証明される．これが $M^\circ(s)$ の定義の意味であるが, 次の補題も成り立つ:

補題 5.1. F の任意の素点 v と任意の $\Phi_v \in S(V_v^n)$ に対して, $\frac{b_v(s)}{a_v(s)} M_v(s) f_{\Phi_v}^{(s)}$ は $s = s_0$ で正則である．

Proof. 初めに v が有限素点の場合を考える．このとき $a_v(s)$ は $s = s_0$ で正則かつ $a_v(s_0) \neq 0$ であり, $b_v(s)$ は $s = s_0$ で一位の極を持つ．一方 [14] より $R(V_v)$ は $M_v(s_0)$ の核に含まれるので, 求める結果が得られる．

v が複素素点の場合は [11, 命題 4.13] のように Gindikin-Karpelevich の方法を使って証明できるので, v が実素点の場合を考える．V_v の符号を (p, q) とし, 直交分解 $V_v = V_v^+ \oplus V_v^-$ を固定する．ここで, $\dim V_v^+ = p$, $\dim V_v^- = q$, $(\ ,\ )|_{V_v^+}$ は正値, $(\ ,\ )|_{V_v^-}$ は負値である．V_v 上の正値二次形式 $(\ ,\ )_+$ を

$$(\ ,\ )_+|_{V_v^+} = (\ ,\ )|_{V_v^+}, \qquad (\ ,\ )_+|_{V_v^-} = -(\ ,\ )|_{V_v^-}$$

により定義し, $\Phi^0 \in S(V_v^n)$ を

$$\Phi_v^0(x) = e^{-\pi \sum_{j=1}^n (x_j, x_j)_+}$$

と定義する．このとき $k = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) \in K_v$ に対して

$$f_{\Phi_v^0}^{(s)}(k) = \omega_v(k)\Phi_v^0(0) = \det(a + \sqrt{-1}b)^{(p-q)/2}$$

である. $R(V_v)$ は $(\mathfrak{g}_v, K_v)$-加群として $f^{(s_0)}_{\Phi^0_v}$ により生成されることが知られているから, $\frac{b_v(s)}{a_v(s)} M_v(s) f^{(s)}_{\Phi^0_v}$ が $s=s_0$ で正則であることを示せばよい.

$$\mathit{\Gamma}_n(s) = \pi^{n(n-1)/4} \prod_{j=0}^{n-1} \mathit{\Gamma}\left(s - \frac{j}{2}\right)$$

とおけば, [22, (1.31)] より

$$M_v(s) f^{(s)}_{\Phi^0_v} = \frac{(\sqrt{-1})^{n(p-q)/2} 2^{n(1-s)} \pi^{n\varrho} \mathit{\Gamma}_n(s)}{\mathit{\Gamma}_n\big(\frac{1}{2}\big(s+p+\frac{1}{2}\big)\big) \mathit{\Gamma}_n\big(\frac{1}{2}\big(s+q+\frac{1}{2}\big)\big)} f^{(-s)}_{\Phi^0_v}$$

となり, 正則性が直接確かめられる. $\square$

$\Phi = \otimes_v \Phi_v \in S(V^n(\mathbb{A}))$ を固定し, $I(s, \chi_V)$ の有理型切断 $h^{(s)}$ を

$$h^{(-s)} = M^\circ(s) f^{(s)}_\Phi$$

により定義する. 3 節で述べた関数等式を適用して

$$E\big(g; f^{(s)}_\Phi\big) = \frac{a(s)}{b(s)} E\big(g; h^{(-s)}\big).$$

補題 5.1 より $h^{(s)}$ は $s=-s_0$ で正則だから, $E\big(g; h^{(s)}\big)$ は $s=-s_0$ で高々一位の極を持つ. したがって, 正則性の証明は

$$\mathrm{ord}_{s=s_0} \frac{a(s)}{b(s)} = \begin{cases} 1 & V \text{ が } \mathcal{H} \text{ と同型でないとき} \\ 2 & V = \mathcal{H} \text{ のとき} \end{cases}$$

から完了する. $V = \mathcal{H}$ のとき, $E\big(g; f^{(s)}_\Phi\big)|_{s=s_0}$ は恒等的に零になる.

regularized ジーゲル・ヴェイユ公式の変形

補題 5.1 より線形写像 $A : \Pi(V) \to I(-s_0, \chi_V)$ を

$$A\big(f^{(s_0)}\big) = \lim_{s \to s_0} M^\circ(s) f^{(s)}$$

により定義できる. ここで, 正則切断 $f^{(s)}$ は

$$f^{(s)}(g) = |a(g)|^{s-s_0} f^{(s_0)}(g)$$

と定める. ラングランズの理論より

$$M^\circ(-s_0) \circ A\big(f^{(s_0)}\big) = \delta f^{(s_0)}, \qquad \delta = \frac{b(-s_0)}{a(s_0)} \lim_{s \to s_0} \frac{b(s)}{a(-s)}.$$

