ON ARITHMETIC AND GEOMETRY OF ELLIPTIC $K3$ SURFACES IN POSITIVE CHARACERISTIC (正標数の楕円 $K3$ 曲面の数論と幾何)

伊藤 浩行 (HIROYUKI ITO)

2010 年 *12* 月 *1* 日

1. 序

正標数の代数幾何学においては標数 0 と異なり様々な特異な現象が起こる。しばしばそのような現象は病理的現象と呼ばれ正標数、特に低標数代数幾何学の主要な研究対象となる。

本稿では、標数 $p > 0$ の体上定義された楕円 $K3$ 曲面が p^n ねじれ切断 (以下では単に p^n ねじれと述べる) を持つ場合についてその分類を行い具体的記述を与える。正標数の $K3$ 曲面には未解決な種々の興味深い予想があるが、本研究では p^n ねじれを持つ場合に Artin-塩田予想が成立することが系として得られる。また、その過程において Weierstraß 方程式から形式的 Brauer 群の高さを計算し、超特異の場合は Artin 不変量と Mordell-Weil 格子を決定するという作業を行ったが、ここで用いた手法は具体的に計算を必要とする場合に非常に有用である。

本研究で得られた結果は Schweizer や Dolgachev-Keum により得られていた結果をより改善するものであり、証明手法においても井草モジュラー曲線とその上の普遍属の構造を完全に決定し、野性的 p 巡回作用による商についても精密な結果を得ている。さらに、超特異 $k3$ 曲面の場合に与えた完全な分類によると、これらは有理特異点の変形から得られる楕円曲面の族としてそのモジュライが記述されるという驚異深い関連が見いだされている。これは Mordell-Weil 格子の "退化理論" と関連して興味深い結果である。

本稿においては概略を示すに留めるので、細かい証明等は論文 [I-L10] 参照のこと。尚、本研究は Christian Liedtke との共同研究である。

2. 準備

本稿を通して体 k で標数が $p > 0$ である代数閉体を表す。また、k 上定義された**楕円曲面** $f : X \longrightarrow C$ とは、非特異射影曲面 X から非特異射影曲線 C への全射 f であり、ファイバーが非特異楕円曲線で相対的極小であるものをいう。更に f は常に切断 (section)O を持つものとする。

楕円曲面 $f : X \longrightarrow C$ に対して Mordell-Weil 群を次のように定める。

$$\mathrm{MW}(X/C) := \{f \text{ の切断 }\}$$

このとき $\mathrm{MW}(X/C)$ は有限生成アーベル群となる、従って $\mathrm{MW}(X/C) \cong \mathbb{Z}^{\oplus r} \oplus$ ねじれ部分群となることは基本的事実である (Mordell-Weil の定理)。

また $NS(X)$ で X の Néron-Severi 群を表すと、よく知られている次の同型により Mordell-Weil 群の構造が楕円曲面のファイブレーションを調べると良いことがわかる。

$$\mathrm{MW}(X/C) \cong NS(X)/T$$

ここで T は O 切断、一般ファイバー、垂直方向の因子で O 切断と交わらないもの達によって生成される格子である。

次の塩田による Mordell-Weil 格子の定義は基本的である ([Sh90])。

以下の 2 条件を満たすような群準同型 $\varphi : \mathrm{MW}(X/C) \longrightarrow T^{\perp} \otimes \mathbb{Q} \subset NS(X) \otimes \mathbb{Q}$ が存在する。

(1) 任意の $P \in \mathrm{MW}(X/C)$ に対して $\varphi(P) \equiv (P) \mod T_{\mathbb{Q}}$ となる
(2) $Ker\varphi = \mathrm{MW}(X/C)_{tor}$

このとき、この写像 φ を用いて $P, Q \in \mathrm{MW}(X/C)$ に対する双線形形式ペアリング $\langle P, Q \rangle$ を次で定義する。

$$\langle P, Q \rangle := -(\varphi(P), \varphi(Q)).$$

これにより $(\mathrm{MW}(X/C)/(tor), \langle\ ,\ \rangle)$ は正定値格子となり、これを X/C の **Mordell-Weil 格子**と呼ぶ。更に Mordell-Weil 格子 $(\mathrm{MW}(X/C)/(tor), \langle\ ,\ \rangle)$ は、O 切断が交わる垂直因子のみと交わる切断達からなる部分群 $(\mathrm{MW}(X/C)^{\circ}, \langle\ ,\ \rangle)$ を持ち、双線形形式をこの部分格子に制限することによりこの群は偶かつ整である正定値格子となる。**狭い (narrow)Mordell-Weil 格子**と呼ぶ。

特に有理楕円曲面の Mordell-Weil 格子に関して次は基本的かつ重要である。

定理 ([Sh90]). $X/\mathbb{P}^1$ を有理楕円曲面とするとき次の図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{MW}(X/\mathbb{P}^1)/(tor) & \cong & \overline{(T^{\perp})^{*}} & \subset & \langle O, F \rangle^{\perp} \cong E_8 \\
\cup & & \cup & & \\
\mathrm{MW}(X/\mathbb{P}^1)^{\circ} & \cong & \overline{(T^{\perp})} & &
\end{array}$$

従って有理楕円曲面においては全てが E_8 型格子という大きな枠の内部において物事が決まることがわかる。

3. 主定理 1 とその証明

標数 p の代数幾何学においては、対象に関連する (付随する)(方程式の) 次数、(群の) 位数などが丁度標数の p で割りきれる場合が典型的に病理的現象を生む原因となり、その幾何学が最も興味深いものとなる。

このような観点から以下では p^n ねじれを持つ楕円 $K3$ 曲面を扱い、可能ならばこれらを全て分類し更にはそのモジュライの幾何を考察したい。

主結果を述べる前に本報告に深く関連する過去の研究に関して言及する。

- (A. Schweizer[Schw05]) 非定数楕円曲面の p ねじれに関して $p^n > 11$ ならば基底曲線 C の種数、その関数体 $k(C)$ の最小被覆葉数 (gonality)、p 階数に制限が付くことを示した。また、$p^n \leq 11$ の場合に $K3$ 曲面を含め多くの例を構成した。
- (Dolgachev-Keum[D-K01]) 正標数 $K3$ 曲面のシンプレクティック自己同型に関する研究より次を得た。$p > 11$ であればシンプレクティック自己同型の位数は標数 p と互いに素であり、$p \leq 11$ であるとき、位数が標数 p で割り切れる $K3$ 曲面の例を構成した。
- (Dolgache-Keum [D-K09]) 楕円 $K3$ 曲面が p ねじれを持つとき $p \leq 7$ である。

