群環の原始性問題

岡山商科大学・経営学部
西中恒和

1　始めに

有限次元代数における単純環は無限次元代数において原始環へと一般化される。群環においては、原始性は群が無限群の場合にのみ現れ、無限群の群環特有の性質となる。有限群の群環が半原始（半単純）であることの必要十分条件は Maschke の定理として知られている。Maschke の定理を一般の無限群に対するものへ拡張しようとする試みは半原始性問題と呼ばれ、無限群の群環の研究における中心課題の１つである。原始環は半原始環である。１９７２年に Formanek-Snider [16] によって自明でない原始群環が発見されて以来、半原始である非可換無限群の群環の多くは実際には原始環ではないかと考えられている。特に、非可換自由群の群環は原始であるという Formanek [15] の結果及びその証明から、（非可換）自由群に近い群（自由部分群を持つ群）の群環の原始性が示唆されてきた。

ここでは、自由群に近い群として近年よく研究されている（非可換）無限群として、自由群の昇鎖ＨＮＮ拡大群、局所自由群及び１関係子群を取り上げ、群の剰余有限性に注意しながらそれぞれの群環の原始性について考察する。

2　群環の半原始性と原始性

R を（非可換）環 $(\ni 1)$ とする。R の（両側）イデアル (ideal) が自明なもの（(0) と R 自身）に限るとき、R は単純環（simple ring) と呼ばれる。R が アルティン的（artinian）であるとき、例えば R が体上有限次元代数のとき、単純環 R は斜体上の行列環に同型であることが知られている（Wedderburn theorem)。環 R を右 R 加群とみるとき、R の極大右イデアル（極大部分加群）による既約剰余加群は常に忠実な右 R 加群となる。これを一般化し、忠実な既約右 R 加群が存在する（即ち、R に極大右イデアルで、R の自明でない両側イデアルを含まないものが存在する）とき、R は右原始環 (right primitive ring) であると言われる。左原始環も同様に定義される。一般に右原始環は必ずしも左原始環ではないが、群環においては右原始環はいつでも左原始環となる。以下では右原始環を単に原始環と呼ぶ。定義から、単純環は原始環である。一方、原始環は必ずしも単純環ではない。例えば、体上無限次元ベクトル空間の自己準同型環は原始環であ

るが単純環ではない。また、本稿の主題である原始群環はいつでも単純環ではない（群が自明な場合を除いて）。

R のすべての極大右イデアル全体の共通部分 $J(R)$ はすべての極大左イデアルの共通部分と一致し R のジャコブソン根基（Jacobson radical）と呼ばれる。$J(R)=0$ のとき、R は半原始 (semiprimitive) 或は半単純 (semisimple) と呼ばれる。原始環であれば、自明でない ideal を含まない極大右 ideal が存在するので、原始環は半原始環である。R がアルティン的であれば半原始環（アルティン的半原始は単に半単純と呼ばれることがある）は単純環（$\simeq$ 斜体上の行列環）の有限直和に同型である (Wedderburn-Artin Theorem)。

さて、以下において、KG で群 G の体 K 上の群環 (the group ring of G over K) を表す。G が有限群のとき、KG が半原始であることの必要十分条件は Maschke の定理としてよく知られている。

Maschke's Theorem G を位数 n の有限群とし、K を体とする。K の標数を $Ch(K)$ で表す。このとき、

$$KG\text{:半原始} \iff Ch(K)=0 \text{ or } Ch(K)=p,\ p\nmid n$$

Maschke の定理を一般の群（無限群）に対するものへ拡張しようとする試みは半原始性問題と呼ばれ、無限群の群環における研究の中心課題の一つである。まず、1950 年、Rickart [35] により $K=\mathbb{C}$（複素数体）の場合、任意の群 G に対して KG が半原始であることが示された。この結果は K が素体上代数的でない場合に拡張された（Amitsur [1], 1959, Passman [30], 1962）。半原始である KG は分離代数であるので、この結果により、与えられた群 G に対して、KG が半原始であるか否かの問題は K が素体である場合に帰着されたことになる。その後 1973 年には、可解群 G に対する Maschke の定理の拡張が与えられた (Villamayor [38], Passman [31] [32], Wallace [39], Zalesskii [42] [43], Hampton-Passman [20])。更に 1996 年、局所有限群に対しては半原始性問題は完全に解決した（Passman [33]）。

ところで、群が非可換無限群のとき、半原始群環の持つ際立った特徴の一つは、それが原始環であり得るということである。G が自明でない有限群や可換群の場合、群環 KG は原始環ではあり得ない。実際、$G\neq 1$ が有限群のとき、KG はアルティン環であるので、原始環であることは単純環であることを意味する。しかし、KG にはいつも自明でないオーグメンテイションイデアル（augmentation ideal）が存在する。さらに、可換な原始環は体であるので、$G\neq 1$ が可換群の場合も群環 KG は原始環ではあり得ない。群環の原始性は有限群や可換群においては現れない非可換無限群の群環特有の性質である。そして、半原始群環はしば