$\delta \neq 0$ は容易に分かる. さらに $A(\Pi(V)) \subset \Pi(U)$ も容易に分かり, V が $\mathcal{H}$ と同型ではないと仮定して, 定理 3.7 を $h^{(-s)} = M^{\circ}(s) f_{\Phi}^{(s)}$ に適用すれば,

$$\begin{aligned} E\big(g; f_{\Phi}^{(s)}\big)|_{s=s_0} &= \lim_{s \to s_0} \frac{a(s)}{b(s)} E\big(g; h^{(-s)}\big) \\ &= -\frac{a(s_0)}{\mathrm{Res}_{s=s_0} b(s)} \mathrm{Res}_{s=-s_0} E\big(g; h^{(s)}\big) \\ &= c_1 I(g; \Phi). \end{aligned}$$

ここで,

$$c_1 = -\frac{a(s_0)}{\mathrm{Res}_{s=s_0} b(s)} \delta c_0 = \frac{b(-s_0)}{\mathrm{Res}_{s=-s_0} a(s)} c_0$$

とおいた. 同様にして, $V = \mathcal{H}$ の場合には定理 4.1(2) を証明できる.

比例定数の決定

最後に $c_1 = 2$ を示せば, 定理 4.1 の証明は完了する. $\ell = m - 1$ とおき, G の部分群を次のように定める:

$$G_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{n-\ell} & & & \\ & a & & b \\ \hline & & \mathbf{1}_{n-\ell} & \\ & c & & d \end{array} \right) \in G \right\}$$

$a \in \mathrm{GL}_{n-\ell}(\mathbb{A})$ に対して

$$m_0(a) = m\Big(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_\ell \end{pmatrix} \Big)$$

とおく. $\beta_0 \in \mathrm{Sym}_\ell(F) \cap \mathrm{GL}_\ell(F)$ を固定し,

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-\ell} & 0 \\ 0 & \beta_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_n(F)$$

とおく. $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式 $\mathcal{F}$ に対して,

$$\mathcal{F}_\beta(g) = \int_{\mathrm{Sym}_n(F) \backslash \mathrm{Sym}_n(\mathbb{A})} \mathcal{F}(n(b)g) \psi(-\mathrm{tr}(\beta b)) db, \qquad g \in G(\mathbb{A})$$

は $\mathcal{F}$ のフーリエ係数である. 先の計算より

$$E_\beta\big(g; f_{\Phi}^{(s)}\big)|_{s=s_0} = c_1 I_\beta(g; \Phi)$$

である．$\Theta_\beta(g,h;\Phi)$ は [15, 補題 6.10] より $H(F)\backslash H(\mathbb{A})$ 上項別絶対可積分であるから, regularization 作用素を外すことができ, $g_0 \in G_0(\mathbb{A})$ に対して

$$
\begin{aligned}
I_\beta(g_0;\Phi) &= \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \Theta_\beta(g_0,h;\Phi)dh \\
&= \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \sum_{x\in V^n(F),\ Q(x)=\beta} \omega(g_0)\Phi(h^{-1}x)dh \\
&= \int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})} \sum_{y\in V^{\ell_0}(F),\ Q(y)=\beta_0} \omega(g_0)\Phi((0,h^{-1}y))dh \\
&= I_{\beta_0}(g_0;\Phi_0)
\end{aligned}
$$

となる．ここで, $\Phi_0 \in S(V^\ell(\mathbb{A}))$ を $\Phi_0(y) = \Phi((0,y))$ と定めた.

一方, アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数は, [11] の補題 2.4 より

$$
\begin{aligned}
E_\beta(g;f_\Phi^{(s)}) &= \sum_{j=0}^{n-\ell} E_\beta^j(g;f_\Phi^{(s)}), \\
E_\beta^j(g;f_\Phi^{(s)}) &= \sum_{\gamma\in Q_j^{n-\ell}(F)\backslash \mathrm{GL}_{n-\ell}(E)} f_{\Phi,\beta,j}^{(s)}(m_0(\gamma)g)
\end{aligned}
$$

と与えられる．ここで

$$
\begin{aligned}
Q_j^n &= \left\{ \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n \;\middle|\; a \in \mathrm{GL}_{n-j},\ d \in \mathrm{GL}_j \right\}, \\
w_j &= \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{n-j} & & & \\ & & & \mathbf{1}_j \\ \hline & & \mathbf{1}_{n-j} & \\ & -\mathbf{1}_j & & \end{array} \right), \\
f_{\Phi,\beta,j}^{(s)}(g) &= \int_{\mathrm{Sym}_{\ell+j}(\mathbb{A})} f_\Phi^{(s)}\Big(w_{\ell+j}n\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\Big)g\Big)\psi\Big(-\mathrm{tr}\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}b\Big)\Big)db
\end{aligned}
$$

