Fourier coefficients of Arakawa lifting and central values of some Rankin-Selberg L-functions

成田宏秋* (熊本大学大学院自然科学研究科)
村瀬篤† (京都産業大学理学部数理科学科)

1　導入

保型形式の整数論における重要な研究対象として**フーリエ係数**と **L-函数**を挙げられるであろう．保型形式のフーリエ係数の数論的意義は, テータ級数のフーリエ係数が２次形式の整数解の個数を表しているという事実に一つの原点があると言える．その他, 整数の分割数などの組み合わせ論的意義についてもよく知られており, 数論的サイクルの交点数などの幾何学的観点からの研究も最近では盛んである．

また L-函数は整数論の様々な対象について定義されるものであるが, Langlands のプログラムによると多くの数論的 L-函数は保型形式に付随する L-函数, つまり保型 L-函数であろうと考えられている．実際, 楕円曲線や Calabi-Yau 多様体の L-函数の “modularity”, つまりそれらが保型 L-函数であることを示すという研究があり, それは Fermat の最終定理や佐藤-Tate 予想の解決という最近の数論の難問解決に寄与している．

このフーリエ係数と保型 L-函数という２つの重要な整数論的研究対象について, Waldspurger は 1981 年に出版された論文 [Wa-1] において, 重さ半整数の楕円カスプ形式の**フーリエ係数の２乗**とその志村対応により対応する重さ整数の楕円カスプ形式の「２次指標による捻り付き」**保型 L-函数の中心値** (つまり函数等式の中点での値) が, 適当な定数倍の下, 等しくなるという当時としては驚くべき関係式を発表した．その後 Kohnen-Zagier[Ko-Z] をはじめとしてその定数の明示公式に関する結果が多数発表されている．

本稿で報告する結果は, 上記のようなフーリエ係数と L-函数についての類似の公式を, **四元数ユニタリー群** $GSp(1,1)$ (不定符号のシンプレクティック群とも呼ばれる) 上のある保型形式の場合で得たものである．この研究の背景にあるものとして **Böcherer 予想** ([B] 参照) がある．これは次数２の正則 Siegel 保型形式への Waldspurger の公式の一般化に関する予想と見なせるものである．より正確には Hecke 同時固有的なレベル１の正則 Siegel カスプ形式に対し, そのフーリエ係数のある平均の２乗ノルムが, 適当な定数倍の下, ２次指標による捻り付きスピノール L-函数の中心値になるというものである．こ

*Partially supported by Grand-in-Aid for Young Scientists (B) 21740025, JSPS
†Partially supported by Grand-in-Aid for Scientific Research C-20540031, JSPS

の「フーリエ係数のある平均」とは現在では「**Bessel 周期**」として知られ「**保型形式の周期**」と呼ばれるものの一つである．この予想に触発されて, 正則な場合のみならず一般の次数 2 の Siegel 保型形式, 即ち次数 2 のシンプレクティック群 $GSp(2)$ 上の保型形式ないしは保型表現に予想を一般化したのが**古澤-Martin-Shalika の一連の研究**である ([F-S], [F-Mar] 参照). 彼らの手法は Jacquet による相対跡公式 ([J-2], [J-3] 等を参照) の $GSp(2)$ の場合へのある類似を与えることである．彼らの予想は $GSp(2)$ のみならずその非コンパクトな内部形式である $GSp(1,1)$ も対象としているが, 本稿の結果はその数少ない証拠の一つを与えていると言える．特に $GSp(1,1)$ の場合では**唯一の具体的証拠と思われる**.

ここで報告する主結果について説明する．以下では $\mathbb{A}$ で有理数体 $\mathbb{Q}$ のアデール環を表し, $\mathbb{Q}$ 上の代数群 $\mathcal{G}$ に対し $\mathcal{G}_{\mathbb{A}}$ は $\mathcal{G}$ のアデール群を表すことにする．

2 つの保型形式 f と f' をそれぞれ楕円カスプ形式および定符号四元数環の乗法群が定めるアデール群上の保型形式とし, 共に Hecke 同時固有的であるとする．この (f,f') からのテータリフトにより $GSp(1,1)_{\mathbb{A}}$ 上のカスプ形式を作ることができ, テータリフトを与えるテータ級数 (テータ核) をうまく指定すると有限素点において極大コンパクト群により不変で, 無限素点で四元数離散系列表現 ([Gr-W] 参照) を生成するという表現論的特徴付けを持つ保型形式が構成できる．これを我々は「**荒川リフト**」と呼び $\mathcal{L}(f,f')$ と記す．群 $GSp(1,1)_{\mathbb{A}}$ 上のカスプ形式 F の Fourier 係数は, 0 でない純四元数 ξ が定める $GSp(1,1)_{\mathbb{A}}$ の極大ユニポテント部分群上の加法指標に関する Fourier 変換 F_ξ で定義される．これを ξ が生成する虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\xi)$ の Hecke 指標 χ(§2.3 参照) で更に Fourier 変換したものを F_ξ^χ で記す．我々の主結果は $\mathcal{L}(f,f')_\xi^\chi$ についてであり, これは $\mathcal{L}(f,f')$ の Bessel 周期とも呼ばれるものである．

主結果を述べるために $\mathcal{L}(f,f')$ と χ に付随して決まる **Rankin-Selberg 型の L-函数** $L(\mathcal{L}(f,f'),\chi^{-1},s)$ を導入する (§4.2 参照). 我々の結果は f, f' , χ がある都合のよい条件を満たすとき (f がレベル 1 であるなど), 以下のようにして与えられる (定理 4.4 参照):

$$\frac{||\mathcal{L}(f,f')_\xi^\chi||^2}{\langle f,f\rangle\langle f',f'\rangle} = C(f,f',\xi,\chi)L(\mathcal{L}(f,f'),\chi^{-1},\frac{1}{2}).$$

ここに $C(f,f',\xi,\chi)$ は (f,f',ξ,χ) に依存して明示的に決まる定数で, $\langle f,f\rangle$ と $\langle f',f'\rangle$ はそれぞれ f, f' のノルムを表す.

ところで Langlands の函手性予想 ([Lg] 参照) によると $GSp(1,1)_{\mathbb{A}}$ の保型 L-函数は $GSp(2)_{\mathbb{A}}$ の適当な保型形式に対する保型 L-函数であろうと期待されるが, 最近, **岡崎武生氏** [O] が荒川リフト $\mathcal{L}(f,f')$ に対しそれに相当する $GSp(2)_{\mathbb{A}}$ 上の保型形式を構成している．岡崎氏は 2 つの楕円カスプ形式 (f_1,f_2) からのテータリフト $\mathcal{L}_{GSp(2)}(f_1,f_2)$ により $GSp(2)_{\mathbb{A}}$ の paramodular カスプ形式を構成しており, これが $f_1 = f$ で f_2 が f' の Jacquet-Langlands リフト $\mathrm{JL}(f')$ であるとき (上の公式が成り立つ状況下で) 荒川リフト $\mathcal{L}(f,f')$ と**同じスピノール L-函数及び Rankin-Selberg 型 L-函数を持つことが証明できる** (命題 4.7 参照). すなわち $L(\mathcal{L}_{GSp(2)}(f,\mathrm{JL}(f')),\chi^{-1},s)$ を $\mathcal{L}_{GSp(2)}(f,\mathrm{JL}(f'))$ と χ に

付随して決まる Rankin-Selberg 型 L-函数とすると上の公式は

$$\frac{||\mathcal{L}(f,f')^{\chi}_{\xi}||^2}{\langle f,f\rangle\langle f',f'\rangle} = C(f,f',\xi,\chi)L(\mathcal{L}(f,f'),\chi^{-1},\frac{1}{2}) = C(f,f',\xi,\chi)L(\mathcal{L}_{GSp(2)}(f,\mathrm{JL}(f'),\chi^{-1},\frac{1}{2})$$

と再定式化できる (定理 4.7 参照). ここで上述の $GSp(1,1)_{\mathbb{A}}$ と $GSp(2)_{\mathbb{A}}$ のスピノール L-函数の一致は**伊吹山知義氏** [I] によって本質的に予想されていたものであることを注意しておく.

