2元3次形式の空間に付随するゼータ関数の双対恒等式

神戸大学大学院理学研究科　谷口隆

概 要

本稿では，概均質ベクトル空間とそのゼータ関数について簡単に復習し，その後，新谷卓郎氏によって導入された2元3次形式の空間に付随するゼータ関数についての著者と大野泰生氏，若槻聡氏の最近の共同研究について概説する．関連する話題についても触れる．

1　概均質ベクトル空間とは？

1.1　多項式の複素冪の Fourier 変換

まず，次の式をごらんいただきたい．一般に $\mathbb{R}$ 上の急減少関数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し，Fourier 変換を $f^\vee(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi ixy}dx$ で定める．

命題 1 任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ について，次が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} \int_{\mathbb{R}_{>0}} |x|^{s-1} f^\vee(x)dx \\ \int_{\mathbb{R}_{<0}} |x|^{s-1} f^\vee(x)dx \end{pmatrix} = (2\pi)^{-s}\Gamma(s) \begin{pmatrix} e^{\pi is/2} & e^{-\pi is/2} \\ e^{-\pi is/2} & e^{\pi is/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{\mathbb{R}_{>0}} |x|^{-s} f(x)dx \\ \int_{\mathbb{R}_{<0}} |x|^{-s} f(x)dx \end{pmatrix}.$$

これは，複素冪 $|x|^{s-1}$ の超関数 (distribution) としての Fourier 変換が，定数倍を除いて $|x|^{-s}$ に一致することを表している．このような多項式の例としては，他に2次形式が古典的に知られていた．簡単のため正定値の場合に述べると：

命題 2 $n \geq 3$ とし，P を $\mathbb{R}^n$ 上の正定値2次形式とすると，

$$(|P|^{s-n/2})^\vee = \frac{i^{n-1}}{2\sqrt{\det P}} \pi^{n/2-1-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-\frac{n}{2}+1)\{e^{-si\pi} + (-1)^{n-1}e^{si\pi}\}|Q|^{-s},$$

ただし Q は P に双対的な2次形式.

さて，このような公式が存在するのは P がどんなときだろうか：

問題：多項式 P で，その複素冪の Fourier 変換が再び多項式の複素冪になるものは？

この問題に対する佐藤幹夫氏の答えが概均質ベクトル空間である．すなわち，P が，概均質ベクトル空間の相対不変式になっているときは，$(|P|^s)^\vee$ は再び多項式の複素冪になる[1]．簡単のため，ここでは既約正則と呼ばれるクラスに限って定義を与える．

[1]ただし，これは必要十分条件ではない．概均質ベクトル空間の相対不変式でない場合にも，この条件をみたす P が佐藤文広氏 [8] らにより発見されている．

定義 3 (佐藤幹夫) $\mathbb{R}$ 上の簡約代数群の有限次元既約表現 (G,V) が正則な概均質ベクトル空間であるとは，(1) 定数でない多項式 $P\in\mathbb{R}[V]$ と G の有理指標 χ が存在して，$P(gx)=\chi(g)P(x)$ $(x\in V, g\in G)$ が成り立ち，(2) $V'(\mathbb{C})=\{x\in V(\mathbb{C})\mid P(x)\neq 0\}$ は単一 $G(\mathbb{C})$ 軌道になる，ことをいう．

$\mathbb{C}$ 上の既約正則な概均質ベクトル空間は，佐藤幹夫氏と木村達雄氏 [9] によって分類された．(それらは全部で 29 通りある！) 概均質ベクトル空間の例をいくつか挙げてみると，

(1) $G=\mathrm{GL}_1, V=\mathbb{R}$
(2) $G=\mathrm{GO}(P), V=\mathbb{R}^n$ (P : n 元 2 次形式)
(3) $G=\mathrm{GL}_n\times\mathrm{GL}_n, V=\mathbb{R}^n\otimes\mathbb{R}^n$
(4) $G=\mathrm{GL}_n, V=\mathrm{Sym}^2\,\mathbb{R}^n$
(5) $G=\mathrm{GL}_2, V=\mathrm{Sym}^3\,\mathbb{R}^2$