しば原始環であることが半原始性問題の解決を困難なものとしおり、群環の原始性を明らかにすることが群環の半原始性問題の解決につながると考えられる。また、群環が半原始であるか否かは群それ自体の性質をよく反映しない。実際、複素数体上の群環は常に半原始であり、票数０の体上の群環の半原始性が予想されている。一方、群環が原始であるか否かは群の性質に強く依存する。従って、逆に群環の原始性を知ることにより、群の情報を得ることが期待される。

3　原始群環

原始群環はしばらく発見されず、嘗て、自明でない群に対して、原始であるような群環は存在しないことが予想されていた。１９７２年に Formanek-Snider [16] によって自明でない原始群環の例が提示された。以来、群環 KG が原始群環となる K と G に関する必要十分条件を求めることが群環の原始性問題として研究されている。群環 KG の原始性は、半原始性と異なり、G にも K にも依存する。ある G に対しては、K が ”大きな ”とき、また別の G に対しては K が ”小さな ”とき、或は G によっては任意の K において KG は原始となる。これらの関係はまだ明らかとなっておらず、過去に幾つかの予想が立てられたが、すべて反例が与えられ、現在有効な予想は存在しない。更に、よく知られた無限群の群環の原始性について、まだ多くは知られていない。

原始性問題に対する主な結果として、まず、polycyclic 群については完全な解答が得られている。ここで、群 G はその正規列 $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_n = 1$ で、G_i/G_{i+1} が巡回群になっているものが存在するとき、polycyclic 群と呼ばれる。$\Delta(G) = \{g \in G \mid g$ に共役な G の元は有限個 $\}$ とする。$\Delta(G)$ は G の FC 中心（FC center）と呼ばれる。

定理１ (Domanov[11], Farkas-Passman [13] and Roseblade [36])　G を polycyclic by finite 群（指数有限の正規 polycyclic 部分群が存在する）とする。以下の (i), (ii) を満たすことが、KG が原始であるための必要十分条件である。

(i) K は有限体の代数拡大ではない。

(ii) $\Delta(G) = 1$ である。

次に、G が自由群であるとき、KG が半原始であることは古くから知られていたが、実際には原始であることが示された。

定理２ (Formanek [15])　$G = A * B$ を群 $A \neq 1$ と $B \neq 1$ の自由積とする。$G \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ ならば、任意の体 K に対して KG は原始である。特に、G が非可換

自由群であれば KG は原始である。

定理２の群 G は $\Delta(G)=1$ を満たしている。また定理１においては、K がある程度大きなもの、例えば $K=\mathbb{C}$ であれば、$\Delta(G)=1$ は KG が原始であることの必要十分条件になっている。しかしながら、以下の例は、K のいかなる制限に対しても、条件 $\Delta(G)=1$ それだけでは KG が原始であることの必要条件でも十分条件でもないことを示している。

例１ (1) (Domanov [10])　N, H を elementary abelian p-group で $|H|=\aleph_0$, $|N|>2^{\aleph_0}$ を満たすものとする。このとき、$G=NwrH$（N の H による wreath product）は $\Delta(G)=1$ を満たす。更に、$Ch(K)\neq p$ なる体 K に対しては KG は半原始であるが、任意の体 K に対して, KG は原始でない。

(2) (Irving [22])　N, H を無限巡回群とする。このとき、$G=NwrH$ は $\Delta(G)\neq 1$ を満たすが、任意の体 K に対して、KG は原始である。

さて、群 G の自明でない任意の元 g に対して、指数有限な G の正規部分群で g を含まないものが存在するとき、G は剰余有限 (residually finite) であると言われる。有限群や可換群は明らかに剰余有限であるが、特筆すべきは自由群が剰余有限性を満たすと言うことである（[19]）。そして、自由群に近い群がしばしばこの性質を共有する。自由群は任の素数 p に対して、さらに強い p-剰余有限性（任意の $g\neq 1$ に対して、g を含まない指数が p 冪の正規部分群が存在する）を有している。定理１における polycyclic by finite 群の剰余有限性も古くから知られている（[21]）。無限群に対する剰余有限性は今日までよく研究されており、2003 年には、Hus-Wise [24] により polycyclic by finite 群の昇鎖 HNN 拡大の剰余有限性が示されている。また、2005 年に有限生成自由群の昇鎖 HNN 拡大が剰余有限であることが Borisov-Sapir [9] により示された。

自由群と polycyclic by finite 群の剰余有限性と定理１及び定理２の結果から、群の剰余有限性と群環の原始性との関連が示唆されるが、一般には剰余有限な群の群環が原始であるとは言えない（例えば、例１（１）の群は剰余有限である)。しかし、自由群に近い群においては、群の剰余有限性と群環の原始性の間に何らかの関係性があるだろうことが期待される。

4　自由群に近い群

この節では、自由群に近い群として、自由群の昇鎖 HNN 拡大（ascending HNN extension）、局所自由群（locally free group）、１関係子群（one-relator group）

を取り上げ、それら群たちの剰余有限性を中心に紹介する。

1) 自由群の昇鎖 HNN 拡大

群 H に対して、$\phi : H \longrightarrow H$ を単射準同型とし、$G = \langle H, t \mid t^{-1}ht = \phi(h)\rangle$ で表現される群 G は H の ϕ による昇鎖HNN拡大と呼ばれる。$G = H_\phi$ と表す。

例2 $G = \langle F_2, t \mid t^{-1}ft = \phi(f)\rangle$ とする。ここに、$F_2 = \langle x, y\rangle$ は階数 2 の自由群、ϕ は $\phi(x) = x^n$, $\phi(y) = y^n$ を拡張して定義される F_2 上の単射自己準同型である。即ち、$t^{-1}xt = x^n$, $t^{-1}yt = y^n$.