次に述べる我々の結果は若干であるがこれらを改善するとともに、次節以降で $p^n \geq 3$ の場合の分類と具体的構成を与える。

主定理 1. 標数 p において p^n ねじれを持つ楕円 $K3$ 曲面は $p^n \leq 8$ の場合のみ存在する。
更に、楕円ファイブレーションの j 関数が定数であるとき $p^n = 2$ である。

簡単に証明の概略を与える。井草関手により定義されるモジュライ問題を考える。

関手 $[\mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}]$ は $\mathbb{F}_p$ 上のスキーム S に対して、S 上の通常 (ordinary) 楕円曲線 E と n 回の Frobenius による引き戻し $(F^n)^*(E)$ 上の p^n ねじれ切断の生成元との組の集合を対応させるものである。

$$[\mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}] : (Sch/\mathbb{F}_p) \longrightarrow (Sets)$$

このとき井草による次の結果は基本的かつ重要である。

定理 (井草 [Ig68]). (1) $p^n \geq 3$ であるとき $[\mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}]$ は非特異アフィン代数曲線 *(*$=: \mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}$ と書く*)* によって表現される。従って普遍族 $\mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}$ が存在する。
(2) $\mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}$ の正規コンパクト化の幾何 $\overline{\mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}}$ について種々の性質がよくわかる。

即ち、$\overline{\mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}}$ 上の普遍族 $\mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}$ の Néron モデルを $\bar{\mathcal{E}}$ と書くとき次の図式が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}
 & X = Y^{(p^n)} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \bar{\mathcal{E}}^{(p^n)} \arrow[dl] \arrow[dd] & \\
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dd] & & \bar{\mathcal{E}} \arrow[dd] & & \\
 & \mathbb{P}^1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dl, "F^n"] & & \overline{\mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}} \arrow[dl, "F^n"] & \\
\mathbb{P}^1 \arrow[rr, "\varphi"] & & \overline{\mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}} \arrow[rr, "j"] & & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

ここで、φ は分類射 (classifying morphism) であり、この写像の次数と分岐状況を調べることにより p^n ねじれを持つ楕円曲面を分類する。また、j 射に関してもよくわかっている。

例 1. $n = 1$ で $p \geq 3$ のとき、

- $j : \overline{\mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は Galois 群が $\mathbb{Z}/\frac{p-1}{2}\mathbb{Z}$ であるような Galois 被覆である。

- j 射は超特異 j 値上で完全分岐し、$j = \infty$ 上で完全分解する、即ち $j = \infty$ 上には $(p-1)/2$ 個の尖点 (cusp) がのっている。

更に (Liedtke-Schröer[L-S08]) によって普遍族 (の Néron モデル)$\bar{\mathcal{E}}$ の超特異点や尖点上の退化ファイバーに関しても調べられている。

例 2. $\overline{\mathrm{Ig}(11)^{\mathrm{ord}}}$ を例に見る。種数公式より $\overline{\mathrm{Ig}(11)^{\mathrm{ord}}} \cong \mathbb{P}^1$ であり、$\overline{\mathrm{Ig}(11)^{\mathrm{ord}}}$ は $5(=\frac{11-1}{2})$ 個の尖点を持つ。従って、この 11 ねじれを持つファイブレーション $\bar{\mathcal{E}}^{(p^n)}/\overline{\mathrm{Ig}(11)^{\mathrm{ord}}}$ は少なくとも 5 本の乗法的還元 I_n を持ち、この n が全て 11 で割り切れなければいけないことから少なくとも Picard 数 ρ は $5 \times (p-1) = 50$ 以上となり ($\bar{\mathcal{E}}^{(p^n)}/\overline{\mathrm{Ig}(11)^{\mathrm{ord}}}$ が既に)$K3$ ではないことがわかる。

主定理に関して、まず j 不変量が定数であるときを考える。p^n ねじれは O 切断と異なるので生成ファイバーは通常である。よって、通常軌跡 $U \subseteq \mathbb{P}^1$ は開かつ稠密である。一方、$p^n \geq 3$ のときは井草モジュライ問題が表現可能なので j 不変量が定数であれば分類射 $\varphi : U \longrightarrow \mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}$ は定数射となり、結局 $X|U \longrightarrow U$ は積の形になり $K3$ 曲面に双有理ではない。よって j 不変量が定数であれば $p^n = 2$ となる。

次に j 不変量が非定数であるときを考える。$U \subseteq \mathbb{P}^1$ の通常軌跡は開かつ稠密であるので、$p^n \geq 3$ とすると井草モジュライ問題が表現可能出ることより分類射 $\varphi : U \longrightarrow \mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}$ は支配的、従って $\mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}$ は有理曲線となる。$\mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}$ が有理的となるのは $p^n \leq 11$ であることがわかっているので (Igusa[Ig68])、あとは $p^n = 11$ と $p^n = 9$ の場合を除外すると良い。$p^n = 11$ の場合は上で見た通りであるが $p^n = 9$ の場合についても同様に出来るので省略する。

4. 主定理 2 と 3

主定理 2 と 3 を述べるために正標数の $K3$ 曲面に関する重要な概念である形式的 Brauer 群と超特異 $K3$ 曲面、通常 $K3$ 曲面について定義を述べる。

$K3$ 曲面 X に対して

剰余体が k である有限 Artin 局所 k 代数 A に対して

$$\widehat{\mathrm{Br}} \;:\; A \;\mapsto\; \ker\left(H^2_{\text{ét}}(X \times A, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)\right)$$

という関手は $h^2(X, \mathcal{O}_X) = 1$ 次元のスムーズ形式群により射影極限的に表現 (pro-represente) される。この形式群を X の**形式的 Brauer 群** と呼び $\widehat{\mathrm{Br}}(X)$ で表す[1]。([A-M77]、[G-K03] 参照。)

またその**高さ (height)** h は ∞ または整数値 $1 \leq h \leq 10$ をとるが (Artin [Ar74])、この h は 2 次クリスタルコホモロジー群の Newton 多角形を決定する (Illusie [Ill79])。

特に、$h = 1$ の時、即ち Newton 多角形と Hodge 多角形が一致する時、$K3$ 曲面を **通常**と呼び、$h = \infty$ の時、即ち Newton 多角形が直線であるとき、$K3$ 曲面を **Artin の意味で超特異**であると呼ぶ。([Ar74])