などがある．それぞれにおいて相対不変式を挙げると；(1) は x, (2) は P, (3) は V を n 次正方行列の空間と考えたときの det, (4) は V を対称行列の空間と考えたときの det, (5) は V を 2 元 3 次形式の空間と考えたときの判別式である．これらのうち，(1), (2), (3) の相対不変式は古典的だが，多項式の複素冪の Fourier 変換に特別な性質があるものとして (4), (5) の相対不変式に焦点が当てられたのは，概均質ベクトル空間の理論以降のことだと思われる．(5) の場合の次の Fourier 変換の明示的計算は新谷卓郎氏 [11, Proposition 2.9] による．

命題 4 (新谷) $V(\mathbb{R})=\mathrm{Sym}^3\,\mathbb{R}^2$ において，$P\in\mathbb{R}[V]$ を判別式とすると，

$$\begin{pmatrix} \int_{V(\mathbb{R})_1}|P(x)|^{s-1}f^\vee(x)dx \\ \int_{V(\mathbb{R})_2}|P(x)|^{s-1}f^\vee(x)dx \end{pmatrix} = M(s)\begin{pmatrix} \int_{V^*(\mathbb{R})_1}|P^*(x)|^{-s}f(x)dx \\ \int_{V^*(\mathbb{R})_2}|P^*(x)|^{-s}f(x)dx \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ただし，$V(\mathbb{R})_i=\{x\in V(\mathbb{R})\mid(-1)^{i-1}P(x)>0\}$ であり，

$$M(s):=\frac{3^{3s-2}}{2\pi^{4s}}\Gamma(s)^2\Gamma(s-\frac{1}{6})\Gamma(s+\frac{1}{6})\begin{pmatrix}\sin 2\pi s & 3\sin\pi s\\ \sin\pi s & \sin 2\pi s\end{pmatrix},$$

また V^* は V の双対空間で P^* は V^* 上の相対不変式.

測度の正規化や $f^\vee$ の定義については原論文を参照されたい.

1.2 ゼータ関数

命題 1, 2 の重要な応用として，ゼータ関数の関数等式が証明できることがあげられる．実際，それぞれに対応して，以下の関数等式が示される．

命題 5 Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}n^{-s}$ は，全平面に解析接続され次をみたす：

$$\zeta(1-s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)(e^{\pi is/2}+e^{-\pi is/2})\zeta(s).$$

あるいは対称な形で書くと：

$$\pi^{\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)=\pi^{\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s).$$

命題 6 $P(x):=x_1^2+\cdots+x_n^2$ とおくと，Epstein ゼータ関数 $\xi(s)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^n,x\neq 0}|P(x)|^{-s}$ 全平面に有理形に解析接続され次をみたす：

$$\pi^{-\frac{n}{2}+s}\Gamma(\frac{n}{2}-s)\xi(\frac{n}{2}-s)=\pi^{-s}\Gamma(s)\xi(s).$$

命題 6 は簡単のため特別な P の場合を述べたが，一般の正定値 2 次形式でも同様の公式が成り立つ．また，不定値 2 次形式に対しても関数等式をみたすゼータ関数が Siegel によって構成されている．

概均質ベクトル空間 (G,V) が代数体上定義されているとき，関数等式をみたすゼータ関数が自然に付随することが，佐藤幹夫氏と新谷卓郎氏 [10] によって見出された．上述の例のうち，古典的な (1)-(3) についてはそれらは，(1) は Riemann ゼータ関数 (代数体上なら Dedekind ゼータ関数)，(2) は Epstein, Sigel の 2 次形式のゼータ関数，(3) は行列環や中心的単純環のゼータ関数になる．新しい (4), (5) の場合は，新谷氏によってそれぞれ [12], [11] で詳しく研究された．今回のテーマは，(5) の 2 元 3 次形式の空間 $(\mathrm{GL}_2,\mathrm{Sym}^3\mathbb{Q}^2)$ に付随するゼータ関数である．

注 7 対称行列の空間 $(\mathrm{GL}_n,\mathrm{Sym}^2\mathbb{Q}^n)$ に付随するゼータ関数は，新谷氏の研究 [12] から約 20 年後の 1995 年ごろ，n が奇数の場合は Riemann ゼータ関数で，n が偶数の場合は Riemann ゼータ関数と $n=2$ の場合のゼータ関数 (あるいは，重み半整数の Eisenstein 級数) で書けることが，伊吹山知義氏と齋藤裕氏 [2] によって証明された．このゼータ関数の特殊値が Siegel 尖点形式の次元を記述する際に現れることが新谷 [12] で指摘されていたが，[2] によりその特殊値が計算された．[2] の研究を契機として，他の概均質ベクトル空間も，ゼータ関数がこれまでに知られているゼータ関数によって書けるものがいくつも発見されている．一方で，2 元 3 次形式の空間を始めとする 6 種類の概均質ベクトル空間