(i) $n = 1 \Longrightarrow \phi = 1_{F_2}$, $G = \langle t\rangle \times F_2$: $\langle t\rangle$ と F_2 の直積.

(ii) $n = -1 \Longrightarrow \phi(F_2) = F_2$, $G = \langle t\rangle \ltimes F_2$: F_2 の $\langle t\rangle$ による半直積.

(iii) $n > 1 \Longrightarrow \phi(F_2) \neq F_2$, G: F_2 の真昇鎖 HNN 拡大.

一般に群 H に対して、$\phi(H) = H$ のとき、H_ϕ は上の (ii) のように、H の巡回拡大となる。昇鎖HNN拡大は巡回拡大を一般化したものであり、HNN拡大の特別な場合である。自由群の昇鎖HNN拡大は自由群の単射自己準同型のマッピングトーラスとも呼ばれ、近年良く研究されている群のひとつである。Feign-Handel [14] が自由群の昇鎖HNN拡大は coherent(すべての有限生成部分群は有限表現型）であることを示した。また、 Geoghegan-Mihalik-Sapir-Wise [18] は有限生成自由群の昇鎖HNN拡大は Hopfian（すべての全射自己順同型は自己同型） であることを示した。さらに、2005 年に Borisov-Sapir [9] が有限生成自由群の昇鎖HNN拡大は剰余有限であることを示している。

定理3（Borisov-Sapir [9]） F を有限生成自由群とする。このとき、F の昇鎖HNN拡大 F_ϕ は剰余有限である。

F が有限生成でない場合、一般には（$\phi(F) = F$ の場合でさえ）以下の例が示すように剰余有限ではない。

例 3 （Baumslag [6]） $G_i = \langle a_i, b_i\rangle$ を階数 2 の自由群 $(i = 1, 2, 3, \cdots)$, $f_i : G_i \longrightarrow G_{i+1}$ を $f_i(a_i) = [b_{i+1}^{(i+1)!}, a_{i+1}]$, $f_i(b_i) = b_{i+1}$ で定義される群準同型とする。このとき、f_i たちは単射準同型であり、(G_i, f_i) たちは直系（direct system）である。$G = \lim\limits_{\to} G_i$ を (G_i, f_i) たちの直極限（direct limit）とすると, G は以下を満たす。

(i) G は（有限生成でない）自由群の巡回拡大である。

(ii) G は非可換局所自由群である。

(iii) G の有限剰余群は巡回群である。

特に、G は剰余有限ではない。

2) 局所自由群

自由群の広域的な一般化として局所自由群が得られる。局所自由群は任意の有限生成部分群が自由群となる群として定義される。自由群の部分群は自由群であることが知られており、従って、自由群は局所自由群である。一方、自由群でない局所自由群は数多く存在する。例えば、階数 $n > 1$ の自由群たちの真の無限昇鎖の和からなる群は無限生成で Hopfian であり、従って自由でない局所自由群である。また、双曲的３次元多様体の研究において、その基本群の自由でない局所自由な部分群の存在は多様体の重要な情報を与える。この観点から、近年、双曲的３次元多様体の基本群に自由でない局所自由部分群が存在することが確かめられてきている ([17], [23], [2], [27])。また、可算無限の局所自由群は自由群の昇鎖和として表されることが知られている。

自由群 F の昇鎖HNN拡大 F_ϕ は $\phi(F) = F$ のとき F の巡回拡大であり、一般の場合には局所自由群の巡回拡大となっている。実際、$F_i = \{t^i f t^{-i} \mid f \in F\}$ とすれば、$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_i \subseteq \cdots$ は自由群たちの昇鎖列である。このとき、$F_\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ は F_ϕ の正規部分群であり、$F_\phi / F_\infty \simeq \langle t \rangle$ となる。F が階数 $n > 1$ の自由群のとき、F_i たちはすべて階数 n の自由群であり、$\phi(F) \neq F$ であれば、F_i たちは真の昇鎖列となるので、上に述べたように F_∞ は自由でない局所自由群である。さらにこの場合、定理３より、F_ϕ は剰余有限であり、その部分群も剰余有限なので、このような局所自由群 F_∞ は剰余有限である。他方、剰余有限でない局所自由群が存在する（例３）。

3) １関係子群

$\langle X \rangle$ で基底集合 X の自由群を表す。$W \in \langle X \rangle$ を巡回的既約語（cyclically reduced word）として、$G = \langle X \mid W = 1 \rangle$ で表現される群 G を１関係子群（one-relator group）という。以下簡単に $G = \langle X \mid W \rangle$ で表す。

閉曲面の基本群が１関係子群として表現されることが知られている。

例４ １関係子群　$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ とする。

(1) $\langle a, b \mid [a, b] \rangle$ はトーラスの基本群である。

(2) $\langle a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \mid [a_1, b_1] \cdots [a_n, b_n] \rangle$ は示性数 n の可符号閉曲面の基本群である。