この公式の応用としてこの **Rankin-Selberg 型 L-函数の中心値が正となる例**を与えることがある (定理 4.10 参照). 定数 $C(f,f',\xi,\chi)$ はその明示型から正であることがわかるので, 主定理の公式からトーラス積分の同時非消滅が分かれば, それは中心値 $L(\mathcal{L}(f,f'),\chi^{-1},\frac{1}{2}) = L(\mathcal{L}_{GSp(2)}(f,\mathrm{JL}(f'),\chi^{-1},\frac{1}{2})$ が正であることを証明したことになる. そしてこの同時非消滅の例は [M-N-2, §14] において与えられている.

関連する事実として, $GL(2)$ の Rankin-Selberg L-函数の中心値の非負性については Guo[Gu], Jacquet-Chen[J-C] などがある. またある一般の $SO_{2m+1}\times GL_n$ に対する Rankin-Selberg L-函数の場合について中心値が非負であるという Lapid による結果 [Lp] がある. 上述の我々の結果は $L(\mathcal{L}(f,f'),\chi^{-1},s) = L(\mathcal{L}_{GSp(2)}(f,\mathrm{JL}(f'),\chi^{-1},s)$ についてのより強い結果と言い得る.

2 荒川リフトのフーリエ係数の明示公式

2.1

この節では, 必要な記号を用意し, [Mu-Na-2] の主結果である荒川リフトのフーリエ係数の明示公式について復習する.

まず B を $\mathbb{Q}$ 上の定符号 4 元数環とし, tr と n をそれぞれ B の被約トレースないしは被約ノルムを表す. 符号 $(1+,1-)$ の不定符号のシンプレクティック群 $G = GSp(1,1)$ を, 以下の $\mathbb{Q}$ 有理点の集合をもつ $\mathbb{Q}$ 上の簡約代数群として定義する.

$$G_{\mathbb{Q}} := \{g \in M_2(B) \mid {}^t\bar{g}Qg = \nu(g)Q,\ \nu(g) \in \mathbb{Q}^{\times}\}.$$

ここに $Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である. 代数群 G の中心を Z_G で記す. 以下では G の p 進体 $\mathbb{Q}_p$ に関する有理点の成す群 $G_{\mathbb{Q}_p}$ を単に G_p と記す.

次に $\mathbb{H} := B\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ とするとこれは Hamilton の四元数環である. そして $G^1_{\infty} := \{g \in M_2(\mathbb{H}) \mid {}^t\bar{g}Qg = Q\}$ とおく. すると

$$K_{\infty} := \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a \pm b \in \mathbb{H}^1\} \quad (\mathbb{H}^1 := \{u \in \mathbb{H} \mid n(u) = 1\})$$

は G^1_{∞} の極大コンパクト部分群である.

負でない整数 κ に対して, $(\sigma'_\kappa, V_\kappa)$ を $GL_2(\mathbb{C})$ の κ-回対称テンソル表現とし, σ_κ を σ'_κ の標準的埋め込み $\mathbb{H} \subset M_2(\mathbb{C})$ ([Mu-Na-2, (1.4)] 参照) による引き戻しとする. するとこれは以下により K_∞ の既約表現 (τ_κ, V_κ) を引き起こす.

$$\tau_\kappa(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}) := \sigma_\kappa(a+b),\ (\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in K_\infty).$$

2 つの $\mathbb{Q}$ 上の代数群 $H,\ H'$ をそれぞれ以下の $\mathbb{Q}$ 有理点を持つものとして定義する.

$$H_{\mathbb{Q}} = GL_2(\mathbb{Q}),\ H'_{\mathbb{Q}} := B^\times.$$

四元数環 B の極大整環を $\mathfrak{O}$ とする. 記号 d_B により B の判別式を表し, 以下ではその約数 D を固定する. 判別式 d_B を割る素数 p に対して, $\mathfrak{P}_p$ を $\mathfrak{O}$ の p 進完備化 $\mathfrak{O}_p$ の極大イデアルとする. 各素数 p において局所格子を以下のように指定する.

$$L_p := \begin{cases} {}^t(\mathfrak{O}_p \oplus \mathfrak{O}_p) & (p \not| d_B \text{ または } p|D), \\ {}^t(\mathfrak{O}_p \oplus \mathfrak{P}_p^{-1}) & (p|\frac{d_B}{D}). \end{cases}$$

このとき各素数 p に対して $K_p := \{k \in G_p \mid kL_p = L_p\}$ とする. 素数 $p|d_B$ において上の 2 つの K_p は G_p 共役を除いて G_p の極大コンパクト部分群を尽くしている. そして $K_f := \prod_{p<\infty} K_p$ とおく.

以降 κ を $\kappa > 4$ なる偶数とする. $\mathcal{S}_\kappa$ を以下の条件を満たす $G_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}$ 上の V_κ-値カスプ形式 F の成す空間とする:

1. $F(z\gamma g k_f k_\infty) = \tau_\kappa(k_\infty)^{-1} F(g) \quad \forall (z,\gamma,g,k_f,k_\infty) \in Z_{G,\mathbb{A}_\mathbb{Q}} \times G_\mathbb{Q} \times G_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}} \times K_f \times K_\infty$,
2. 各固定した $g_f \in G_{\mathbb{A}_f}$ に対し, $F|_{G^1_\infty}(g_f *)$ の係数函数の $g_\infty \in G^1_\infty$ による右移動で生成される $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-加群が, τ_κ を極小 K_∞-タイプとする G^1_∞ の四元数離散系列表現 ([Gr-W] 参照) と同型である. ここに $\mathfrak{g}$ は G^1_∞ のリー環を記す.

重さ κ でレベル D の楕円カスプ形式の空間 ([Mu-Na-2, §3.1] 参照) を $S_\kappa(D)$ と記し, $\mathcal{A}_\kappa$ を $B^\times_\mathbb{A}$ 上の保型形式で重さ σ_κ で右-$\prod_{v<\infty} \mathfrak{O}_v^\times$ 不変なもの全体の成す空間とする ([Mu-Na-2, §3.2] 参照). ここに $\mathfrak{O}_v^\times$ は $\mathfrak{O}_v$ の単数群である. すると, ここに**荒川リフト**の定義を思い出すことができる. 具体的にはまず, $B^{\oplus 2}_\mathbb{A} \times \mathbb{A}^\times_\mathbb{Q}$ 上の $\mathrm{End}(V_\kappa)$-値の Schwartz-Bruhat 函数をある特別なものに指定し, $GSp(1,1)_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}} \times H_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}} \times H'_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}$ のメタプレクテック表現を用いて, $\mathrm{End}(V_\kappa)$-値のテータ級数 $\theta_\kappa(g,h,h')$ を作る ([Mu-Na-1, §3, §4] 参照). すると荒川リフトは以下で定義される.

$$S_\kappa(D) \times \mathcal{A}_\kappa \ni (f, f') \mapsto \mathcal{L}(f,f')(g) \in \mathcal{S}_\kappa.$$

ここに

$$\mathcal{L}(f,f')(g) := \int_{\mathbb{R}^2_+ (H\times H')_\mathbb{Q} \backslash (H \times H')_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}} \overline{f(h)} \theta_\kappa(g,h,h') f'(h') dh dh'.$$

2.2

荒川リフト $\mathcal{L}(f,f')$ のフーリエ展開を復習する ([Mu-Na-2, §1.3] 参照). 純四元数の集合 $B^- := \{x \in B \mid \mathrm{tr}(x) = 0\}$ を導入すると, フーリエ展開は

$$\mathcal{L}(f,f')(g) = \sum_{\xi \in B^- \setminus \{0\}} \mathcal{L}(f,f')_\xi(g)$$

と書ける. ここに $B^- \backslash B^-_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}$ の体積が 1 となるように正規化した測度 dx と $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ 上の標準的加法指標 ψ により, $\xi \in B^- \setminus \{0\}$ での項は

$$\mathcal{L}(f,f')_\xi(g) := \int_{B^- \backslash B^-_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}} \mathcal{L}(f,f')(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g)\psi(-\mathrm{tr}(\xi x))dx$$