(a) $G=\mathrm{GL}_2, V=\mathrm{Sym}^3\mathbb{Q}^2$
(b) $G=\mathrm{GL}_3\times\mathrm{GL}_3\times\mathrm{GL}_2, V=\mathbb{Q}^3\otimes\mathbb{Q}^3\otimes\mathbb{Q}^2$
(c) $G=\mathrm{GL}_6\times\mathrm{GL}_2, V=\wedge^2\mathbb{Q}^6\otimes\mathbb{Q}^2$
(d) $G=E_6\times\mathrm{GL}_2, V=\mathbb{Q}^{27}\otimes\mathbb{Q}^2$
(e) $G=\mathrm{GL}_3\times\mathrm{GL}_2, V=\mathrm{Sym}^2\mathbb{Q}^3\otimes\mathbb{Q}^2$
(f) $G=\mathrm{GL}_5\times\mathrm{GL}_4, V=\wedge^2\mathbb{Q}^5\otimes\mathbb{Q}^4$

のゼータ関数は，既存のゼータ関数による表示をもつか，現段階では状況証拠に乏しい状態にあり，依然として不思議な対象であると考えられている．一般に既約正則な 29 種類の概均質ベクトル空間について，V' の基本群 $\pi_1(V')$ は $\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2,\mathfrak{S}_3,\mathfrak{S}_4,\mathfrak{S}_5$ のいずれかに同形であるが，これが $\mathfrak{S}_3$ 以上になる場合が複雑で，上述の 6 種類はそれぞれ (a), (b), (c), (d) は $\mathfrak{S}_3$, (e) は $\mathfrak{S}_4$, (f) は $\mathfrak{S}_5$ と同形な場合である．

2　主定理

以下しばらくは 2 元 3 次形式の空間の場合に話を絞ろう．大野泰生氏，若槻聡氏との共同研究 [7], [6] によって得られた定理の紹介から始める．$V(\mathbb{Q})$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の 2 変数 3 次形式のなすベクトル空間とする：

$$V(\mathbb{Q}) := \{x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q}\}.$$

以下では $V(\mathbb{Q})$ の元を $x = x(u,v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3$ と表す．$V(\mathbb{Q})$ と $\mathbb{Q}^4$ を，$V(\mathbb{Q}) \ni x \mapsto (a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$ によって同一視し，$x = (a,b,c,d)$ と表す．$x \in V(\mathbb{Q})$ の判別式は $P(x) := b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2$ となる．$V(\mathbb{Q})$ には $G(\mathbb{Q}) := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ による次の “twist された作用” を考える：

$$g \cdot x(u,v) = \frac{1}{\det g} \cdot x(pu + rv, qu + sv), \qquad x \in V(\mathbb{Q}), \quad g = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in G(\mathbb{Q}).$$

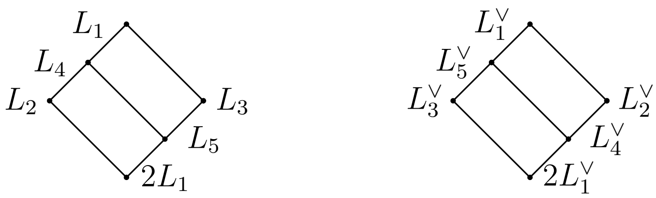
このとき $P(gx) = (\det g)^2 P(x)$ が成り立つ．$\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と表す．Γ-不変な格子の分類 [7] を思い出しておく．$V(\mathbb{Q})$ の格子を以下のように定める：

$$L_1 := \{x \in V(\mathbb{Q}) \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^4, \qquad L_1^\vee := \{x \in V(\mathbb{Q}) \mid a,d \in \mathbb{Z}, b,c \in 3\mathbb{Z}\},$$

$$\begin{aligned}
L_2 &:= \{(a,b,c,d) \in L_1 \mid a+b+d, a+c+d \in 2\mathbb{Z}\},\\
L_3 &:= \{(a,b,c,d) \in L_1 \mid a+b+c, b+c+d \in 2\mathbb{Z}\},\\
L_4 &:= \{(a,b,c,d) \in L_1 \mid b+c \in 2\mathbb{Z}\},\\
L_5 &:= \{(a,b,c,d) \in L_1 \mid a,d,b+c \in 2\mathbb{Z}\},
\end{aligned}$$

$$L_2^\vee := L_1^\vee \cap L_3, \quad L_3^\vee := L_1^\vee \cap L_2, \quad L_4^\vee := L_1^\vee \cap L_5, \quad L_5^\vee := L_1^\vee \cap L_4.$$