[1]一般に代数閉体上の非特異曲面でスムーズな Picard スキームを持つものに対して定義される。

更に、非特異な曲面 X に対してその Néron–Severi 群の階数が 2 次 Betti 数と等しいとき**塩田の意味で超特異**であると呼ぶ。

このとき次はよく知られた事実である。

- 単有理曲面は塩田の意味で超特異である。
- 塩田の意味で超特異であるならば Artin の意味で超特異である。
- 従って、単有理 $K3$ 曲面は Artin の意味で超特異である。

$K3$ 曲面について次の予想がある。

予想 (Artin-塩田予想).
- 塩田の意味で超特異であれば単有理である。([Sh74b], [Sh77a])
- Artin の意味で超特異であれば単有理である。([Ar74])
- Artin の意味で超特異であれば塩田の意味で超特異である。([Ar74])

注意 1. $K3$ 曲面が特に楕円曲面であるとき超特異性の二つの定義は一致することが知られている (Artin [Ar74])。[2]

主定理 2. *$p^n \geq 3$ と仮定する。$X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を p^n ねじれを持つ楕円 $K3$ 曲面とし、$\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \overline{\mathrm{Ig}(p)^{\mathrm{ord}}}$ をコンパクト化された分類射とする。このとき次は同値である。*

(1) X は有理楕円曲面から *Frobenius* 射による引き戻しで得られる。
(2) X は単有理曲面である。
(3) X は超特異曲面である。
(4) ファイブレーションは丁度 1 つの加法的還元を持つ。
(5) φ は $\overline{\mathrm{Ig}(p)^{\mathrm{ord}}}$ の *(*唯一の*)* 超特異点において完全分岐する。

特に我々の曲面において *Artin*-塩田予想は正しい。

主定理 3. *$p^n \geq 3$ と仮定する。$X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を p^n ねじれを持つ楕円 $K3$ 曲面とし、$\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \overline{\mathrm{Ig}(p)^{\mathrm{ord}}}$ をコンパクト化された分類射とする。このとき次は同値である。*

(1) X は $K3$ から *Frobenius* 射による引き戻しで得られる。
(2) X は単有理曲面ではない。
(3) X は通常曲面である。
(4) ファイブレーションは丁度 2 つの加法的還元を持つ。

更にこのような曲面は $p^n \leq 5$ にのみ存在する。

5. 主定理 2、3 の証明の概略

主定理 2、3 の証明は、以下に述べる 2 つの命題を用いて証明される。

命題 4. *$X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を p ねじれを持つ $K3$ 曲面とし、ファイブレーションの j 不変量は定数ではないとする。*

---

[2]標数 2 の場合には、2 つの超特異性の定義、単有利性に加え「超特異 $K3$ 曲面は有理楕円曲面からの Frobenius 射による引き戻しで得られる」という 4 つめの「同値」条件も予想されている (Artin [Ar74])。尚、この条件は他の標数では明らかに成り立たない。

このとき、ファイブレーションは少なくとも 1 つ、高々2 つ潜在的超特異還元 *(potentially supersingular reduction)* ファイバーを持つ。更に、

- もし 潜在的超特異還元ファイバーがちょうど 1 つであれば形式的 *Brauer* 群の高さは $h \geq 2$ である。
- もし 潜在的超特異還元ファイバーがちょうど 2 つであれば形式的 *Brauer* 群の高さは $h = 1$ となる。

ファイブレーションの j 不変量が定数ではないので基底曲線から $\mathbb{P}^1$ への j 写像は支配的である。従って、少なくとも 1 つ潜在的超特異還元を持つことがわかる。命題の残りの部分は以下の補題により形式的 Brauer 群の高さを Weierstraß 方程式から直接計算することにより得られる。

補題 5. 楕円 $K3$ 曲面 X は p ねじれを持つとし、*Weierstraß* 方程式が以下で与えられているとする。

$$y^2 + a_1(t)xy + a_3(t)y = x^3 + a_2(t)x^2 + a_4(t)x + a_6(t)$$

ただし、$a_i(t)$ は次数が高々$\leq 2i$ である多項式であり $a_i(t) = \sum_{j=0}^{2i} a_{ij}t^j$ とおく。

このとき形式的 *Brauer* 群の高さは以下のようにして決定できる。

- $p = 2$ のとき、 $h = 1 \iff a_{11} \neq 0$
  $h \geq 2 \iff a_{11} = 0$
  $h \geq 3 \iff a_{11} = a_{33} = 0$
  $\cdots\cdots.$
- $p = 3$ のとき, $h = 1 \iff a_{11}^2 + a_{22} \neq 0.$
- $p = 5$ のとき, $h = 1 \iff 2a_{44} \neq 0.$
- $p = 7$ のとき $\cdots\cdots$ *(省略)*

補題について $p = 2$ の場合は（Artin '74) による。他の場合は同様に計算を行うが、その際 p ねじれの存在より Hasse 不変量に制約が付くため上述のような条件を得ることになる。詳しくは論文参照のこと。

命題 6. $X \longrightarrow B$ を p ねじれを持つ楕円ファイブレーションとし、$p \geq 3$ とする。このとき次が成り立つ。

(1) 全ての加法的ファイバーは潜在的超特異還元を持つ。
(2) 全ての潜在的超特異還元ファイバーは加法的である。

命題の証明であるが、加法的であれば潜在的超特異であることに関しては、本質的には Liedtke-Schröer [L-S08] による普遍族に関する退化の様子の研究から証明される。

逆に潜在的超特異であれば加法的であることについては、p ねじれから誘導される野性的自己同型を作用させた際の固定スキームに関する Dolgachev-Keum [D-K01] による結果、及びそれを改良した結果を利用することで結論づけられる。

以上の準備のもと、主定理 2 の概略を述べる。

- (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) は一般に成立。
- (3) $\Longrightarrow$ (4) は命題 4 と 6 より従う。
- (4) と (5) の同値性は命題 6 である。
- (5) $\Longrightarrow$ (1) については以下の通り：少なくとも $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は楕円ファイブレーション $Y \longrightarrow \mathbb{P}^1$ から Frobenius 射の引き戻しで得られることはわかっているのであとは Y が有理曲面であることを示すと良い。これは次のようにして第 2Chern 数を計算して得られる。

I_{pn_v}, $v = 1, \ldots$ を乗法的ファイバーとする。$p \geq 3$ であるので、ファイブレーションの j 不変量は定数ではなく、従って乗法的な潜在的乗法的還元が存在する。命題 6 より潜在的超特異ファイバーは加法的なので、それが m 個の因子からなっているとして、その Swan 導手を δ とするとき

$$24 \;=\; c_2(X) \;=\; \sum_v pn_v \;+\; (2 + \delta + (m-1))$$

を得る。Frobenius 射で引き戻した後の乗法的ファイバーは I_{n_v}, $v = 1, \ldots$ であるので次の式を得る。

$$c_2(Y) \;=\; \sum_v n_v + (2 + \delta + (m'-1)) \;\leq\; \frac{22-\delta}{p} + (2 + \delta + (m'-1)).$$