で与えられる. 純四元数 $\xi \in B^- \setminus \{0\}$ に対し $E_\xi := \mathbb{Q}(\xi)$ と置くと, これは虚 2 次体に同型である. 集合 X_ξ を $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times E_\xi^\times \backslash \mathbb{A}_{E_\xi}^\times$ 上のユニタリー指標全体 (以下 Hecke 指標と呼ぶ) とするとフーリエ展開は以下のように書き直せる.

$$\mathcal{L}(f,f')(g) = \sum_{\xi \in B^- \setminus \{0\}} \sum_{\chi \in X_\xi} \mathcal{L}(f,f')_\xi^\chi(g).$$

ここに

$$\mathcal{L}(f,f')_\xi^\chi(g) := \mathrm{vol}(\mathbb{R}_+^\times \mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_{E_\xi}^\times)^{-1} \int_{\mathbb{R}_+^\times E_\xi^\times \backslash \mathbb{A}_{E_\xi}^\times} \mathcal{L}(f,f')_\xi(s 1_2 \cdot g)\chi(s)^{-1} ds.$$

2.3

保型形式の組 $(f,f') \in S_\kappa(D) \times \mathcal{A}_\kappa$ に対して, 荒川リフトのフーリエ係数 $\mathcal{L}(f,f')_\xi^\chi$ の明示公式を思い出すために, 以降次の 2 条件を仮定する:

(1) 2 つの保型形式 f と f' は Hecke 同時固有的で, “Atkin-Lehner 対合” に関して同じ符号を持つ. より正確には, D を割る各素数 p に対して, ϵ_p (resp. ϵ'_p) を $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p & 0 \end{pmatrix}$ (resp. B_p の素元 $\varpi_{B,p}$) が誘導する f (resp. f') への対合的作用に関する符号とすると以下が成立する:

$$\epsilon_p = \epsilon'_p.$$

これを仮定しないと $\mathcal{L}(f,f') \equiv 0$ となってしまう ([Mu-Na-1, Remark 5.2 (ii)] 参照).

(2) 純四元数 $\xi \in B^- \setminus \{0\}$ は原始的と仮定する. これは各素数 p に対して

$$\mathfrak{a}_p := \begin{cases} \mathfrak{O}_p & (p \not| d_B \text{ または } p|D) \\ \mathfrak{P}_p & (p|\frac{d_B}{D}) \end{cases}$$

としたとき, 以下が成り立つことを意味する:

$$\xi \in \mathfrak{a}_p \setminus p\mathfrak{a}_p.$$

この 2 番目の仮定については, 一般に $G_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}$ 上の保型形式 F の ξ に対するフーリエ係数 F_ξ が

$$F_\xi(g) = F_\xi(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g) = F_{t\xi}(g) \quad (t \in \mathbb{Q}^\times)$$

を満たすことに注意する. そうすると F_ξ を明示的に決定する問題は ξ が原始的である場合に帰着されることが分る.

2.4

以降, 任意に $\xi \in B^- \setminus \{0\}$ を一つ固定して, $E := E_\xi$ と記す. そしてこの虚 2 次体 $E = E_\xi$ の判別式を d_ξ と書く. そして次の記号を導入する:

$$a := \begin{cases} 2\sqrt{-n(\xi)}\sqrt{d_\xi} & (d_\xi \text{ is odd}) \\ \sqrt{-n(\xi)}\sqrt{d_\xi} & (d_\xi \text{ is even}) \end{cases}, \ b := \xi^2 - \frac{a^2}{4}.$$

これらの a と b により, 埋め込み写像 $\iota_\xi : E^\times \hookrightarrow GL_2(\mathbb{Q})$ を

$$\iota_\xi(x + y\xi) = x \cdot 1_2 + y \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & b \\ 1 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix} \ (x, y \in \mathbb{Q})$$

により定義する. 次に $\theta := r^{-1}(\xi - \frac{a}{2})$ $(r = \frac{2\sqrt{n(\xi)}}{\sqrt{d_\xi}} \in \mathbb{Q}^\times)$ とすると, $\{1, \theta\}$ は E の整数環 $\mathcal{O}_E$ の $\mathbb{Z}$ 基底を与える. このとき ι_ξ は以下のように記述できる:

$$\iota_\xi(x + y\theta) = \begin{pmatrix} x & -rN_{E/\mathbb{Q}}(\theta)y \\ r^{-1}y & x + \mathrm{Tr}_{E/\mathbb{Q}}(\theta)y \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{Q}).$$

虚 2 次体 E の無限素点での完備化 E_∞ は次の写像により複素数体 $\mathbb{C}$ と同一視できる:

$$\delta_\xi : E_\infty \ni x + y\xi \mapsto x + y\sqrt{-n(\xi)} \in \mathbb{C} \ (x, y \in \mathbb{R}).$$

商集合 $\mathbb{R}_+^\times E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times$ 上の Hecke 指標 $\chi = \prod_{v \le \infty} \chi_v$ に対して, $w_\infty(\chi) \in \mathbb{Z}$ を

$$\chi_\infty(u) = (\delta_\xi(u)/|\delta_\xi(u)|)^{w_\infty(\chi)} \ (u \in E_\infty^\times)$$

により定義する. 更に有限素点 $v = p < \infty$ に対して, $p^{i_p(\chi)}$ を指標 χ の p での導手として

$$\mu_p := \frac{\mathrm{ord}_p(2\xi)^2 - \mathrm{ord}_p(d_\xi)}{2}$$

とおく. これは $\mathrm{ord}_p(r)$ と等しい. 以上の準備の下, 次が言える ([Mu-Na-2, Theorem 5.1.1] 参照):

命題 2.1. 以下の条件が成り立たないとせよ:

$$d_B \text{ を割る素数 } p \text{ に対して } i_p(\chi)=0 \text{ で且つ } w_\infty(\chi)=-\kappa \text{ が成立.} \quad (*)$$

このとき $\mathcal{L}(f,f')^\chi_\xi \equiv 0$ となる.

2.5

これ以降, Hecke 指標 χ は上の命題にある条件 $(*)$ を満たすとする. フーリエ係数 $\mathcal{L}(f,f')^\chi_\xi$ の明示公式を思い出すためには更に記号を導入する必要がある.

まず 2 つのアデール群の元 $\gamma_0=(\gamma_{0,p})_{p\le\infty}\in H_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}$ と $\gamma'_0=(\gamma'_{0,p})_{p<\infty}\in H'_{\mathbb{A}_f}$ を以下で与える:

$$\gamma_{0,p} := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-\mu_p+i_p(\chi)} \end{pmatrix} & (p \nmid D), \\ 1_2 & (p|D \text{ で } p \text{ は } E \text{ で惰性}), \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & (p|D \text{ で } p \text{ は } E \text{ で分岐}), \\ n_H(a/2)d_H(N(\xi)^{1/4}) & (p=\infty), \end{cases}$$

$$\gamma'_{0,p} := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-\mu_p+i_p(\chi)} \end{pmatrix} & (p \nmid d_B), \\ \varpi_{B,p}^{-1} & (p|d_B). \end{cases}$$

ここに $\varpi_{B,p}$ は B_p の素元を表していたことを思い出す (§2.3 参照).