包含関係を図に示すと次のようになる．



$\mathbb{Q}^\times$-倍を除き，Γ 不変な格子はこれらで尽くされることが示される．$x \in V(\mathbb{Q})$ に対し，$\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma x = x\}$ とおき，$\#\Gamma_x$ でその位数を表す．これは 1 か 3 のいずれかである．以上の準備のもとで，ゼータ関数は次のように定義される．$x \in L_i^\vee$ のときは $P(x)$ は 27 の倍数となることに注意.

定義 8 (新谷 [11]) $1 \le i \le 5, 1 \le j \le 2$ について，

$$\xi_{i,j}(s) := \sum_{\substack{x \in \Gamma \backslash L_i \\ (-1)^{j-1} P(x) > 0}} \frac{(\#\Gamma_x)^{-1}}{|P(x)|^s}, \qquad \xi_i(s) := (\xi_{i,1}(s), \xi_{i,2}(s)),$$

$$\xi_{i,j}^\vee(s) := \sum_{\substack{x \in \Gamma \backslash L_i^\vee \\ (-1)^{j-1} P(x) > 0}} \frac{(\#\Gamma_x)^{-1}}{|P(x)/27|^s}, \qquad \xi_i^\vee(s) := \left(\xi_{i,1}^\vee(s), \xi_{i,2}^\vee(s)\right)$$

と定め，L_i または $L_i^\vee$ に付随するゼータ関数と呼ぶ．

$\xi_i(s), \xi_i^\vee(s)$ はベクトル値であることに注意しよう．新谷 [11] により，これらのゼータ関数は $s = 1, 5/6$ での一位の極を除き全複素平面に正則に解析接続され，$\xi_i(1-s) = \xi_i^\vee(s)M_i(s)$ の形の関数等式を持つことが示された．ここに $M_i(s)$ は初等因子の差を除き，命題 4 に出てきた行列値の Γ-因子 $M(s)$ である．$M_i(s)$ や留数の値は次節の定理 12 を参照されたい．

以下の $\xi_1(s)$ と $\xi_1^\vee(s)$ の間の極めて簡単な関係式は係数表をもとに大野泰生氏 [5] によって予想され，中川仁氏 [3] によって証明された．

定理 9 (予想 [5], 証明 [3])

$$\xi_1^\vee(s) = \xi_1(s)A, \qquad \text{ここに} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

本稿では，このような関係式を仮に双対恒等式と呼ぶ．今回の主結果は，$2 \le i \le 5$ についての以下の双対恒等式である．

定理 10 (主定理 [7],[6]) (1) $i = 2, 3$ に対し次が成り立つ：

$$\xi_2^\vee(s) = \xi_2(s)A, \qquad \xi_3^\vee(s) = \xi_3(s)A.$$

(2) $i = 4, 5$ に対し

$$\begin{aligned}
\theta(s) &:= \xi_1(s) - 2\xi_3(s) - \xi_4(s) + 4\xi_5(s), \\
\eta(s) &:= \xi_4(s) - \xi_2(s) - \xi_5(s) + 2^{1-4s}\xi_1(s), \\
\theta^\vee(s) &:= \xi_5^\vee(s) - \xi_3^\vee(s) - \xi_4^\vee(s) + 2^{1-4s}\xi_1^\vee(s), \\
\eta^\vee(s) &:= \xi_1^\vee(s) - 2\xi_2^\vee(s) - \xi_5^\vee(s) + 4\xi_4^\vee(s)
\end{aligned}$$

とおくと次が成り立つ：

$$\theta^\vee(s) = 2^{-2s}\theta(s)A, \qquad \eta^\vee(s) = 2^{2s}\eta(s)A.$$

任意の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-不変な格子に付随するゼータ関数は，この意味で双対恒等式を満たす．中川氏の定理 9 の証明 [3] は精巧で複雑だったが，定理 10 はその定理 9 に帰着することで証明される．