$p \neq 2$ なので、$n \geq 1$ であるような I_n^* ファイバーは潜在的かつ乗法的であり加法的ファイバーとしては起きない。加法的ファイバーの分類表を見ることにより $m' \leq 9$ がわかる。Y は有理的もしくは $K3$ であることより $c_2(Y) = 12$ または $c_2(Y) = 24$ となるが、$p \geq 5$ ならば $\delta = 0$ であるので $c_2(Y) < 24$ となり Y 有理的を得る。$p = 3$ であれば $c_2(Y) = 24$ となるのは $\delta \geq 20$ の場合であるが、$\sum_n pn_v \geq p = 3$ であるので

$$24 \;=\; c_2(X) \;=\; \sum_v pn_v \;+\; (2 + \delta + (m-1)).$$

に矛盾。よって $p = 3$ の場合も Y は有理的となる。

主定理 3 の証明は省略する。

6. 分類と存在

$p^n \geq 3$ とし、p^n ねじれを持つ楕円 $K3$ 曲面を $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ とする。このとき次の図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccccccc}
X = Y^{(p^n)} & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \bar{\mathcal{E}} & & \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbb{P}^1 & \xrightarrow{F^n} & \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\varphi} & \overline{\mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}} & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}^1,
\end{array}$$

以下ではこの分類射 φ を用いて分類を行うが、特に X が超特異となる場合を中心として述べる。導出過程や証明については論文を参照のこと。

6.1. **標数 7.** 7 ねじれを持つ楕円 $K3$ 曲面 $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は同型を除いて以下の 1 つである。

singular fibers	σ_0	$\mathrm{MW}^\circ(X)$	$\mathrm{MW}(X)$
$\mathrm{III}, 3 \times \mathrm{I}_7$	1	$A_1(7)$	$A_1^*(7) \oplus (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$

Weierstraß 方程式は次で与えられる。

$$y^2 = x^3 + tx + t^{12}.$$

特に Artin 不変量は $\sigma_0 = 1$ である。

6.2. **標数 5.** 標数が 5 の場合は分類射 $\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \overline{\mathrm{Ig}(5)^{\mathrm{ord}}}$ の次数が 2 であることが X が $K3$ 曲面であることの必要十分条件である。このとき曲面は以下の通りとなる。

singular fibers	dim	σ_0	$\mathrm{MW}^\circ(X)$	$\mathrm{MW}(X)$
$2 \times \mathrm{II}, 4 \times \mathrm{I}_5$	2			
$2 \times \mathrm{II}, \mathrm{I}_{10}, 2 \times \mathrm{I}_5$	1			
$2 \times \mathrm{II}, 2 \times \mathrm{I}_{10}$	0			
$\mathrm{IV}, 4 \times \mathrm{I}_5$	1	2	$A_2(5)$	$A_2^*(5) \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}, \mathrm{I}_{10}, 2 \times \mathrm{I}_5$	0	1	$\langle 30 \rangle$	$\langle \frac{5}{6} \rangle \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

ここで、dim は族としての次元である。また、超特異である場合に Artin 不変量 σ_0 とそれらの Mordell–Weil 格子を併記している。特にこれら楕円曲面は次の Weierstraß 方程式で定義される有理楕円曲面 Y からの Frobenius 射による引き戻しで得られる。

$$y^2 = x^3 + 3(\alpha s^2 + \beta)^4 x + (\alpha s^2 + \beta)^5 (s^2 + 1),$$

以下のように Weierstraß 方程式のパラメータ α と β を用いて明示的に族を書き下すことが出来る。

$\{\alpha, \beta\} \cap \{0, \pm 1\}$	singular fibers of X	singular fibers of Y	Y
$\emptyset$	$2 \times \mathrm{II}, 4 \times \mathrm{I}_5$	$2 \times \mathrm{II}^*, 4 \times \mathrm{I}_1$	K3
$\{1\}, \{-1\}$	$2 \times \mathrm{II}, \mathrm{I}_{10}, 2 \times \mathrm{I}_5$	$2 \times \mathrm{II}^*, \mathrm{I}_2, 2 \times \mathrm{I}_1$	K3
$\{1, -1\}$	$2 \times \mathrm{II}, 2 \times \mathrm{I}_{10}$	$2 \times \mathrm{II}^*, 2 \times \mathrm{I}_2$	K3
$\{0\}$	$\mathrm{IV}, 4 \times \mathrm{I}_5$	$\mathrm{IV}^*, 4 \times \mathrm{I}_1$	rational
$\{0, 1\}, \{0, -1\}$	$\mathrm{IV}, \mathrm{I}_{10}, 2 \times \mathrm{I}_5$	$\mathrm{IV}^*, \mathrm{I}_2, 2 \times \mathrm{I}_1$	rational

標数 5 において次元を持った超特異軌跡が現れたが次の命題によりこの軌跡 (標数 5 の場合は 1 次元) は完備であることがわかる。即ち、Artin 不変量が 2 である $K3$ 曲面は 5 ねじれを持つ楕円ファイブレーション構造を持つ。

命題 7. *X を p^n ねじれを持つ標数 p の楕円 $K3$ 曲面とし、Artin 不変量 σ_0 を持つ超特異 $K3$ 曲面とする。*

このとき、全ての塩田の意味で超特異である標数 p の $K3$ 曲面で Artin 不変量が σ_0 であるものは、p^n ねじれを持つ楕円ファイブレーション構造を持つ。

尚、この命題により他の標数の時も超特異軌跡が完備であることがわかる。

6.3. **標数** 3. この場合は分類射の次数が $2 \leq \deg \varphi \leq 6$ であることが必要十分である。その分岐の様子は $O \in \overline{\mathrm{Ig}(3)^{\mathrm{ord}}}$ を唯一の超特異点とするとき以下の通りとなる。

(1) $\deg \varphi = 2$ で $\varphi^{-1}(O)$ は 2 点からなる。
(2) $\deg \varphi = 3$、 φ は分離的で $\varphi^{-1}(O)$ は 2 点からなる。
(3) $\deg \varphi = 4$ で $\varphi^{-1}(O)$ は 1 点または 2 点からなる。
(4) $\deg \varphi = 5$ で $\varphi^{-1}(O)$ は 1 点、または分岐指数が 2 と 3 である 2 点からなる。
(5) $\deg \varphi = 6$ で $\varphi^{-1}(O)$ は 1 点、または分岐指数が 3 である 2 点からなる。