更に以下の局所定数を導入する:

$$C_p(f,\xi,\chi) := \begin{cases} p^{2\mu_p-i_p(\chi)}(1-\delta(i_p(\chi)>0)e_p(E)p^{-1}) & (p \nmid d_B), \\ 1 & (p|\frac{d_B}{D}), \\ 2\epsilon_p & (p|D \text{ で } p \text{ は } E \text{ で惰性}), \\ (p+1)^{-1} & (p|D \text{ で } p \text{ は } E \text{ で分岐}). \end{cases}$$

ここに

$$e_p(E) = \begin{cases} -1 & (p \text{ が } E \text{ で惰性}), \\ 0 & (p \text{ が } E \text{ で分岐}), \\ 1 & (p \text{ が } E \text{ で分解}). \end{cases}$$

保型形式 $(f,f')\in S_\kappa(D)\times\mathcal{A}_\kappa$ に対して, これら χ に関する**トーラス積分**を以下で与える ([Wa-2] 参照).

$$P_\chi(f;h) := \int_{\mathbb{R}_+^\times E_\xi^\times\backslash\mathbb{A}_{E_\xi}} f(\iota_\xi(s)h)\chi(s)^{-1}ds,\ P_\chi(f';h') := \int_{\mathbb{R}_+^\times E_\xi^\times\backslash\mathbb{A}_{E_\xi}^\times} f(sh')\chi(s)^{-1}ds.$$

ここに $(h,h')\in GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})\times B^\times_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}$. ここで [Mu-Na-2, §2.4] に従い $\mathbb{A}_E^\times$ の不変測度を次のように正規化する:

$$\mathrm{vol}(\mathcal{O}_{E,p}^\times)=1 \text{ for any } p<\infty,\quad \mathrm{vol}(E_\infty^1)=1.$$

虚 2 次体 E の類数を $\mathbf{h}(E)$ とし $w(E)$ を E の単数群の位数とする. 以上の用意の下, ようやく $\mathcal{L}(f,f')_\xi^\chi$ の明示公式を思い出せる ([Mu-Na-2, Theorem 5.2.1] 参照).

定理 2.2. *保型形式の組 (f,f') は共に Hecke 同時固有形式とし, $\xi\in B^-\setminus\{0\}$ は原始的と仮定する. そして Hecke 指標 χ は条件 $(*)$ (命題 2.1 参照) を満たすとし, §2.3で与えた条件 (1) と (2) が満たされているとする. このとき以下が成立する:*

$$\mathcal{L}(f,f')_\xi^\chi(g_{0,f}d_G(\sqrt{\eta_\infty}))$$
$$=2^{\kappa-1}n(\xi)^{\kappa/4}\frac{w(E)}{\mathbf{h}(E)}\cdot\left(\prod_{p<\infty}C_p(f,\xi,\chi)\right)\eta_\infty^{\kappa/2+1}\exp(-4\pi\sqrt{n(\xi)}\eta_\infty)\,\overline{P_\chi(f;\gamma_0)}P_\chi(f';\gamma_0').$$

ここに $\eta_\infty\in\mathbb{R}_+^\times$ で $g_{0,f}=(g_{0,p})_{p<\infty}\in G_{\mathbb{A}_f}$ は次で与えられる:

$$g_{0,p}:=\begin{cases}\mathrm{diag}(p^{i_p(\chi)-\mu_p},p^{2(i_p(\chi)-\mu_p)},1,p^{i_p(\chi)-\mu_p}) & (p\not|d_B),\\ 1_2 & (p|d_B)\end{cases}$$

Remark 2.3. 菅野 [Su, Theorem 2-1] により, フーリエ係数 $\mathcal{L}(f,f')_\xi^\chi$ は $g_{0,f}\begin{pmatrix}\sqrt{\eta_\infty} & 0\\ 0 & \sqrt{\eta_\infty}^{-1}\end{pmatrix}$ での値で決まる.

3 L-函数の中心値との関係 (GL_2 の場合).

3.1

引き続き $(f,f')\in S_\kappa(D)\times\mathcal{A}_\kappa$ は Hecke 同時固有的とし, 更に f は原始的 (primitive) とする ([Mi, §4.6] 参照). この保型形式 f, f' に対して $\pi(f)$, $\pi(f')$ をそれぞれ f, f' で生成される既約保型表現とし, $\pi(\mathrm{JL}(f'))$ を f' の Jacquet-Langlands リフト $\mathrm{JL}(f')$ で生成される既約保型表現とする. よく知られているように $\pi(f)$ と $\pi(\mathrm{JL}(f'))$ (resp. $\pi(f')$) は $GL_2(\mathbb{Q}_v)$ (resp. $B_v^\times$) の既約許容表現の制限テンソル積 ($\otimes'$ と記す) に分解する. 保型表現 $\pi(f)$, $\pi(\mathrm{JL}(f'))$, $\pi(f')$ の局所 v-成分をそれぞれ π_v, π_v', π_v'' と記す. これら $\pi(f)$ と $\pi(f')$ の分解に従い f と f' は

$$\rho(f)=\prod_{v\le\infty}f_v,\ \rho'(f')=\prod_{v\le\infty}f_v',$$

と分解する. ここに ρ (resp. ρ') は固定した $\pi(f)$ と $\otimes'_{v\le\infty}\pi_v$ (resp. $\pi(f')$ と $\otimes'_{v\le\infty}\pi_v''$) の間の同型である.

更に表現 Π (resp. Π') を $\pi(f)$ (resp. $\pi(\mathrm{JL}(f'))$) の $GL_2(\mathbb{A}_E)$ へのベースチェンジリフトとする． これらの表現 Π, Π' もそれぞれ制限テンソル積への分解 $\otimes'_{v\leq\infty}\Pi_v, \otimes'_{v\leq\infty}\Pi'_v$ を持ち, 各局所 v-成分 Π_v 又は Π'_v はそれぞれ π_v ないしは π'_v の (局所) ベースチェンジリフトである.

3.2 GL_2 の Adjoint L-函数とベースチェンジリフトの L-函数 (Rankin-Selberg L-函数).

アデール群 $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型表現 π に対して $L(\pi, s)$ をその標準 L-函数とする (Jacquet-Langlands[J-L] 参照). 記号 $L(\Pi, \chi^{-1}, s)$ または $L(\Pi', \chi^{-1}, s)$ により Π ないしは Π' の χ^{-1} による捻り付き L-函数とし, $L(\pi(f), \mathrm{Ad}, s)$ または $L(\pi(\mathrm{JL}(f')), \mathrm{Ad}, s)$ を $\pi(f)$ ないしは $\pi(\mathrm{JL}(f'))$ の Adjoint L-函数とする. ここでは L-函数 $L(\Pi, \chi^{-1}, s)$ と $L(\Pi', \chi^{-1}, s)$ の局所因子を Jacquet [J-1] により記述し, Adjoint L-函数 $L(\pi(f), \mathrm{Ad}, s)$ と $L(\pi(\mathrm{JL}(f')), \mathrm{Ad}, s)$ の局所因子を Gelbart-Jacquet [Ge-J] に基付いて記述する.

まず π_p (resp. $\pi'_p \simeq \pi''_p$) はそれぞれ各有限素点 p (resp. $p \nmid d_B$) においてユニタリー不分岐主系列表現となることを注意する. これは GL_2 の正則保型形式に対する Ramanujian 予想からの帰結である. 更に d_B を割る素数 p に対して, π''_p は $\mathbb{Q}_p^\times$ の適当な位数 2 の指標 δ_p により

$$B_p^\times \ni b \mapsto \delta_p \cdot n(b) \in \{\pm 1\},$$

と書ける. 判別式 d_B を割る素数 p に対して, 誘導表現 $\mathrm{Ind}(\delta_\mathrm{p} \cdot |*|_\mathrm{p}^{\frac{1}{2}}, \delta_\mathrm{p} \cdot |*|_\mathrm{p}^{-\frac{1}{2}})$ の既約商として与えられる $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の特殊表現 (Steinberg 表現) を π'_p と記す ([J-L, Theorem 4.2 (iii)] 参照). ここに $|*|_p$ は p-進絶対値を記す. 素数 p が E で分岐ないしは惰性し χ_p が不分岐であるとき, χ_p は

$$\chi_p = \omega_p \cdot n_{E_p/\mathbb{Q}_p}$$

の形に書ける. ここに ω_p は $\mathbb{Q}_p^\times$ の位数 2 の指標で $n_{E_p/\mathbb{Q}_p}$ は E_p のノルムを表す. 更に無限素点では π_∞ 及び π'_∞ は重さ κ ないしは $\kappa + 2$ の離散系列表現となる ([Sh, §6] 参照).