双対恒等式の重要な応用として，関数等式 $\xi_i(1-s) = \xi_i^\vee(s)M_i(s)$ を次のように自己双対的な形に書きなおすことができる．$\gamma_\pm(s)$ を

$$\begin{aligned}
\gamma_+(s) &:= \frac{2^s 3^{3s/2}}{\pi^{2s}}\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{12}\right), \\
\gamma_-(s) &:= \frac{2^s 3^{3s/2}}{\pi^{2s}}\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{5}{12}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{7}{12}\right)
\end{aligned}$$

とし，各符号 $\pm$ について，完備化されたゼータ関数を以下で定めよう．

$$\begin{aligned}
\Lambda_{i,\pm}(s) &:= 2^{a_i s}\gamma_\pm(s)\left(\sqrt{3}\xi_{i,1}(s) \pm \xi_{i,2}(s)\right), \qquad\qquad i=1,2,3,\\
\Theta_\pm(s) &:= 2^{s}\gamma_\pm(s)\left(\sqrt{3}\theta_1(s) \pm \theta_2(s)\right),\\
\mathrm{H}_\pm(s) &:= 2^{3s}\gamma_\pm(s)\left(\sqrt{3}\eta_1(s) \pm \eta_2(s)\right).
\end{aligned}$$

ただし $a_1=0, a_2=a_3=2$ とし，また $\theta(s)=(\theta_1(s),\theta_2(s))$, $\eta(s)=(\eta_1(s),\eta_2(s))$ とする．定理 9, 10 を新谷の関数等式に適用すると，関数等式は以下のように書き直される．

定理 11 (関数等式の自己双対化) 各符号に対し

$$\begin{gathered}
\Lambda_{i,\pm}(s) = \Lambda_{i,\pm}(1-s), \quad (i=1,2,3),\\
\Theta_\pm(s) = \Theta_\pm(1-s), \qquad \mathrm{H}_\pm(s) = \mathrm{H}_\pm(1-s).
\end{gathered}$$

この意味で，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-不変な格子に対しては，付随するゼータ関数は必ず自己双対的な関数等式をみたす．

本稿では以下，3 節で新谷 [11] によって明らかにされたゼータ関数の解析的性質について復習し，4 節で定理 10 を定理 9 に帰着する方針について簡単に説明する．5 節では，中川氏 [3] によって明らかになった双対恒等式と類体論の関係について述べ，特に 3 元 2 次形式のペアの空間について触れる．

3 ゼータ関数の解析的性質

ゼータ関数の解析的性質は新谷氏 [11] によって明らかにされた．[11] では主に $i=1$ の場合が扱われているが，一般の $1 \le i \le 5$ でも同様の方法で計算ができ，次が成立する．主定理である定理 10 の証明には使わないので結果のみ述べる．証明については，[11], [7] を参照されたい．

定理 12 (1) ゼータ関数 $\xi_{i,j}(s)$, $\xi^\vee_{i,j}(s)$ は $s=1, 5/6$ での一位の極を除き，全平面に正則に解析接続される．さらに，次の関数等式をみたす．

$$\xi_i(1-s) = 2^{2a_i s}[L_1 : L_i]^{-1}\xi_i^\vee(s)M(s),$$

ただし $a_1=0, a_2=a_3=a_4=a_5=1$ とし，$M(s)$ は命題 *4* のものである．

(2) 定数 α, β を

$$\alpha := \frac{\pi^2}{9}, \qquad \beta := \frac{3^{1/2}(2\pi)^{1/3}}{18}\zeta\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^{-1},$$

と定めると，ゼータ関数のそれぞれの留数

$$\alpha_{i,j} := \operatorname*{Res}_{s=1}\xi_{i,j}(s), \quad \beta_{i,j} := \operatorname*{Res}_{s=5/6}\xi_{i,j}(s), \quad \alpha^\vee_{i,j} := \operatorname*{Res}_{s=1}\xi^\vee_{i,j}(s), \quad \beta^\vee_{i,j} := \operatorname*{Res}_{s=5/6}\xi^\vee_{i,j}(s),$$