とおいた．$E_\beta^j(g;f_\Phi^{(s)})$ は $\mathrm{GL}_{n-\ell}(\mathbb{A})$ 上の保型形式と見て, 相異なる中心指標を持ち, $E_\beta^0(g;f_\Phi^{(s)})|_{s=s_0}$ と $I_\beta(g;\Phi)$ の中心指標は一致するので,

$$
E_\beta^0(g_0;f_\Phi^{(s)})|_{s=s_0} = c_1 I_{\beta_0}(g_0;\Phi_0)
$$

が得られる．さらに,

$$
E_\beta^0(g_0;f_\Phi^{(s)})|_{s=s_0} = E_{\beta_0}(g_0;f_{\Phi_0}^{(s)})|_{s=0}
$$

は容易に分かり, β_0 と Φ を適当に取れば $E_{\beta_0}(g_0;f_{\Phi_0}^{(s)})|_{s=0} \neq 0$ にできるので, 定理 3.3 から $c_1 = 2$ を得る.

References

[1] W. T. Gan, *A Siegel-Weil formula for exceptional groups*, J. Reine Angew. Math. **528** (2000) 149–181.

[2] W. T. Gan, *A Siegel-Weil formula for automorphic characters: Cubic variation of a theme of Snitz*, J. Reine Angew. Math. **625** (2008) 155–185.

[3] W. T. Gan, *A regularized Siegel Weil formula for exceptional groups*, (preprint)

[4] A. Ichino, *On the regularized Siegel-Weil formula*, J. Reine Angew. Math. **539** (2001) 201–234.

[5] A. Ichino, *A regularized Siegel-Weil formula for unitary groups*, Math. Z. **247** (2004) 241–277.

[6] A. Ichino, *On the Siegel-Weil formula for unitary groups*, Math. Z. **255** (2007) 721–729.

[7] T. Ikeda, *On the location of poles of the triple L-functions*, Compos. Math. **83** (1992) 187–237.

[8] T. Ikeda, *On the residue of the Eisenstein series and the Siegel-Weil formula*, Compos. Math. **103** (1996) 183–218.

[9] D. Jiang and D. Soudry, *On the genericity of cuspidal automorphic forms of* $SO(2n+1)$*, II*, Compos. Math. **143** (2007) 721–748.

[10] S. Kudla, *Central derivatives of Eisenstein series and height pairings*, Ann. Math. **146** (1997) 545–646.

[11] S. Kudla and S. Rallis, *On the Weil-Siegel formula*, J. Reine Angew. Math. **387** (1988) 1–68.

[12] S. Kudla and S. Rallis, *On the Weil-Siegel formula II. The isotropic convergent case*, J. Reine Angew. Math. **391** (1988) 65–84.

[13] S. Kudla and S. Rallis, *Degenerate principal series and invariant distributions*, Isr. J. Math. **69** (1990) 25–45.

[14] S. Kudla and S. Rallis, *Ramified degenerate principal series representations for* $Sp(n)$, Isr. J. Math. **78** (1992) 209–256.

[15] S. Kudla and S. Rallis, *A regularized Siegel-Weil formula: the first term identity*, Ann. Math. **140** (1994) 1–80.

[16] S. T. Lee and C.-B. Zhu, *Degenerate principal series and local theta correspondence II*, Isr. J. Math. **100** (1997) 29–59.

[17] S. T. Lee and C.-B. Zhu, *Degenerate principal series and local theta correspondence III*, J. Algebra **319** (2008) 336-359.

[18] J.-S. Li, *Singular unitary representations of classical groups*, Invent. Math. **97** (1989) 237–255.

[19] I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, ϵ-factors of representations of classical groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **83** (1986) 4589–4593.

[20] I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, *Rankin triple L-functions*, Compos. Math. **64** (1987) 31–115.

[21] W. Scharlau, *Quadratic and hermitian forms*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[22] G. Shimura, *Confluent hypergeometric functions on the tube domain*, Math. Ann. **260** (1982) 269–302.

[23] C. L. Siegel, *Über die analytische Theorie der quadratishen Formen*, Ann. of Math. **36** (1935) 527–606.

[24] C. L. Siegel, *Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie I*, Math. Ann. **124** (1951) 17–54; *II*, (1952) 364–387.

[25] A. Weil, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Math. **111** (1964) 143–211.

[26] A. Weil, *Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques*, Acta Math. **113** (1965) 1–87.

[27] A. Weil, *Basic Number Theory, third edition*. Springer-Verlag, 1974.

[28] S. Yamana, *On the Siegel-Weil formula:the case of singular forms*, preprint.

[29] S. Yamana, *On the Siegel-Weil formula for quaternionic unitary groups*, preprint.

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka City University, 3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka 558-8585, Japan
e-mail:yamana@sci.osaka-cu.ac.jp