記号 π_{ur} により, 佐武パラメーター $(\alpha_p, \alpha_p^{-1})$ を持ち自明な中心的指標を持つ $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ のユニタリー不分岐主系列表現を表す. そして π_{sp} を π''_p に対応する $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の特殊表現とする. 表現 π_{ur} と π_{sp} の $GL_2(E_p)$ へのベースチェンジリフトをそれぞれ Π_{ur} または Π_{sp} と記す.

まず表現 π_{ur} と Π_{ur} に対する局所 L-函数を記述する.

補題 3.1. *(1)*

$$L_p(\pi_{\mathrm{ur}}, s) = (1 - \alpha_p p^{-s})^{-1}(1 - \alpha_p^{-1} p^{-1})^{-1}.$$

(2)

$$L_p(\pi_{\mathrm{ur}}, \mathrm{Ad}, s) = (1 - p^{-s})^{-1}(1 - \alpha_p^2 p^{-s})^{-1}(1 - \alpha_p^{-2} p^{-s})^{-1}.$$

(3)

$L_p(\Pi_{\mathrm{ur}}, \chi_p^{-1}, s) =$

$$\begin{cases} \prod_{i=1,2}(1-\alpha_p\chi_p(\varpi_{p,i})^{-1}p^{-s})^{-1}(1-\alpha_p^{-1}\chi_p(\varpi_{p,i})^{-1}p^{-s})^{-1} & (p \text{ が } E \text{ で分裂し, } i_p(\chi)=0), \\ (1-\alpha_p^2 p^{-2s})^{-1}(1-\alpha_p^{-2}p^{-2s})^{-1} & (p \text{ が } E \text{ で惰性し, } i_p(\chi)=0), \\ (1-\alpha_p\chi_p(\varpi_p)^{-1}p^{-s})^{-1}(1-\alpha_p^{-1}\chi_p(\varpi_p)^{-1}p^{-s})^{-1} & (p \text{ は } E \text{ で分岐し, } i_p(\chi)=0), \\ 1 & (i_p(\chi)>0). \end{cases}$$

ここに p が E で分裂するとき $\varpi_{p,i} \in E_p$ $(i=1,2)$ は p を割る 2 つの異なる素元を表し, p が E で分岐するとき $\varpi_p \in E_p$ は p を割る 1 つの素元を表す.

次に π_{sp} と Π_{sp} の場合を扱う.

補題 3.2.

$$L_p(\pi_{\mathrm{sp}}, s) = (1-\delta_p(p)p^{-(s+\frac{1}{2})})^{-1}, \tag{3.1}$$

$$L_p(\pi_{\mathrm{sp}}, \mathrm{Ad}, s) = (1-p^{-(s+1)})^{-1}, \tag{3.2}$$

$$L_p(\Pi_{\mathrm{sp}}, \chi_p^{-1}, s) = \begin{cases} (1-p^{-(2s+1)})^{-1} & (p \text{ が } E \text{ で惰性}), \\ (1-\delta_p(p)\omega_p(p)p^{-(s+\frac{1}{2})})^{-1} & (p \text{ が } E \text{ で分岐}). \end{cases} \tag{3.3}$$

整数 $k \geq 2$ に対して, π_k を $GL_2(\mathbb{R})$ の重さ k の離散系列表現とし Π_k をそのベースチェンジリフトとする. これらの表現に対する無限素点での局所 L-函数の記述は以下の通りである.

補題 3.3. 半整数 $l \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ に対して次が成り立つ.

$$L_\infty(\pi_k, s) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s+\frac{k-1}{2}), \tag{3.4}$$

$$L_\infty(\pi_k, \mathrm{Ad}, s) = \Gamma_{\mathbb{R}}(s+1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s+k-1), \tag{3.5}$$

$$L_\infty(\Pi_k, \chi_l, s) = \begin{cases} \Gamma_{\mathbb{C}}(s+\frac{k-1}{2}+|l|)\Gamma_{\mathbb{C}}(s-\frac{k-1}{2}+|l|) & (|l| \geq \frac{\kappa-1}{2}) \\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s+\frac{k-1}{2}+|l|)\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\frac{k-1}{2}-|l|) & (|l| \leq \frac{\kappa-1}{2}) \end{cases}. \tag{3.6}$$

3.3 トーラス積分 $P_\chi(f;\gamma_0)$ と中心値 $L(\Pi, \chi^{-1}, \frac{1}{2})$ との関係.

ここでは $P_\chi(f;\gamma_0)$ と中心値 $L(\Pi, \chi^{-1}, \frac{1}{2})$ の明示的関係を [Mu] に基づき記述する. 2 次拡大 $E/\mathbb{Q}$ に付随する 2 次指標を η で記す. この η により定義される L-函数を $L(\eta, s)$ とし $L_v(\eta_v, s)$ を素点 v でのその局所因子とする. D を割る素数 p に対して, [Mu, 2.4] で与えられた Hecke 作用素 $\mathcal{T}_p^{\pm}$ に関する f の固有値を $\lambda_p^{\pm}$ とし以下を導入する：

$$S_1 := \{p < \infty \mid p|D,\ p \text{ は } E \text{ で惰性}\},$$

$$S_2^{\pm} := \{p < \infty \mid p|D,\ p \text{ は } E \text{ で分岐},\ \chi_p(\varpi_p)\lambda_p^{+} = \pm 1\}.$$

ここに $\varpi_p E_p$ の素元を表していることを思い出す (補題 2.1 参照). そして和集合 $S_1 \cup S_2^+ \cup S_2^-$ が $\delta(D) := \{p < \infty \mid p|D\}$ と一致することを注意しておく. 更に $A(\chi) := \prod_{p<\infty} p^{i_p(\chi)}$ とおく.

楕円保型形式 f の Petersson 内積

$$\langle f, f\rangle := \int_{Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q})GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} |f(g)|^2 dg$$

を導入する. ここに Z は GL_2 の中心を記す. 命題 2.1 にある χ に関する条件 $(*)$ の下, [Mu, Theorem 1.1] の結果を定式化を修正して以下のように引用できる.

命題 3.4.

$$\frac{|P_\chi(f;\gamma_0)|^2}{\langle f, f\rangle} = C(f,\chi)L(\Pi,\chi^{-1},\frac{1}{2}),$$

を得る. ここに

$$C(f,\chi) := \begin{cases} \frac{2^{|\delta(D)|-2}|d_\xi|\prod_{p|A(\chi)} L_p(\eta_p,1)^2}{D^{\frac{3}{2}}A(\chi)L(\pi(f),\mathrm{Ad},1)} & (S_1 = S_2^+ = \emptyset), \\ 0 & (\text{それ以外のとき}). \end{cases}$$

3.4 トーラス積分 $P_\chi(f';\gamma_0')$ と中心値 $L(\Pi',\chi^{-1},\frac{1}{2})$ との関係.

次に $||P_\chi(f';\gamma_0')||^2$ と $L(\Pi',\chi^{-1},\frac{1}{2})$ の明示的関係を記述する. 公式を記述するべく必要な記号を導入する. 記号 r_p により拡大体 $E/\mathbb{Q}$ の p における分岐指数とする, 即ち $r_p := \begin{cases} 1 & (p \text{ が } E \text{ で不分岐}) \\ 2 & (p \text{ が } E \text{ で分岐}) \end{cases}$ とする. 更に

$$\langle f', f'\rangle := \int_{Z'(\mathbb{A}_\mathbb{Q})B^\times\backslash B^\times_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}} (f'(b), f'(b))_\kappa db$$

とする. ここに Z' を $B^\times$ の中心とし, $(*,*)_\kappa$ は V_κ の内積を表す. 表現 π''_∞ の内積 $\langle *,*\rangle_\infty$ として以下を選ぶ.

$$\langle h_\infty, h'_\infty\rangle_\infty := \int_{\mathbb{H}^1} (h_\infty(u), h'_\infty(u))_\kappa du \quad (h_\infty,\ h'_\infty \in \pi''_\infty \simeq V_\kappa).$$

ここで du は $\mathbb{H}^1$ の不変測度で $\mathrm{vol}(\mathbb{H}^1) = 1$ という正規化を持つとする.