分類及び上の命題より、標数 3 において塩田の意味で超特異であり Artin 不変量が $\sigma_0 \leq 6$ である全ての $K3$ 曲面は 3 ねじれセクションを持つことがわかる。

これらの完全な分類は以下の通り。

$\deg \varphi = 6$ (separable)

singular fibers	dim	σ_0	$\mathrm{MW}^\circ(X)$	$\mathrm{MW}(X)$
$\mathrm{II}_4, 6 \times \mathrm{I}_3$	5	6	$E_8(3)$	$E_8(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{II}_4, \mathrm{I}_6, \mathrm{I}_3 \times 4$	4	5	$E_7(3)$	$E_7^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{II}_4, \mathrm{I}_9, \mathrm{I}_3 \times 3$	3	4	$E_6(3)$	$E_6^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{II}_4, \mathrm{I}_6 \times 2, \mathrm{I}_3 \times 2$	3	4	$D_6(3)$	$D_6^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{II}_4, \mathrm{I}_{12}, \mathrm{I}_3 \times 2$	2	3	$D_5(3)$	$D_5^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{II}_4, \mathrm{I}_6 \times 3$	2	3	$D_4(3) \oplus A_1(3)$	$D_4^*(3) \oplus A_1^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{II}_4, \mathrm{I}_9, \mathrm{I}_6, \mathrm{I}_3$	2	3	$A_5(3)$	$A_5^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{II}_4, \mathrm{I}_{15}, \mathrm{I}_3$	1	2	$A_4(3)$	$A_4^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{II}_4, \mathrm{I}_{12}, \mathrm{I}_6$	1	2	$A_3(3) \oplus A_1(3)$	$A_3^*(3) \oplus A_1^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_2, 6 \times \mathrm{I}_3$	4	5	$E_6(3)$	$E_6^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_2, \mathrm{I}_6, \mathrm{I}_3 \times 4$	3	4	$A_5(3)$	$A_5^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_2, \mathrm{I}_9, \mathrm{I}_3 \times 3$	2	3	$A_2(3)^{\oplus 2}$	$A_2^*(3)^{\oplus 2} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_2, \mathrm{I}_6 \times 2, \mathrm{I}_3 \times 2$	2	3	$L_4(3)$	$L_4^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_2, \mathrm{I}_{12}, \mathrm{I}_3 \times 2$	1	2	$L_3(3)$	$L_3^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_2, \mathrm{I}_6 \times 3$	1	2	$A_1(3) \oplus L_2(3)$	$A_1^*(3) \oplus L_2^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{I}_{0,0}^*, \mathrm{I}_3 \times 6$	3	4	$D_4(3)$	$D_4^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{I}_{0,0}^*, \mathrm{I}_6, 4 \times \mathrm{I}_3$	2	3	$A_1(3)^{\oplus 3}$	$A_1^*(3)^{\oplus 3} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{I}_{0,0}^*, \mathrm{I}_6 \times 2, \mathrm{I}_3 \times 2$	1	2	$A_1(3)^{\oplus 2}$	$A_1^*(3)^{\oplus 2} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
$\mathrm{I}_{0,0}^*, \mathrm{I}_9, \mathrm{I}_3 \times 3$	1	2	$L_2(3)$	$L_2^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{I}_{0,0}^*, \mathrm{I}_6 \times 3$	0	1	$A_1(3)$	$A_1^*(3) \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\mathrm{I}_{0,0}^*, \mathrm{I}_{12}, \mathrm{I}_3 \times 2$	0	1	$\langle 12 \rangle$	$\langle \frac{3}{4} \rangle \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$\deg \varphi = 6$ (inseparable)

singular fibers	dim	σ_0	$\mathrm{MW}^\circ(X)$	$\mathrm{MW}(X)$
$\mathrm{IV}_2, 2 \times \mathrm{I}_9$	1	2	$A_2(3)$	$A_2^*(3) \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_2, \mathrm{I}_{18}$	0	1	$\langle 18 \rangle$	$\langle \frac{1}{2} \rangle \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$\deg\varphi = 5$

singular fibers	dim	σ_0	$\mathrm{MW}^\circ(X)$	$\mathrm{MW}(X)$
$\mathrm{IV}_5, 5\times \mathrm{I}_3$	4	5	$E_8(3)$	$3.(E_8(3))\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_5, \mathrm{I}_6, 3\times \mathrm{I}_3$	3	4	$E_7(3)$	$3.(E_7^*(3))\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_5, 2\times\mathrm{I}_6, \mathrm{I}_3$	2	3	$D_6(3)$	$3.(D_6^*(3))\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_5, \mathrm{I}_9, 2\times \mathrm{I}_3$	2	3	$E_6(3)$	$3.(E_6^*(3))\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_5, \mathrm{I}_9, \mathrm{I}_6$	1	2	$A_5(3)$	$3.(A_5^*(3))\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_5, \mathrm{I}_{12}, \mathrm{I}_3$	1	2	$D_5(3)$	$3.(D_5^*(3))\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_5, \mathrm{I}_{15}$	0	1	$A_4(3)$	$3.(A_4^*(3))\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$\deg\varphi = 4$

singular fibers	dim	σ_0	$\mathrm{MW}^\circ(X)$	$\mathrm{MW}(X)$
$\mathrm{IV}_4^*, 4\times \mathrm{I}_3$	3	4	$E_6(3)$	$E_6^*(3)\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_4^*, \mathrm{I}_6, 2\times \mathrm{I}_3$	2	3	$A_5(3)$	$A_5^*(3)\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_4^*, \mathrm{I}_6, \mathrm{I}_6$	1	2	$L_4(3)$	$L_4^*(3)\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_4^*, \mathrm{I}_9, \mathrm{I}_3$	1	2	$A_2(3)^{\oplus 2}$	$A_2^*(3)^{\oplus 2}\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
$\mathrm{IV}_4^*, \mathrm{I}_{12}$	0	1	$L_3(3)$	$L_3^*(3)\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

ここで L_2、L_3、L_4 はそれぞれ階数が 2、3、4 であり判別式が 12 である格子で次の行列で与えられるものである。

$$L_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},\ L_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ L_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

また、格子 L に対して $3.L$ で L を指数 3 の部分格子に含む格子を表す。

標数 3 の超特異 $K3$ 曲面で 3 ねじれを持つものは次のようにして作られる Weierstraß 方程式で与えられた有理楕円曲面 Y からの Frobenius 射による引き戻しで得られる。即ち、$f_3(s)$、$f_4(s)$、$f_5(s)$ をそれぞれ次数が 3、4、5 である多項式で $s=0$ を根に持たないものとし、

$$t = \frac{s^6}{f_5(s)},\ t = \frac{s^5}{f_4(s)} \quad \text{and} \quad t = \frac{s^4}{f_3(s)}$$