の値は以下の表のようになる．

i	1	2	3	4	5	i	1	2	3	4	5
$\alpha_{i,1}$	α	$\dfrac{\alpha}{4}$	$\dfrac{\alpha}{4}$	$\dfrac{\alpha}{2}$	$\dfrac{7}{32}\alpha$	$\alpha_{i,1}^\vee$	$\dfrac{3}{2}\alpha$	$\dfrac{3}{8}\alpha$	$\dfrac{3}{8}\alpha$	$\dfrac{9}{32}\alpha$	$\dfrac{3}{4}\alpha$
$\beta_{i,1}$	β	$\dfrac{\beta}{4}$	$\dfrac{\beta}{4}$	$\dfrac{\beta}{2}$	$\dfrac{\beta}{4\sqrt[3]{2}}$	$\beta_{i,1}^\vee$	$\sqrt{3}\beta$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\beta$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\beta$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}}\beta$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\beta$
$\alpha_{i,2}$	$\dfrac{3}{2}\alpha$	$\dfrac{3}{8}\alpha$	$\dfrac{3}{8}\alpha$	$\dfrac{3}{4}\alpha$	$\dfrac{9}{32}\alpha$	$\alpha_{i,2}^\vee$	3α	$\dfrac{3}{4}\alpha$	$\dfrac{3}{4}\alpha$	$\dfrac{15}{32}\alpha$	$\dfrac{3}{2}\alpha$
$\beta_{i,2}$	$\sqrt{3}\beta$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\beta$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\beta$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\beta$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}}\beta$	$\beta_{i,2}^\vee$	3β	$\dfrac{3}{4}\beta$	$\dfrac{3}{4}\beta$	$\dfrac{3}{4\sqrt[3]{2}}\beta$	$\dfrac{3}{2}\beta$

4　主定理の証明

定理 10 を定理 9 に帰着する方針について述べよう．$l, N \in \mathbb{Z}$ に対し

$$L_1^{\equiv l(N)} := \{x \in L_1 \mid P(x) \equiv l\ (N)\}, \qquad (L_1^\vee)^{\cong l(N)} := \{x \in L_1^\vee \mid P(x)/27 \equiv l\ (N)\}.$$

とおく．するとまず $i = 2, 3$ のときは $L_i, L_i^\vee$ について次が成り立つ．

命題 13 ([7] Propositions 3.5, 3.7)

$$L_2 = 2L_1 \sqcup L_1^{\equiv 5\,(8)}, \qquad L_3 = 2L_1 \sqcup L_1^{\equiv 1\,(8)},$$
$$L_2^\vee = 2L_1^\vee \sqcup (L_1^\vee)^{\cong 3\,(8)}, \qquad L_3^\vee = 2L_1^\vee \sqcup (L_1^\vee)^{\cong 7\,(8)}.$$

このことより，$i = 2, 3$ に対する $\xi_i(s)$ は ξ_1 とその部分ゼータ関数

$$\xi_{1,j}^{\equiv l\,(N)}(s) = \sum_{\substack{x \in \Gamma\backslash L_1^{\equiv l\,(N)} \\ (-1)^{j-1}P(x) > 0}} \frac{(\#G_{\mathbb{Z},x}^1)^{-1}}{|P(x)|^s}, \qquad \xi_1^{\equiv l\,(N)}(s) = (\xi_{1,1}^{\equiv l\,(N)}(s), \xi_{1,2}^{\equiv l\,(N)}(s)).$$

を用いて，例えば $\xi_2(s) = 2^{-4s}\xi_1(s) + \xi_1^{\equiv 5\,(8)}(s)$ のように表される．$\xi_i^\vee(s)$ についても同様である．定理 9 の公式 $\xi_1^\vee(s) = \xi_1(s)A$ は部分ゼータ関数の等式 $\xi_1^{\vee\cong l\,(N)}(s) = \xi_1^{\equiv -l\,(N)}(s)A$ を導くことに注意しよう．$l \mod N$ が $-l \mod N$ に変わるのは，A が正の判別式と負の判別式を入れ替えるからである．したがって命題 13 を用いると

$$\xi_2^\vee(s) = 2^{-4s}\xi_1^\vee(s) + \xi_1^{\vee\cong 3\,(8)}(s) = 2^{-4s}\xi_1(s)A + \xi_1^{\equiv 5\,(8)}(s)A = \xi_2(s)A,$$
$$\xi_3^\vee(s) = 2^{-4s}\xi_1^\vee(s) + \xi_1^{\vee\cong 7\,(8)}(s) = 2^{-4s}\xi_1(s)A + \xi_1^{\equiv 1\,(8)}(s)A = \xi_3(s)A.$$