ベクトル $v_{\kappa,\xi}$ を V_κ の $\sigma_\kappa(\mathbb{R}(\xi)^\times)$-作用に関する最高ウェイトベクトルとし, $v^*_{\kappa,\xi} \in V_\kappa$ を内積 $\langle *,*\rangle_\infty$ に関する $v_{\kappa,\xi}$ の双対ベクトルとする. そして $b_\infty \in B^\times_\infty$ に対して $f'_{\infty,\kappa}(b_\infty) := \langle f'_\infty(b_\infty), v^*_{\kappa,\xi}\rangle_\infty v_{\kappa,\xi}$ とおく. 更にリーマンゼータ函数 $\zeta(s) = \prod_{v\leq\infty}\zeta_v(s)$ を与える. ここにそれぞれの素点 v において $\zeta_v(s)$ は $\zeta(s)$ の局所因子を表す. 命題 2.1 の χ に関する条件 $(*)$ の下, 次が成立する:

命題 3.5.

$$\frac{||P_\chi(f';\gamma_0')||^2}{\langle f',f'\rangle}=\begin{cases}C(f',\chi)L(\Pi',\chi^{-1},\frac{1}{2}) & (d_B\text{ を割り }E\text{ で分岐する素数 }p\text{ に対して }\pi''_p|_{E_p^\times}=\chi_p),\\ 0 & (\text{それ以外のとき}).\end{cases}$$

ここに

$$C(f',\chi):=\frac{\sqrt{|d_\xi|}(\kappa+1)}{4A(\chi)L(\pi(\mathrm{JL}(f')),\mathrm{Ad},1)}\prod_{p|A(\chi)}L_p(\eta_p,1)^2\cdot\prod_{p|d_B}r_pp^{-1}\cdot\frac{\langle f'_{\infty,\kappa},f'_{\infty,\kappa}\rangle_\infty}{\langle f'_\infty,f'_\infty\rangle_\infty}.$$

証明方法は Waldspurger[Wa-2, Proposition 7] が与えた $C(f',\chi)$ に関する公式を具体的に計算するという手法である．より詳しく説明すると，Waldspurger は $C(f',\chi)=\prod_{v\le\infty}C_v$ という形の公式を与えており，各局所定数 C_v を局所 L-函数の商とある局所積分の積として与えている．局所 L-函数の商は補題 3.1, 補題 3.2, 補題 3.3 を使えば計算できる．局所積分の計算は Macdonald の帯球函数の明示公式 ([Ma Chap.V, §3, (3.4)] 参照) を応用することで具体的に計算できる．

Remark 3.6. 命題 3.4, 命題 3.5 は本質的に新しい結果ではない．同様の研究は多数あるが，例えば Martin-Whitehouse[Mar-Wh] で実質的に得られている．しかし命題 3.5 の証明方法はこれまで知られている結果のものとは違うと思われる．そして [Mar-Wh] は適用する保型形式について「無限素点で最高ウェイトベクトルである」という制約があり，厳密には我々の f' に直接適用できるとは限らないことを注意しておく．

4 L-函数の中心値との関係 ($GSp(1,1)$, $GSp(2)$ の場合)

4.1 主定理 (First form)

定理 2.2, 命題 3.4, 命題 3.5 により以下の定理が成立する:

定理 4.1. 定理 *2.2* と同じ仮定のもと次が成立する*:*

$$\frac{||\mathcal{L}(f,f')^\chi_\xi(g_0)||^2}{\langle f,f\rangle\langle f',f'\rangle}=C(f,f',\xi,\chi)L(\Pi,\chi^{-1},\frac{1}{2})L(\Pi',\chi^{-1},\frac{1}{2}).$$

ここに d_B を割り E で分岐する素数 p に対して $\pi''_p|_{E_p^\times}=\chi_p$ が成り立ち且つ $S_1=S_2^+=\emptyset$ であるとき，$C(f,f',\xi,\chi)=$

$$\frac{2^{2\kappa+|\delta(D)|-6}(\kappa+1)n(\xi)^{\frac{\kappa}{2}}|d_\xi|^{\frac{3}{2}}\mathbf{w}(E)^2}{\mathbf{h}(E)^2A(\chi)^4D^{\frac{3}{2}}L(\pi(f),\mathrm{Ad},1)L(\pi(\mathrm{JL}(f')),\mathrm{Ad},1)}\prod_{p\nmid d_B}p^{4\mu_p}(1-\delta(i_p(\chi)>0)e_p(E)p^{-1})^{-2}$$

$$\times\prod_{p|d_B}r_pp^{-1}\prod_{p|D}(p+1)^{-2}\cdot e^{-8\pi\sqrt{n(\xi)}}\cdot\frac{\langle f'_{\infty,\kappa},f'_{\infty,\kappa}\rangle_\infty}{\langle f'_\infty,f'_\infty\rangle_\infty}.$$

そうでないときは $C(f,f',\xi,\chi)=0$.

4.2 主定理 (Second form)

ここでは $\mathcal{L}(f,f')$ と χ に付随する **Rankin-Selberg 型** L**-函数**を導入し, $D=1$ の時にその $\frac{1}{2}$ での値 (中心値) と $||\mathcal{L}(f,f')^{\chi}_{\xi}(g_0)||^2$ との明示的関係を与える.

第 2.1 節で見たように $\mathcal{L}(f,f')\in\mathcal{S}_\kappa$ であるが, その Rankin-Selberg 型 L-函数を導入する前に, $\mathcal{S}_\kappa$ に属する Hecke 同時固有形式 F に付随するスピノール L-函数を定義する. そのためにまず [Mu-Na-1, §5.1] において, $p\not| d_B$ のとき, 3つの Hecke 作用素 $\mathcal{T}_p^i$ $(0\le i\le 2)$ を導入したことを思い出す. そして Λ_p^i $(0\le i\le 2)$ を $\mathcal{T}_p^i$ に対する F の Hecke 固有値とする. このとき

$$Q_{F,p}(t):=1-p^{-\frac{3}{2}}\Lambda_p^1 t+p^{-2}(\Lambda_p^2+p^2+1)t^2-p^{-\frac{3}{2}}\Lambda_p^1 t^3+t^4$$

とする. これについて $Q_{F,p}(p^{-s})^{-1}$ は次数 2 のシンプレクティック群

$$GSp(2):=\left\{g\in GL(4)\;\middle|\; {}^t g\begin{pmatrix}0_2 & 1_2\\ -1_2 & 0_2\end{pmatrix}g=\nu(g)\begin{pmatrix}0_2 & 1_2\\ -1_2 & 0_2\end{pmatrix},\ \nu(g)\in\mathbb{G}_m\right\}$$

の $\mathbb{Q}_p$ 有理点の成す群の不分岐主系列表現に対する局所スピノール L-函数であることを注意しておく.

他方, [Mu-Na-1, §5.2] において, d_B を割る素数 p に対して Hecke 作用素 $\mathcal{T}_p^i$ $(0\le i\le 1)$ を導入した. そして ${\Lambda'}_p^i$ を $\mathcal{T}_p^i$ に対する F の Hecke 固有値とする. このとき

$$Q_{F,p}(t):=(1-p^{-\frac{3}{2}}({\Lambda'}_p^1-(p^{A_p}-1){\Lambda'}_p^0)t+t^2)(1-{\Lambda'}_p^0 p^{-\frac{1}{2}}t)$$

を導入する. ここに $A_p:=\begin{cases}1 & (p\not| D)\\ 2 & (p|D)\end{cases}$. 上記の定義は菅野 [Su, (3.4)] による.

以上の準備の下, F の (大域的) スピノール L-函数 $L(F,\mathrm{spin},s)$ は

$$L(F,\mathrm{spin},s):=\prod_{v\le\infty}L_v(F,\mathrm{spin},s),$$

により定義する. ここに各素点の局所スピノール L-函数が以下で与えられる:

$$L_v(F,\mathrm{spin},s):=\begin{cases}Q_{F,p}(p^{-s})^{-1} & (v=p<\infty),\\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s+\frac{\kappa-1}{2})\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\frac{\kappa+1}{2}) & (v=\infty).\end{cases}$$

これは [Mu-Na-1, §5.3] で与えた定義を修正したものである. すると $D=1$ のとき補題 3.1, 補題 3.2, 補題 3.3 を考慮に入れると, 以前に得た荒川リフトのスピノール L-函数についての結果 [Mu-Na-1, Corollary 5.3] を以下のように言い直せることが分かる.