を普遍族 $\bar{\mathcal{E}} \longrightarrow \overline{\mathrm{Ig}(3)^{\mathrm{ord}}}$ の Weierstraß 方程式 $y^2 + txy = x^3 - t^5$ に代入して得られた Weierstraß 方程式

$$y^2 = x^3 + s^2x^2 + s^5 + r_4s^4 + r_3s^3 + r_2s^2 + r_1s + r_0$$

を Y の方程式とする。ここでパラメータ $(r_4, r_3, r_2, r_1, r_0)$ は $\mathbb{A}_k^5$ の元である。

分類射 φ の次数に応じて各係数は次のように対応する。

$$\begin{aligned} \deg\varphi &= 6 &:&\ r_1r_0 \neq 0 \\ \deg\varphi &= 5 &:&\ r_1 \neq 0, \quad r_0 = 0 \\ \deg\varphi &= 4 &:&\ r_2 \neq 0, \quad r_1 = r_0 = 0 \end{aligned}$$

これらの曲面は次のように E_8^2 型の有理二重点の半普遍変形族から得られる楕円曲面族によって実現されている。

$$y^2 = x^3 + (t^2+s)x^2 + (q_1t+q_0)x + t^5 + r_4t^4 + r_3t^3 + r_2t^2 + r_1t + r_0.$$

を標数 3 の E_8^2 型特異点の半普遍族とし、この普遍族を Frobenius 射 $t = \tau^3$ により引き戻して 3 ねじれを持つ楕円 $K3$ 曲面族が得られる。このとき、非自明な 3 ねじれは次で与えられる。

$$\begin{aligned}(-(\tau^5 + r_4^{\frac{1}{3}}\tau^4 + r_3^{\frac{1}{3}}\tau^3 + r_2^{\frac{1}{3}}\tau^2 + r_1^{\frac{1}{3}}\tau + r_0^{\frac{1}{3}}),\\ \pm\tau^3(\tau^5 + r_4^{\frac{1}{3}}\tau^4 + r_3^{\frac{1}{3}}\tau^3 + r_2^{\frac{1}{3}}\tau^2 + r_1^{\frac{1}{3}}\tau + r_0^{\frac{1}{3}}))\end{aligned}$$

($\deg\varphi = 4$ の場合は少し変形が必要である。)

6.4. **標数 2 の場合の 2 ねじれ.** 標数が 2 の場合は既に述べたように井草モジュライ問題は使えないのでケースバイケースに調べるが、標数が 2 であるような楕円 $K3$ 曲面では 2 ねじれを持つものは非常に多くあり細かな分類は不可能である。例えば超特異な場合に限ったとしてもそのようなものの族として、切断を持つ超特異楕円 $K3$ 曲面のモジュライ空間の次元と同じ 8 次元のものを容易に作ることが出来る。大まかな分類は以下の通り。

(1) j 不変量が定数であるとき は次の 2 タイプに分かれる。
  (a) $\mathrm{I}_{12,6}^*$ 型の加法的ファイバーを一つ持つ、従って $h \geq 2$ となる場合。
  (b) $\mathrm{I}_{4,2}^*$ 型のファイバーを 2 本持つ、従って $h = 1$ となる場合。
(2) j 不変量が定数でないとき は次の 4 タイプに分かれる。
  (a) 丁度 1 本の 潜在的超特異である加法的ファイバーを持つ、従って $h \geq 2$ となる場合。
  (b) ファイブレーションが半安定であり、丁度 1 本の良かつ超特異還元ファイバーを持つ、従って特に単有理であり $h = \infty$ となる場合。
  (c) ファイブレーションは丁度 2 本の加法的ファイバーを持ち、両方とも 潜在的 超特異である場合。従ってこの場合も $h = 1$ となる。
  (d) ファイブレーションは丁度 2 本加法的ファイバーを持ち、うち 1 本が潜在的超特異で、残り 1 本が $\mathrm{I}_{4,2}^*$ 型の潜在的通常である場合。従ってこの場合も $h = 1$ である。

6.4.1. *(1) j 不変量が定数である場合.* 全ての j 不変量が定数である 2 ねじれを持つ楕円 $K3$ 曲面は次のものの極小特異点解消で得られる。

$$(E_1 \times E_2)/G \longrightarrow E_2/G \cong \mathbb{P}^1, \tag{1}$$

ここで E_1 は 通常楕円曲線であり E_2 は任意の楕円曲線である。また $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は各楕円曲線において符号の入れ替えによる involution である。これらは塩田 [Sh74a]、桂 [Ka77] によって詳しく調べられたものである。

逆に、任意の 通常楕円曲線 E_1 と任意の楕円曲線 E_2 に対して (1) の極小特異点解消は j 不変量が定数である 2 ねじれ切断を持つ楕円 $K3$ 曲面を与える。

より詳しく述べると次のようになる。

E_2	singular fibers	ρ	h
通常	$2 \times \mathrm{I}^*_{4,2}$	$18 \leq \rho \leq 20$	1
supersingular	$\mathrm{I}^*_{12,6}$	18	2

特にこれらの曲面は超特異ではなく高さが $h = 2$ となる場合もあることに注意されたい。

6.4.2. *(2) j 不変量が非定数である場合.* ここでは特に上述の (a) と (b) の場合の例を実現するものとして E_8^4 型特異点の半普遍変形族から決まる楕円曲面族を取り上げる。詳細は [Ito10] 参照のこと。

標数 2 における E_8^4 型特異点は $\mathbb{A}^3_k$ 内で次の方程式によって定義される[3]。

$$y^2 + txy = x^3 + t^5$$

$\lambda = (p_0, p_1, q, r_4, r_3, r_2, r_1, r_0) \in \mathbb{A}^8_k$ をパラメータとして、この特異点の半普遍変形

$$y^2 + txy + (p_0 + p_1 t)y = x^3 + qx + t^5 + r_4 t^4 + r_3 t^3 + r_2 t^2 + r_1 t + r_0.$$