(3) $\langle a, b \mid a^2 b^2 \rangle$ はクラインの壺の基本群である。

(4) $\langle a_1, \cdots, a_n \mid a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2 \rangle$ は示性数 n の非符号閉曲面の基本群である。

上記例において、(1) は自由アーベル群、(3) は自由アーベル群の有限拡大となっている。一方、(2) おいて $n > 1$、(4) において $n > 2$ であれば、それらには非可換で自由な部分群が含まれている。一般に以下が成り立つ。

定理４　(1)(Karrass-Solitar [25])　１関係子群の部分群は可解群か非可換で自由な部分群をもつ。

(2)(W. Magnus [26])　$G = \langle a_1, \cdots, a_n \mid W \rangle, W$ は巡回的既約語で文字 $a_1, \cdots, a_n$ をすべて含むものとする。このとき、$a_1, \cdots, a_{n-1}$ で生成される G の部分群 $\langle a_1, \cdots, a_{n-1} \rangle$ は自由群である。

上の定理４ (2) より、３つ以上の文字で生成される１関係子群には非可換で自由な部分群が存在することがわかる。一方、２つの文字で生成される１関係子群、例えば、$\langle a, b \mid [a, b]^n \rangle$ で表現される群は $n = 1$ のとき、上の例４（１) のもので可換群であるが、$n > 1$ のとき、可解でさえない。従って、定理４ (1) により非可換で自由な部分群が存在する。一般に $\langle a_1, \cdots, a_m \mid W^n \rangle$ で表現される群は $n > 1$ のとき、ねじれを持つ１関係子群（one-relator group with torsion）と呼ばれる。ここに、W は巡回的既約語（cyclically reduced word）である。$\langle a, b \mid W^n \rangle$ は $n > 1$ でかつ W が巡回的既約語で a, b を共に含むならば（非可換）自由部分群をもつことが知られている。

定理５ (Ree-Mendelsohn [34])　$G = \langle a, b \mid W^n \rangle$ は $n > 1$ でかつ W が巡回的既約語で a, b を共に含むならば、十分大きな m に対して、a と b^m で生成される G の部分群 $\langle a, b^m \rangle$ は階数２の自由群である。

定理４、定理５により、ねじれを持つ１関係子群 $\langle a_1, \cdots, a_m \mid W^n \rangle$ はそれが巡回群である場合を除き、非可換で自由な部分群をもつことが分かる。

さて、１関係子群の剰余有限性については、1967 年、Baumslag による以下の予想がある。

予想１ (G. Baumslag [5])　ねじれを持つ１関係子群（one-relator group with torsion）は剰余有限である。

ねじれを持たない１関係子群でも、例４（１)（２）の群をはじめ剰余有限であるものも少なくない。しかしながら、幾つかのタイプの剰余有限でない１関係子群も知られている。

例 5 剰余有限でない１関係子群　$[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab,\ a^b=b^{-1}ab,\ G=\langle a,b \mid W\rangle$ とする。

(1)（Baumslag-Solitar [8]）$W=a^{-1}b^pab^{-q}$ で p,q が相異なる素数ならば G は non-Hopfian である。有限生成１関係子群が剰余有限であれば Hopfian であることが知られている。

(2)（Baumslag-Miller-Troeger [7]）$W=[a,b]^{[a,b]^a}[a,b]^{-2}$ ならば G は剰余有限でない。

上の例のにおいて、G がねじれの場合、即ち、$G=\langle a,b \mid W^n\rangle$ $(n>1)$ の場合、(1) の W に対しては剰余有限であることが分かっており（[5]）、(2) の W に対しては最近より一般的な形でその剰余有限性が問いとして提出されている（[8]）。

さて、予想１に対して今日まで多くの部分的結果が得られているが現在まで未解決である。主な結果として、

定理６　$F=\langle a_1,\cdots,a_m\rangle$ とする。

(1) (B. Baumslag-Levin [4])　$G=\langle F,t \mid (t^{-1}VtW)^n\rangle$, ここに、$V,W\in F$ とする。$n>1$ ならば G は剰余有限である。

(2) (Egorov [12])　$G=\langle F \mid W^n\rangle$, ここに、$W\in F$ は正の語とする。$n>1$ ならば G は剰余有限である。

(3) (Wise [41])　$G=\langle F \mid W^n\rangle$, ここに、$W\notin [F,F]$ とする。$n>3|W|+8$ ならば G は剰余有限である。

上記結果を得るにあたって、(1) では G が free by cyclic 群の有限拡大であることが導かれている。また、Wise [40] において、(2) の別証明を与える中で、(2) の群 G が自由群のある融合積の有限拡大であることが導かれている。

補題１　(1)(B. Baumslag-Levin [4])　G を定理６の (1) の群とする。G は free by cyclic 群の有限拡大である。

(2)(Wise [40],[41])　G を定理６の (2) または (3) の群とする。G は融合積 $A*_HB$ の有限拡大である。ここに、A,B は自由群で、H は A と B の部分群で、次を満たす、即ち、任意の $g\in(A\setminus H)\cup(B\setminus H)$ に対して、$H\cap H^g=1$.