命題 4.2. $D=1$ とする. 荒川リフト $\mathcal{L}(f,f')$ のスピノール L-函数は以下のように分解する.

$$L(\mathcal{L}(f,f'),\mathrm{spin},s)=L(\pi(f),s)L(\pi(\mathrm{JL}(f')),s).$$

2つの L-函数 $L(\pi(f),s)$ と $L(\pi(\mathrm{JL}(f')),s)$ は, よく知られているように解析接続と函数等式を満たすので, 当然それは $L(\mathcal{L}(f,f'),\mathrm{spin},s)$ についても同様に成り立つ.

ここで Hecke 同時固有的な $F\in\mathcal{S}_\kappa$ と Hecke 指標 χ に付随する Rankin-Selberg 型 L-函数

$$L(F,\chi^{-1},s):=\prod_{v\le\infty}L_v(F,\chi^{-1},s)$$

を導入する. 各局所 L-函数 $L_v(F,\chi^{-1},s)$ は以下の通りである.

$$L_v(F,\chi^{-1},s):=\begin{cases}Q_{F,p}(\alpha_p^\chi p^{-s})^{-1}Q_{F,p}(\beta_p^\chi p^{-s})^{-1} & (\chi \text{ は } v=p<\infty \text{ で不分岐}),\\ 1 & (\chi \text{ は } v=p<\infty \text{ で分岐}),\\ \Gamma_{\mathbb{C}}(s+\kappa-\frac{1}{2})\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\frac{1}{2})\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\kappa+\frac{1}{2})\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\frac{1}{2}) & (v=\infty).\end{cases}$$

ここに

$$(\alpha_v^\chi,\beta_v^\chi):=\begin{cases}(\chi_p(\varpi_{p,1})^{-1},\chi_p(\varpi_{p,2})^{-1}) & (v=p \text{ が } E \text{ で分裂}),\\ (\chi_p(p)^{-1},-\chi_p(p)^{-1})=(1,-1) & (v=p \text{ が } E \text{ で惰性}),\\ (\chi_p(\varpi_p)^{-1},0) & (v=p \text{ が } E \text{ で分岐}).\end{cases}$$

($\varpi_{p,1}$, $\varpi_{p,2}$ と ϖ_p は補題 3.1 で与えられた E の素元を表すことを思い出す.)

命題 4.3. $D=1$ のとき, 以下が成立する.

$$L(\mathcal{L}(f,f'),\chi^{-1},s)=L(\Pi,\chi^{-1},s)L(\Pi',\chi^{-1},s).$$

これは全複素平面に解析接続され函数等式

$$L(\mathcal{L}(f,f'),\chi^{-1},s)=\epsilon(\Pi,\chi^{-1})\epsilon(\Pi',\chi^{-1})L(\mathcal{L}(f,f'),\chi^{-1},1-s),$$

を満たす. ここに $\epsilon(\Pi,\chi^{-1})$ と $\epsilon(\Pi,\chi^{-1})$ は, それぞれ $L(\Pi,\chi^{-1},s)$ と $L(\Pi',\chi^{-1},s)$ に対する ϵ-因子を表す.

最初の L-函数の分解は命題 4.2 と補題 3.1, 補題 3.2, 補題 3.3 からの帰結である. 後半の主張は [J-1, Corollary 19.15] による.

命題 3.4, 命題 3.5, 命題 4.3 により, この L-函数の中心値 $L(\mathcal{L}(f,f'),\chi^{-1},\frac{1}{2})$ は $D=1$ のとき意味を持つ. $D=1$ のとき定理 4.1 は, 以下のように言い換えられる.

定理 4.4. $D=1$ とせよ. 定理 *2.2* と同じ仮定の下, 次が成立する.

$$\frac{||\mathcal{L}(f,f')_\xi^\chi(g_0)||^2}{\langle f,f\rangle\langle f',f'\rangle}=C(f,f',\xi,\chi)L(\mathcal{L}(f,f'),\chi^{-1},\frac{1}{2}).$$

4.3 主定理 (Third form)

代数群 $G = GSp(1,1)$ は次数 2 のシンプレクティック群 $GSp(2)$ の内部形式であることに注意しよう. Langlands 函手性 ([Lg] 参照) によると, Hecke 同時固有形式 $F \in \mathcal{S}_\kappa$ に対する保型 L-函数は $GSp(2)_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}$ の保型 L-函数であると期待できる.

岡崎武生氏は最近 [O] において, テータリフトによる $GSp(2)_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}$ 上のカスプ形式の構成を与えている. より正確には Harris-Kudla の定式化 ([H-K] 参照) に従い, $GL(2)_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}} \times GL(2)_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}$ から $GSp(2)_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}$ へのテータリフトを考えている ($GO(2,2)_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}$ から $GSp(2)_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}$ へのテータリフトとも解釈できる). 以下, それを $\mathcal{L}_{GSp(2)}$ で記す. 岡崎氏はテータリフト $\mathcal{L}_{GSp(2)}$ を与えるテータ核のテスト函数を具体的に指定することで, $GSp(2)$ のカスプ形式の多くの具体的構成を与えている. ここでは彼の構成したテータリフトのうち以下を取り上げる:

定理 4.5 (岡崎). *2 つの 0 でない原始的カスプ形式 $(f_1, f_2) \in S_{\kappa_1}(N_1) \times S_{\kappa_2}(N_2)$ に対し, テータリフト $\mathcal{L}_{GSp(2)}(f_1, f_2)$ は, そのテータ核を適切に指定すると, 0 でない $GSp(2)_{\mathbb{A}_\mathbb{Q}}$ 上のカスプ形式で以下の性質を満たすようにできる:*

1. *レベル N_1N_2 のパラモジュラー形式である, 即ち, $N := N_1N_2$ を割る素数 p において, 以下のパラモジュラー群に関して右不変である:*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & N^{-1}\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ N\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ N\mathbb{Z}_p & N\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & N\mathbb{Z}_p \\ N\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix} \cap GSp(2)_{\mathbb{Q}_p},$$

2. *無限素点において, $\mathcal{L}_{GSp(2)}(f_1, f_2)$ は最高ウェイト*

$$(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, -\frac{|\kappa_1 - \kappa_2|}{2})$$

を持つ.

更に, $\mathcal{L}_{GSp(2)}(f_1, f_2)$ の Novodvorsky([No] 参照) の意味での大域的スピノール L-函数は以下のように分解する:

$$L(\pi(f_1), s)L(\pi(f_2), s).$$

テータリフト $\mathcal{L}_{GSp(2)}(f_1, f_2)$ と Hecke 指標 χ に対しても, $GSp(1,1)$ の場合と同様に Rankin-Selberg 型 L-函数 $L(\mathcal{L}_{GSp(2)}(f_1, f_2), \chi^{-1}, s)$ が定義できる. Hecke 固有形式 $f' \in \mathcal{A}_\kappa$ に対して $\mathrm{JL}(f')$ は f' の Jacquet-Langlands リフトを表すことを思い出し (§3.1 参照), $\mathrm{JL}(f')$ は原始的であることを思い出す ([E-1], [E-2], [Sh, §6] 参照). 上の定理と命題 4.2 及び命題 4.3 より以下が導かれる:

命題 4.6. 2つの *Hecke* 同時固有形式 $(f,f')\in S_\kappa(1)\times\mathcal{A}_\kappa$ に対して以下が成り立つ.

$$L(\mathcal{L}(f,f'),\mathrm{spin},s)=L(\mathcal{L}_{GSp(2)}(f,\mathrm{JL}(f')),\mathrm{spin},s),$$
$$L(\mathcal{L}(f,f'),\chi^{-1},s)=L(\mathcal{L}_{GSp(2)}(f,\mathrm{JL}(f')),\chi^{-1},s).$$