を考える。Kodaira-Néron モデルを考えることにより楕円曲面族 $f_\lambda : X_\lambda \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を得るが、パラメータ空間 $\mathbb{A}^8_k$ 内での半安定軌跡を $\mathcal{S}$ と書く。

$$\mathcal{S} := \{\lambda \in \mathbb{A}^8_k | p_0 \neq 0\}$$

このとき $\lambda \in \mathcal{S}$ に対応する楕円曲面 X_λ が特異ファイバーとして 1 本の $\mathrm{I}_n (1 \leq n \leq 9)$ と $(12 - n)$ 本の I_1 を持つとき基本メンバーと呼び X_λ を特に $X(\mathrm{I}_n)$ と書く。また、半安定ではない場合、即ち $\lambda \in \mathbb{A}^8_k - \mathcal{S}$ に対応する楕円曲面 X_λ についても、特異ファイバーとして加法的なファイバー型 T を $t = 0$ 上に持ち、残り全ての特異ファイバーが I_1 型であるとき基本メンバーと呼び、X_λ を $X(T)$ と書くことにする。

このとき半安定軌跡 $\mathcal{S}$ は滑層分割 (stratification)

$$\mathbb{A}^8_k \supset \mathcal{S} = \mathcal{X}(\mathrm{I}_1) \supset \mathcal{X}(\mathrm{I}_2) \supset \cdots \supset \mathcal{X}(\mathrm{I}_8) \supset \mathcal{X}(\mathrm{I}_9)$$

を持ち次を満たす。

(1) 各滑層 (stratum)$\mathcal{X}(\mathrm{I}_l)(l > 1)$ はその上位の $\mathcal{X}(\mathrm{I}_{l-1})$ 内において余次元 1 であり、よって $\mathcal{X}(\mathrm{I}_l)$ は $9 - l$ 次元となる。

(2) 各滑層の $\mathcal{X}(\mathrm{I}_l)$ の一般メンバーは基本メンバー $X(\mathrm{I}_l)$ であり表で与えられた Mordell-Weil 格子構造を持つ。

さて、$1 \leq l \leq 9$ について $\mathcal{X}(\mathrm{I}_l)$ の各メンバーに対して Frobenius 射による基底変換を施すことにより新しい族 $\widetilde{\mathcal{X}(\mathrm{I}_l)}$ を得る。作り方よりその一般メンバー $\widetilde{X(\mathrm{I}_l)}$ は超特異 $K3$ 曲面であり下の表にある構造を持つ。

これらが分類 (b)(の一部) に該当する 8 次元族である。

[3]有理二重点の記号については Artin [Ar77] の記号を踏襲している

Type of singular fiber	MWL	narrow MWL
$\mathrm{I}_1 \times 12$	E_8	E_8
$\mathrm{I}_2, \mathrm{I}_1 \times 10$	E_7^*	E_7
$\mathrm{I}_3, \mathrm{I}_1 \times 9$	E_6^*	E_6
$\mathrm{I}_4, \mathrm{I}_1 \times 8$	D_5^*	D_5
$\mathrm{I}_5, \mathrm{I}_1 \times 7$	A_4^*	A_4
$\mathrm{I}_6, \mathrm{I}_1 \times 6$	$A_2^* \oplus A_1^*$	$A_2 \oplus A_1$
$\mathrm{I}_7, \mathrm{I}_1 \times 5$	$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
$\mathrm{I}_8, \mathrm{I}_1 \times 4$	$\langle \frac{1}{8} \rangle$	$\langle 8 \rangle$
$\mathrm{I}_9, \mathrm{I}_1 \times 3$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	$\{0\}$

次に E_8^4 の半普遍族から決まる楕円曲面族の部分族 $I_{0,2}^*$ 族を考える。これは適当にパラメータを変更することにより次の Weierstraß 方程式で与えられる 4 次元の滑層分割である。

$$y^2 + txy = x^3 + p_1^{\frac{1}{2}} tx^2 + r_2^{\frac{1}{2}} t^2 x + t^5 + r_4 t^4 + r_3 t^3$$

一般メンバーは $t = 0$ 上に $\mathrm{I}_{0,2}^*$ 型のファイバーを持ち、他に I_1 型のファイバーを 4 本持つ。上述の半安定族と同じようにこの族に関しても各メンバーを Frobenius 射により基底変換することにより (a)(の一部) に該当する族を与える。

注目すべきは、この族に $\mathcal{E}/\overline{\mathrm{Ig}(4)^{\mathrm{ord}}}$ と $\mathcal{E}/\overline{\mathrm{Ig}(8)^{\mathrm{ord}}}$ が現れることである。また、これらの族に対して更に Frobenius 基底変換を繰り返すことにより “Frobenius 塔” を作ると必然的に 4 ねじれや 8 ねじれ切断を持つ族が現れるが詳細は割愛する。

l	Type of singular fibers	MWL	narrow MWL	Artin invariant, $\dim \widetilde{\mathcal{X}(\mathrm{I}_l)}$
1	$\mathrm{I}_2 \times 12$	$E_8(2) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$E_8(2)$	$9, 8$
2	$\mathrm{I}_4, \mathrm{I}_2 \times 10$	$E_7^*(2) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$E_7(2)$	$8, 7$
3	$\mathrm{I}_6, \mathrm{I}_2 \times 9$	$E_6^*(2) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$E_6(2)$	$7, 6$
4	$\mathrm{I}_8, \mathrm{I}_2 \times 8$	$D_5^*(2) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$D_5(2)$	$6, 5$
5	$\mathrm{I}_{10}, \mathrm{I}_2 \times 7$	$A_4^*(2) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$A_4(2)$	$5, 4$
6	$\mathrm{I}_{12}, \mathrm{I}_2 \times 6$	$A_2^*(2) \oplus A_1^*(2) \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$A_2(2) \oplus A_1(2)$	$4, 3$
7	$\mathrm{I}_{14}, \mathrm{I}_2 \times 5$	$\frac{2}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$3, 2$
8	$\mathrm{I}_{16}, \mathrm{I}_2 \times 4$	$\langle \frac{1}{4} \rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\langle 16 \rangle$	$2, 1$
9	$\mathrm{I}_{18}, \mathrm{I}_2 \times 3$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\{0\}$	$1, 0$

6.5. 8 **ねじれ.** 標数 2 における 8 ねじれを持つ楕円 $K3$ 曲面 $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は同型を除いて一意的であり次の構造を持つ。

singular fibers	σ_0	$\mathrm{MW}^\circ(X)$	$\mathrm{MW}(X)$
$\mathrm{I}_{1,1}^*, 2\times \mathrm{I}_8$	1	$A_1(2)$	$A_1^*(2) \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$

また、Weierstraß 方程式は次で与えられる。

$$y^2 + t^2xy = x^3 + x + t^4.$$

特に超特異的であり Artin 不変量は $\sigma_0 = 1$ であることがわかる。

6.6. 4 **ねじれ.** 標数 2 における 8 ねじれを持つ楕円 $K3$ 曲面 $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は分類射の次数が $2 \leq \deg\varphi \leq 4$ で次のいずれかとなる。