5　自由群に近い群の群環の原始性

（非可換）自由群の群環の原始性は、より一般的に群の自由積に対する結果として、 Formanek によって与えられた（定理２）。この結果及びそこでの方法論は自由群に近い群の群環は原始環であるものが少なくないことを示唆していた。実際、定理２の自由積に対する結果は融合積に対するもへと拡張されている (Balogun [3])。さらに、自由群の昇鎖ＨＮＮ拡大群の群環の原始性について以下の結果が得られた。

定理７ (Nishinaka [28])　F を可算濃度の非可換自由群とし、$G = F_\phi$ を F の ϕ による昇鎖ＨＮＮ拡大とする。このとき、KG が原始であることの必要十分条件は $|K| \leq |F|$ または $\Delta(G) = 1$.

前節の定理３で見たように、F が有限生成のとき、F_ϕ は剰余有限であるが、F が有限生成でないとき、F_ϕ は一般に剰余有限でない（例３）。一方、上の結果は $\Delta(G) = 1$ のとき（特に、$\phi(F) \neq F$ のとき）F が有限生成であることを要求していない（すぐ後で見るように、実際には任意の濃度の F に対して定理７は成り立つ）。

局所自由群は自由群の自然な一般化と考えられ、近年注目されてきている（４節、２）参照)。しかし、その群環の原始性については知られていなかった。可算無限局所自由群の群環は原始であること、より一般に以下のことが分かった。

定理８ (Nishinaka [29])　$F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n \subseteq \cdots$ を非可換自由群たちの昇鎖とし、$G = \cup_{i=1}^{\infty} F_i$ とする。このとき、任意の体 K に対して、KG は原始である。特に、可算無限局所自由群の群環は原始である。

既に見たように、自由群の昇鎖ＨＮＮ拡大は局所自由群の巡回拡大と見ることができる（2 節参照)。従って、定理８から、次の系が導かれる。

系１ (Nishinaka [29])　定理７は任意の濃度の（非可換）自由群 F に対して成り立つ。

さて、例３が示すように、可算局所自由群は一般には剰余有限ではない。定理８は（非可換）可算局所自由群の群環は原始であることを主張している。従って、定理８は次のことを示している。即ち、任意の体 K に対して KG が原始であり、G が非可換自由群を部分群として持ち、更に $\Delta(G) = 1$ であっても G は剰余有限である必要がない。しかしながら、自由群に近い群 G を有限生成であるもの

に限って考えるならば、任意の体 K に対して KG が原始のとき G が剰余有限であることが期待される。

逆に、G が自由群に近い群で剰余有限のとき任意の体 K に対して KG は原始であることが期待できるであろうか。一般に G が剰余有限であるとき、もし体 K の標数が 0 であれば（標数が p のときでも、G が位数 p の元を含まなければ)、群環 KG は半原始であることは知られている。更に、これまで見てきたことから自由群に近い群 G が $\Delta(G)=1$ を満たすとき、G が剰余有限であれば、任意の体 K に対して KG の原始性が期待される。

以上の期待の試金石として１関係子群、特にねじれ１関係子群の剰余有限性、及び群環の原始性を考えることは有効であると考えられる。以下において１関係子群の群環の原始性について考える。

まず、ねじれ１関係子群の剰余有限性の予想（予想１）から、ねじれ（非可換）１関係子群の群環の原始性が予想される。実際、以下のことが容易に分かる。

主張１ (定理６参照) $F=\langle a_1,\cdots,a_m\rangle$, K を体とする。

(1) $G=\langle F,t \mid (t^{-1}VtW)^n\rangle$, ここに、$V,W\in F$, $n>1$ とする。$\Delta(G)=1$ ならば KG は原始である。

(2) $G=\langle F \mid W^n\rangle$, ここに、$W$ は a positive word in F, $n>1$ とする。$\Delta(G)=1$ ならば KG は原始である。

(3) $G=\langle F \mid W^n\rangle$, ここに、$W\notin[F,F]$, $n>3|W|+8$ とする。$\Delta(G)=1$ ならば KG は原始である。

証明 (1): 補題１ (1) により、G には指数有限な部分群 N で、free by cyclic 群が存在する。このとき、定理７により、KN は原始である。$\Delta(G)=1$, $[G:N]<\infty$ なので、[37, Theorem 3] から KG の原始性が導かれる。

(2),(3): 補題１（２）により、G には指数有限な部分群 N で、N は自由群 A, B の融合積 $N=A*_H B$ となっているものが存在する。ここで、H は A と B の部分群で、任意の $g\in(A\setminus H)\cup(B\setminus H)$ に対して、$H\cap H^g=1$ を満たしている。このとき、[3, Theorem 3.2] 及びその証明から、KH は原始であることが分かる。$\Delta(G)=1$, $[G:H]<\infty$ なので、[37, Theorem 3] から KG の原始性が導かれる。□

また、Reidemeister-Schreier の方法を基礎とする簡単な計算から最近 Baumslag-Miller-Troeger [7] により提出された問いに対するテストケースとして、次の主張

２ (1) を得ることができる。更に、主張１ (1) と同様にして以下の主張２ (2) が導かれる。

主張２ (例５（２）参照)　$G = \langle a, b \mid ([a,b]^{[a,b]^a}[a,b]^{-2})^3 \rangle$, K を体とする。
(1) G は free by cyclic 群の有限拡大である。従って、G は剰余有限である。