よって定理 4.4 は以下のように言い換えられる:

定理 4.7. $D=1$ として定理 *2.2* と同じ仮定を満たすとする. このとき以下を得る*:*

$$\frac{||\mathcal{L}(f,f')^\chi_\xi(g_0)||^2}{\langle f,f\rangle\langle f',f'\rangle}=C(f,f',\xi,\chi)L(\mathcal{L}_{GSp(2)}(f,\mathrm{JL}(f')),\chi^{-1},\frac{1}{2}).$$

4.4 L-函数の中心値の正値性

主定理の応用として, これまで扱ってきた Rankin-Selberg 型 L-函数の中で, その中心値が正になるものの存在性が言える. ここでは定符号四元数環 B とその極大整環 $\mathfrak{O}$ を以下のように指定する.

$$B=\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\cdot i+\mathbb{Q}\cdot j+\mathbb{Q}\cdot k\quad(i^2=j^2=-1,\ ij=-ji=k),$$
$$\mathfrak{O}=\mathbb{Z}\cdot\frac{1+i+j+k}{2}+\mathbb{Z}\cdot i+\mathbb{Z}\cdot j+\mathbb{Z}\cdot k.$$

このとき B の判別式は $d_B=2$ であることを注意する. 我々は [Mu-Na-2, §14] において以下を得ていることを思い出す:

命題 4.8. 純四元数 ξ として $\xi=i/2$ を取り, *Hecke* 指標 χ はすべての有限素点で不分岐, つまりすべての素数 p において $i_p(\chi)=0$ であるとする.

更に $D\in\{1,2\}$ とする. $D=1$ の時は $\kappa\geq 12$ で $4|\kappa$ として, $D=2$ の時は $\kappa\geq 8$ で $8|\kappa$ とする. このとき, そのような各 D 及び κ に対して, *Hecke* 同時固有形式 $(f,f')\in S_\kappa(D)\times\mathcal{A}_\kappa$ で

$$P_\chi(f,\gamma_0)P_\chi(f',\gamma_0')\neq 0\ (\Rightarrow\mathcal{L}(f,f')^\chi_\xi\not\equiv 0)$$

を満たすのもが存在する*.*

今 $D=1$ として χ はすべての有限素点で不分岐とする. 命題 3.4, 命題 3.5, 命題 4.8 から次の定理を得る.

定理 4.9. 命題 *4.8* と同じ条件の下, 以下を満たす *Hecke* 同時固有形式の組 $(f,f')\in S_\kappa(1)\times\mathcal{A}_\kappa$ が存在する*:*

$$L(\Pi,\chi^{-1},\frac{1}{2})>0,\quad L(\Pi',\chi^{-1},\frac{1}{2})>0.$$

更にこの定理と命題 4.3 及び命題 4.6 からの帰結として次の定理が導かれる:

定理 4.10. 命題 *4.8* と同じ仮定をする. このとき *Hecke* 同時固有形式 $(f,f')\in S_\kappa(1)\times\mathcal{A}_\kappa$ で以下を満たすものが存在する：

$$L(\mathcal{L}(f,f'),\chi^{-1},\frac{1}{2})=L(\mathcal{L}_{GSp(2)}(f,\mathrm{JL}(f')),\chi^{-1},\frac{1}{2})>0.$$

参考文献

[B] S. Böcherer, Bemerkungen über die Dirichletreihen von Koecher und Maass, Math. Gottingensis, Schriftenr. d. Sonderforschungsbereichs Geom. Anal. 68, (1986).

[E-1] M. Eichler, Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen, J. Reine Angew. Math., 195, (1955) 156-171.

[E-2] M. Eichler, Quadratische Formen und Modulfunktionen, Acta Arith., 4 (1958) 217-239.

[F-Mar] M. Furusawa and K. Martin, On central critical values of the degree four L-functions for GSp(4): the fundamental lemma II, to appear in Amer. J. Math.

[F-S] M. Furusawa and J. Shalika, On central critical values of the degree four L-functions for $GSp(4)$: The fundamental lemma, Mem. Amer. Math. Soc., vol.164, No.782 (2003).

[Ge-J] S. Gelbart and H. Jacquet, A relation between automorphic representations of $GL(2)$ and $GL(3)$, Ann. Sci. École Normale Sup. 11, (1978) 471–542.

[Gr-W] B. Gross and N. Wallach, On quaternionic discrete series representations, and their continuations, J. Reine. Angew. Math., 481 (1996), 73-123.

[Gu] J. Guo, On the positivity of the central critical values of automorphic L-functions for $GL(2)$, Duke Math. J., 83 (1996) 157-190.

[H-K] M. Harris and S. Kudla, Arithmetic automorphic forms for the non-holomorphic discrete series of $GSp(2)$, Duke Math. J., 66 (1992) 59-121.

[I] T. Ibukiyama, Paramodular forms and compact twist, Automorphic forms on $GSp(4)$, Proceedings of the 9th Autumn workshop on number theory, (2006) 37-48.

[J-1] H. Jacquet, Automorphic forms on $GL(2)$, Part II, Lecture Notes in Math., 278, Springer-Verlag, (1972).

[J-2] H. Jacquet, On the nonvanishing of some L-functions, Proc. Indian Acad. Sci., 97 (1987), 117-155.

[J-3] H. Jacquet, Sur un résultat de Waldspurger. II, Compositio Math. 63 no. 3, (1987) 315–389.

[J-C] H. Jacquet and Nan Chen, Positivity of quadratic base change L-functions, Bull. Soc. Math. France, 129 (2001) 33–90.

[J-L] H. Jacquet and R. Langlands, Automorphic forms on $GL(2)$, Lecture Notes in Math., 114, Springer-Verlag, (1970).

[Ko-Z] W. Kohnen and D. Zagier, Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip, Invent. Math., 64 (1981), 175-198.

[Lg] R. Langlands, Problems in the theory of automorphic forms, Lecture Notes in Math., 170, Springer-Verlag, (1970) 18-86.

[Lp] E. Lapid, On the nonnegativity of Rankin-Selberg L-functions at the center of symmetry, Internat. Math. Res. Notices, (2003) no.2, 65-75.

[Ma] I. Macdonald, Spherical functions and Hall polynomials, Oxford University Press, (1979).

[Mar-Wh] K. Martin and D. Whitehouse, Central L-values and toric periods for $GL(2)$, Internat. Math. Res. Not., (2009) no.1, 141-191.

[Mi] T. Miyake, Modular forms, Springer-Verlag, (1989).

[Mu] A. Murase, CM-values and central L-values of elliptic modular forms (II), Preprints of MPIM, MPIM2008-30.

[Mu-Na-1] A. Murase and H. Narita, Commutation relations of Hecke operators for Arakawa lifting, Tohoku Math. J., 60 (2008) 227–251.

[Mu-Na-2] A. Murase and H. Narita, Fourier expansion of Arakawa lifting I: An explicit formula and examples of non-vanishing lifts, to appear in Israel Journal of Mathematics.

[No] M. Novodvorsky, Automorphic L-functions for symplectic group $GSp(4)$, Proc. Symp. Pure Math., 33 (2) (1979), 87-95.

[O] T. Okazaki, Paramodular forms on $GSp(2, \mathbb{A})$, preprint.

[Sh] H. Shimizu, Theta series and automorphic forms on GL_2, J. Math. Soc. Japan, 24 (1972) 638–683.

[Su] T. Sugano, On holomorphic cusp forms on quaternion unitary groups of degree 2, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 31 (1985) 521–568.

[Wa-1] J. L. Waldspurger, Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier, J. Math. Pures Appl., 60 (1981), 375-484.

[Wa-2] J. Waldspurger, Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symmétrie, Compos. Math., 54 (1985) 173–242.

成田宏秋: 〒 860-8555 熊本市黒髪２丁目３９－１, 熊本大学大学院自然科学研究科
E-mail address: narita@sci.kumamoto-u.ac.jp
村瀬篤: 〒 603-8555 京都市北区上賀茂本山, 京都産業大学理学部数理科学科
E-mail address: murase@cc.kyoto-su.ac.jp