(1) $\deg\varphi = 2$, φ は分離的かつ $\varphi^{-1}(O)$ が 2 点からなる場合
(2) $\deg\varphi = 3$ で、$\varphi^{-1}(O)$ が 1 点または 2 点からなる場合
(3) $\deg\varphi = 4$ で、$\varphi^{-1}(O)$ が 1 点、または分岐指数 $e = 2$ である野性的分岐がおきている 2 点からなる場合

逆に φ が上記のいずれかであれば付随する 4 ねじれ切断を持つ楕円曲面は $K3$ 曲面である。

また、塩田の意味で超特異である標数 2 の $K3$ 曲面で Artin 不変量が $\sigma_0 \leq 4$ であるものは全て 4 ねじれを持つ楕円曲面の構造を持つこともわかる。そのような超特異的である曲面の完全なリストは以下の通りである。

$\deg\varphi$	singular fibers		dim	σ_0	$\mathrm{MW}^\circ(X)$	$\mathrm{MW}(X)$
3	$\mathrm{I}_{3,3}^*$	$3\times\mathrm{I}_4$	2	3	$D_4(2)$	$D_4^*(2)\oplus\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
	$\mathrm{I}_{3,3}^*$	$\mathrm{I}_8, \mathrm{I}_4$	1	2	A_3	$A_3^*\oplus\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
	$\mathrm{I}_{3,3}^*$	I_{12}	0	1	A_2	$A_2^*\oplus\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
4	φ separable:					
	$\mathrm{I}_{0,2}^*$	$4\times\mathrm{I}_4$	3	4	$D_4(2)$	$D_4^*(2)\oplus\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
	$\mathrm{I}_{0,2}^*$	$\mathrm{I}_8, 2\times\mathrm{I}_4$	2	3	$A_3(2)$	$A_3^*(2)\oplus\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
	$\mathrm{I}_{0,2}^*$	$\mathrm{I}_{12}, \mathrm{I}_4$	1	2	$A_2(2)$	$A_2^*(2)\oplus\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
	φ inseparable but not purely inseparable:					
	$\mathrm{I}_{1,1}^*$	$2\times\mathrm{I}_8$	0	1	$A_1(2)$	$A_1^*(2)\oplus\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$
	φ purely inseparable:					
	$\mathrm{I}_{1,1}^*$	I_{16}	0	1	$\{0\}$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

6.7. **まとめ.** 以上をまとめると次の表のようになる。

p^n	$[\mathrm{Ig}(p^n)^{\mathrm{ord}}]$	$\deg\varphi$	description of the family	
$8 = 2^3$	fine	1	unique supersingular $K3$ ($\sigma_0 = 1$)	Frob pullback of $p^n = 4$
7	fine	1	unique supersingular $K3$ ($\sigma_0 = 1$)	
5	fine	2	2-dim ordinary $K3$'s	
			$\supset$ 1-dim s.s. $K3$'s ($\sigma_0 \leq 2$)	related w/ E_8^1-sing
4	fine	$2, 3, 4$	4-dim ordinary $K3$'s	
			$\supset$ 3-dim s.s. $K3$'s ($\sigma_0 \leq 4$)	Frob pullback of $p^n = 2$
3	fine	$2, \cdots, 6$	6-dim ordinary $K3$'s	
			$\supset$ 5-dim s.s. $K3$'s ($\sigma_0 \leq 6$)	related w/ E_8^2-sing
2	not fine		isotrivial case	Kummer
			non-isotrivial case	
			$\supset$ 8-dim s.s. $K3$'s ($\sigma_0 \leq 9$)	related w/ E_8^4-sing

References

[Ar74] M. Artin, *Supersingular K3 surfaces*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 7, 543-568 (1974).

[A-M77] M. Artin, B. Mazur, *Formal Groups Arising from Algebraic Varieties*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 10, 87-132 (1977).

[Ar77] M. Artin, *Coverings of the rational double points in characteristic* p, in: Complex Analysis and Algebraic Geometry, Iwanami Shoten, Tokyo, 11-22 (1977).

[D-K01] I. Dolgachev, J. Keum, *Wild p-cyclic actions on K3-surfaces*, J. Algebr. Geom. 10, 101-131 (2001).

[D-K09] I. Dolgachev, J. Keum, *Finite groups of symplectic automorphisms of K3 surfaces in positive characteristic*, Ann. of Math. 169, 269-313 (2009).

[G-K03] G. van der Geer, T. Katsura, *On the height of Calabi-Yau varieties in positive characteristic*, Doc. Math. 8, 97-113 (2003).

[Ill79] L. Illusie, *Complexe de deRham-Witt et cohomologie cristalline*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 501-661 (1979).

[Ig68] J. Igusa, *On the algebraic theory of elliptic modular functions*, J. Math. Soc. Japan 20, 96-106 (1968).

[Ito10] H. Ito, *Deformation of a singularity of type* E_8 *and Mordell–Weil lattices in characteristic* 2, Math. Nachr. 283, 1037-1053 (2010).

[I-L10] H. Ito, C. Liedtke, *Elliptic* $K3$ *surfaces with* p^n*-torsion sections*, arXiv:1003.0244 (2010), to appear in J. of Algebraic Geometry.

[Ka77] T. Katsura, *On Kummer Surfaces in characteristic* 2, Intl. Symp. on Algebraic Geometry, Kyoto 525-542 (1977).

[L-S08] C. Liedtke, S. Schröer, *The Néron model over the Igusa curves*, J. Number Theory 130, 2157-2197 (2010).

[Schw05] A. Schweizer, *On the* p^e*-torsion of elliptic curves and elliptic surfaces in characteristic* p, Trans. Am. Math. Soc. 357, 1047-1059 (2005).

[Sh74a] T. Shioda, *Kummer Surfaces in Characteristic* 2, Proc. Japan Acad. 50, 718-722 (1974).

[Sh74b] T. Shioda, *An Example of Unirational Surfaces in Characteristic* p, Math. Ann. 211, 233-236 (1974).

[Sh77a] T. Shioda, *On Unirationality of Supersingular Surfaces*, Math. Ann. 225, 155-159 (1979).

[Sh77b] T. Shioda, *Some Results on Unirationality of Algebraic Surfaces*, Math. Ann. 230, 153-168 (1977).

[Sh90] T. Shioda, *On the Mordell–Weil lattices*, Comment. Math. Univ. St. Pauli 39, 211-240 (1990).

広島大学大学院工学研究院応用数学教室
E-mail address: hiroito@amath.hiroshima-u.ac.jp