(2) KG は原始である。

上を見るために用いた方法は、まず群の構造を明らかにし、その結果としてその群の群環の原始性を導くというものである。しかしながら、この方法をより一般的な形 [7] の群に対する群環へ、さらには一般のねじれ１関係子群に対する群環へ適用し、その原始性を導くことは容易ではないように思われる。そこで、別の道を現在模索している。それは、定理８の証明で用いた方法を拡張し、それを１関係子群の群環の原始性へ適用しようというものである。最後に定理８の証明に用いた主な方法について概略する。

6　イデアルの生成元とグラフ

自由群に近い群の群環の原始性を示す方法として、 Formanek [15] により導入された以下の方法がしばしば用いられてきた。この節では Formanek の方法をグラフ理論を用いて拡張する。

Formanek's Method　KG を群 G の体 K 上の群環とする。$u \in KG \setminus \{0\}$ に対して, u で生成されるイデアル $KGuKG$ の元の１つを $\varepsilon(u)$ とし, ρ をすべの $\varepsilon(u)+1$ で生成される右イデアル; $\rho = \sum_{u \in KG\setminus\{0\}}(\varepsilon(u)+1)KG$ とする。このとき、
$$\rho \neq 0 \Longrightarrow KG \text{ は原始である。}$$

この方法を用いる際に、上の ρ をどのように構成すればよいか、即ち、どのような元 $\varepsilon(u)$ をイデアル $KGuKG$ から選べばよいかが問題となる。ρ の元 r は $r = \sum_t^n(\varepsilon(u_t)+1)v_t$, $v_t \in KG \setminus \{0\}$ と表され、任意の元 $r \in \rho$ に対して $r \neq 1$ となるよう各 $\varepsilon(u_t)$ を選ばなければならない。ここで、$\varepsilon(u_t)$ 及び u_t は G の元 f_{ti}, g_{ti} たちの K 上の線形結合で表わされる。従って、$\varepsilon(u_t)$ の support f_{ti} たちは G の任意の有限個の元 g_{tj} たちに対して、
$$r = \sum_t(\sum_{i,j}\alpha_{ti}\beta_{tj}f_{ti}g_{tj} + \sum_j \beta_{tj}g_{tj}) \neq 1 \ (\alpha_{ti} \neq 0,\ \beta_{tj} \neq 0)$$
を満たさなければならない。反対に

$$r = \sum_t (\sum_{i,j} \alpha_{ti}\beta_{tj} f_{ti} g_{tj} + \sum_j \beta_{tj} g_{tj}) = 1 \ (\alpha_{ti} \neq 0,\ \beta_{tj} \neq 0)$$

のとき、$\varepsilon(u_t)$ の support f_{ti} たちに対して何が言えるかをグラフ論的に考える。

簡単のために、KG の元 $u,\ v$ が $uv = 0$ を満たしていると仮定しよう。u, v が相異なる f_i たち、g_j たちによって $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i,\ v = \sum_{j=1}^m \beta_j g_j\ (\alpha_i \neq 0,\ \beta_j \neq 0)$ と表わされているとする。このとき、$\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f_i g_j = 0$ であり、どの $f_i g_j$ に対しても少なくとも 1 つの他の $f_p g_q$ が存在して、$f_i g_j = f_p g_q$ を満たしていなければならない。今、仮に、$f_1 g_1 = f_2 g_2,\ f_3 g_2 = f_4 g_3,\ f_5 g_3 = f_6 g_1$ となっているとする。このとき、これらはある種のサイクルをなしていると見ることができ、$f_1^{-1} f_2 f_3^{-1} f_4 f_5^{-1} f_6 = 1$ なる関係式が導かれる。これは u の support f_i たちに対する 1 つの情報を与えている。始めに、$f_1, \cdots, f_6$ が上の関係式を満たさないよう選ばれていると、背理的に $uv \neq 0$ と結論できる。さて、この状況をグラフを用いて以下のように表現する。頂点集合を $V = \{f_i g_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ とし、2 つの頂点、$v = f_i g_j,\ w = f_p g_q$ に対して、$v = w$ のとき $vw \in E,\ j = q$ のとき $vw \in E'$ として 2 つの辺集合 $E,\ E'$ を定め、1 つの頂点集合 V と 2 つの辺集合 $E,\ E'$ からなるグラフ $\mathcal{R} = (V, E, E')$ を考える。$v_1 = f_1 g_1,\ v_2 = f_2 g_2,\ v_3 = f_3 g_3,\ v_4 = f_4 g_3,\ v_5 = f_5 g_3,\ v_6 = f_6 g_1$ とすれば、$\mathcal{R}$ において上の関係式は $v_1 e_1 v_2 e_1' v_3 e_2 v_4 e_2' v_5 e_3 v_6 e_3' v_1$ と表わされ、E と E' の辺で交互に結ばれた $\mathcal{R}$ におけるサイクルをなしている。

以上のような方法をより一般的状況に適用できるよう、以下のように R-グラフ (relay-like graph)、R-サイクルを定義する。

定義 1 ([29, Definition 9]) $\mathcal{G} = (V, E)$ と $\mathcal{G}' = (V, E')$ を同じ頂点集合 V をもつ単純グラフとする。$v \in V$ に対して $U(v) = \{w \in V \mid vw \in E'\} \cup \{v\}$ とする。このとき、任意の $v \in V$, 任意の $\mathcal{G}$ の連結成分 C に対して、$|U(v) \cap C| \leq 1$ を満たすとき、$\mathcal{R} = (V, E, E')$ を R-グラフと言う。ここで、上の $U(v)$ を v の R-近傍と呼び、$\mathfrak{U} = \{U(v) \mid v \in V\}$ とする。

定義 2 ([29, Definition 12]) $p > 1$ とし、$1 \leq q \leq p$ に対して、π_q を $\mathcal{G}$ のパスで、$v_q,\ w_q$ をそれぞれ π_q の始点と終点とする。このとき、列 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_p)$ が次の (i), (ii) を満たすとき、π を長さ p の R-パスであると定義する。

(i) $v_q,\ w_q$ たちはすべて相異なる。

(ii) $1 \leq q \leq p - 1$ なる任意の q に対して, $w_q v_{q+1} \in E'$.

π が更に,

(iii) $w_p v_1 \in E'$

を満たすとき、π を長さ p の R-サイクルと言う。

以下において、$W \subseteq V$ に対し、$\mathcal{G}'_W$ で W で生成される $\mathcal{G}' = (V, E')$ の部分グラフを表わし、$\mathfrak{U}_W = \{U_W(v) = U(v) \cap W \mid v \in W, U(v) \in \mathfrak{U}\}$ とする。また、$\mathfrak{C}(V)$ で $\mathcal{G}' = (V, E')$ のすべての連結成分の集合を表わし、$I(V)$ で $\mathcal{G} = (V, E)$ における孤立頂点の数を表す。任意の $W \in \mathfrak{C}(V)$ に対して、$\mathcal{G}'_W$ が完全 k-部グラフ $K_{l_1,\cdots,l_k}$ に同型であるとき、$\mathcal{R} = (V, E, E')$ を R-色彩グラフと呼び、$m(W) = max\{l_1, \cdots, l_k\}$ とする。また、任意の $W \in \mathfrak{C}(V)$ に対して、$m(W) = 1$ のとき、即ち、$\mathcal{G}'_W$ が完全グラフのとき、$\mathfrak{C}(V)$ を単純 R-色彩という。以下の結果が得られる。

定理９ ([29, Theorem 19]) $\mathcal{R} = (V, E, E')$ を R-色彩グラフとし、$\mathfrak{C}(V) = \{V_1, \cdots, V_n\}$ $(n > 1)$ とする。任意の i に対して、$|V_i| \geq 2m(V_i) + 1$ を満たしているとする。このとき、$I(V) \leq n$ であれば、$\mathcal{R}$ には R-サイクルが存在する。

$\mathfrak{C}(V)$ が単純 R-色彩で、かつ $\mathcal{R}$ に長さ２の R-サイクルが存在しないとき、$\mathcal{R}$ を R-単純グラフと呼ぶ。R-単純グラフ $\mathcal{R}$ において、$v, w \in V$ に対し、v を始点とし、w を終点とする R-パスが存在するとき、v と w は R-連結であるという。連結成分と同様に R-連結成分が定義される。

定理１０ ([29, Theorem 24]) $\mathcal{R} = (V, E, E')$ を R-単純グラフとする。このとき、$\mathcal{R}$ が R-サイクルを持つための必要十分条件は、$|W| - |\mathfrak{U}_W| - \omega + 1 \neq 0$ を満たす R-連結成分 W が存在することである。ここに、ω は $\mathcal{G}_W$ の連結成分の数である。

定理９、定理１０を Formanek の方法に適用し、例えば、局所自由群の群環の原始性が導かれる。

謝辞　第５５回代数学シンポジウムでの講演の機会を下さった池畑秀一先生ならびにシンポジウム関係者の皆様に感謝致します。また、講演の際に貴重なご意見を下さった皆様にも感謝致します。

参考文献

[1] S. A. Amitsur, On the semi-simplicity of group algebras, *Mich. Math. J.*, **6**(1959), 251-253.

[2] J. W. Anderson, *Finite volume hyperbolic 3-manifolds whose fundamental group contains a subgroup that is locally free but not free*, Sci. Ser. A Math. Sci.(N.S), 8(1)(2002), 13-20

[3] B. O. Balogun, *On the primitivity of group rings of amalgamated free products*, Proc. Amer. Math. Soc., 106(1)(1989), 43-47

[4] B. Baumslag and Frank Levin, *A class of one-relator groups with torsion*, Arch. Math. (Basel), **33(3)**(1979/80), 209-215

[5] G. Baumslag, *Residually finite one-relator groups*, Bull. Amer. Math. Soc., **73**(1967), 618-620

[6] G. Baumslag, *A non-cyclic, locally free, free-by-cyclic group all of whose finite factor groups are cyclic*, Bull. Austral. Math. Soc., **6**(1972), 313-314

[7] G. Baumslag, C. F. Miller and D. Troeger, *Reflections on the residual finiteness of one-relator groups*, Groups. Geom. Dyn., **1**(2007), 209-219

[8] G. Baumslag and D. Solitar, *Some two-generator one-relator non-Hopfian groups*, Bull. Amer. Math. Soc., **68**(1962), 199-201

[9] A. B. Borisov and M. Sapir, *Polynomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of group endomorphisms*, Invent. Math., **160(2)**(2005), 341-356

[10] O. I. Domanov, *A prime but not primitive regular ring*, Uspehi Mat. Nau, **32(6)**(1977), 37-43

[11] O. I. Domanov, *Primitive group algebras of polycyclic groups*, Sibirsk. Mat. Ž., **19(1)**(1978), 37-43

[12] V. Egorov, *The residual finiteness of certain one-relator groups*, In Algebraic systems, Ivanov. Gos. Univ., Ivanovo, (1981), 100-121

[13] D. R. Farkas and D. S. Passman, *Primitive Noetherian group rings*, Comm. Algebra, **6(3)**(1978), 301-315.

[14] M. Feighn and M. Handel, *Mapping tori of free group automorphisms are coherent*, Ann. Math., **149(2)**(1999), 1061-1077.

[15] E. Formanek, *Group rings of free products are primitive*, J. Algebra, **26**(1973), 508-511

[16] E. Formanek and R. L. Snider, *Primitive group rings*, Proc. Amer. Math. Soc., **36**(1972), 357-360

[17] B. Freedman and M. H. Freedman, *Kneser-Haken finiteness for bounded 3-manifolds, locally free groups, and cyclic covers*, Topology, 37(1998), 133-147

[18] R. Geoghegan, M. L. Mihalik, M. Sapir, and T. Wise, *Ascending HNN extensions of finitely generated free groups are Hopfian*, Bull. London Math. Soc., **33(3)**(2001), 292-298

[19] M. Hall,Jr, *A topology for free groups and related groups*, Ann. of Math., **52**(1950), 127-139

[20] C. R. Hampton and D. S. Passman, *on the semisimplicity of group rings of solvable groups*, Trnas. Amer. Math. Soc., **173**(1972), 289-301

[21] K. Hirsch, *On infinite soluble groups, III*, Proc. London Math. Soc., **49(2)**(1946), 184-194

[22] R. S. Irving, *Some primitive group rings*, J. Algebra, **56(1)**(1979), 274-281

[23] R. P. Kent IV, *Bundles, handcuffs, and local freedom*, Geom. Ded., 106(1)(2004), 145-159

[24] Tim Hsu and T. Wise, *Ascending HNN extensions of polycyclic groups are residually finite*, J. Pure Appl. Algebra., **182(1)**(2003), 65-78

[25] A. Karrass and D. Solitar, *Sobgroups of HNN Groups and Groups with One Defining Relation*, Can. J. Math., **23**(1971), 627-643

[26] W. Magnus, *Uber discontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz)*, J. Reine Angew. Math., **163**(1930), 141-165

[27] B. Maskit, *A locally free Kleinian group*, Duke Math. J., 50(1)(1983), 227-232

[28] T. Nishinaka, *Group rings of proper ascending HNN extensions of countably inifinte free groups are primitive*, J. Algebra, **317**(2007), 581-592

[29] T. Nishinaka, *Group rings of countable non-abelian locally free groups are primitive*, to appear in Int. J. Algebra and Computation.

[30] D. S. Passman, *Nil ideals in group rings*, Mich. Math. J., **9**(1962), 375-384.

[31] D. S. Passman, *On the semisimplicity of twisted group algebras*, Proc. AMS, **25**(1970), 161-166.

[32] D. S. Passman, *Some isolated subsets of infinite solvable groups*, Pac. J. Math., **45**(1973), 313-320.

[33] D. S. Passman, *The Jacobson radical of group rings of locally finite groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **394**(1997), no. 12, 4693-4751.

[34] R. Ree and N. S. Mendelsohn, *Free subgroups of groups with a single defining relation*, Arch. Math., **19**(1968), 577-580

[35] C. Rickart, *The uniqueness of norm problem in Banach algebras*, Ann. Math., *51*(1950), 615-628.

[36] J. E. Roseblade, *Prime ideals in group rings of polycyclic groups*, Proc. London Math. Soc., **36(3)**(1978), 385-447. Corrigenda "Prime ideals in group rings of polycyclic groups" Proc. London Math. Soc., **36(3)**(1979), 216-218.

[37] A. Rosenberg, *On the primitivity of the group algebra*, Can. J. Math., **23**(1971), 536-540.

[38] O. E. Villamayor, *On the semisimplicity of group algebras II*, Proc. AMS., **10**(1959), 536-540.

[39] A. R. Wallece, *The radical of the group algebra of a subgroup, of a polycyclic group and of a restricted SN-group*, Proc. Edinb. Math. Soc., **17**(II)(1970), 165-171.

[40] Daniel T. Wise, *The residual finiteness of positive one-relator groups*, Comment. Math. Helv., **76(2)**(2001), 314-338

[41] Daniel T. Wise, *Residual finiteness of quasi-positive one-relator groups*, J. London Math. Soc., **66**(2002), 334-350

[42] A. E. Zalesskii, *On group rings of solvable groups*, Izv. Akad. Nauk BSSR, ser Fiz-Mat., (1970), 13-21.

[43] A. E. Zalesskii, *On the semisimplicity of a modular group algebra of a solvable group*, Soviet. Math., **14**(1973), 101-105.