となり，定理 10 (1) は定理 9 からしたがう．命題 13 自体は，判別式 $P(x)$ の合同条件と係数 a, b, c, d の合同条件の関係を調べることで示される．

$i = 4, 5$ に対しても L_i を $L_1^{\equiv l\,(N)}$ を用いて表すことができれば，代数的関数等式が得られるが，そのような表示はない．実際には次の関係式が成立する．なお，$\xi_i(s)$ や $\xi_1^{\equiv l\,(N)}(s)$ などの式で s を省略して $\xi_i, \xi_1^{\equiv l\,(N)}$ などと書いた．

命題 14 ([6] Theorem 3.8)

$$\begin{aligned}
\xi_1^{\equiv 4(32)} &= 3\cdot 2^{-2s}(\xi_5 - 2^{-4s}\xi_1),\\
(\xi_1^\vee)^{\cong -20(32)} &= 3\cdot 2^{-2s}(\xi_4^\vee - 2^{-4s}\xi_1^\vee),\\
\xi_1^{\equiv 20(32)} &= (\xi_4 - \xi_2 - \xi_5 + 2^{1-4s}\xi_1) + 2^{-4s}(\xi_1 - \xi_4 - 2\xi_3 + 4\xi_5)\\
&\quad - 2^{-2s}(\xi_1 - \xi_3 - 2\xi_2 + 5\cdot 2^{-4s}\xi_1),\\
(\xi_1^\vee)^{\cong -4(32)} &= (\xi_5^\vee - \xi_3^\vee - \xi_4^\vee + 2^{1-4s}\xi_1^\vee) + 2^{-4s}(\xi_1^\vee - \xi_5^\vee - 2\xi_2^\vee + 4\xi_4^\vee)\\
&\quad - 2^{-2s}(\xi_1^\vee - \xi_2^\vee - 2\xi_3^\vee + 5\cdot 2^{-4s}\xi_1^\vee).
\end{aligned}$$

この証明はやや複雑であり，証明の途中で主合同部分群 $\Gamma(2)$ などが自然に現れる．詳細は [6] を参照されたい．命題 14 を用いれば，同様の計算によって定理 9 から定理 10 (2) が導かれる．

5 関連する話題

まず，中川氏による証明 [3] について簡単に触れておこう．中川氏は，ゼータ関数 $\xi_1(s)$ と $\xi_1^\vee(s)$ の各係数を直接比較し，それらが一致することを示した．それは純代数的な方法であり，類体論が用いられる．一方の軌道の集合 $\Gamma\backslash L_1$ は，Delone-Faddeev 対応と呼ばれる $\mathbb{Z}$ 上の 3 次環の同形類のなす集合との自然な対応がある．ただし $\mathbb{Z}$ 上の 3 次環とは，単位的可換環であって，$\mathbb{Z}$ 加群として階数 3 の自由加群であるもののことを言う．3 次体の整数環や整環がその例である．また，もう一方の軌道の集合 $\Gamma\backslash L_1^\vee$ は，Hessian による 2 元 2 次形式の空間への同変写像を通して，2 次環のイデアル類群の 3-torsion の集合と対応する．各判別式ごとにこれらの個数が一致することを，類体論を用いて示すのが [3] における基本的な証明方針である．実際には極大整環とは限らない環を扱うのでかなり緻密で複雑な議論が必要となる．

このように類体論と関わる概均質ベクトル空間は，2 元 3 次形式の空間 $\mathrm{Sym}^3\mathbb{Q}^2$ 以外にもあることが明らかになっている．その最も典型的な場合が，3 元 2 次形式のペアの空間

$$G(\mathbb{Q}) = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}), \quad V(\mathbb{Q}) = \mathrm{Sym}^2\mathbb{Q}^3 \otimes \mathbb{Q}^2$$

である．Wright-雪江 [14] によって，有理軌道の集合 $G(\mathbb{Q})\backslash V'(\mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}$ の 4 次分離代数と標準的に 1 対 1 対応することが明らかにされた．V の各元は 2 次曲線の対を定め，それは $\mathbb{P}^2$ の 4 点を定めることから，4 次拡大との関連は想像しやすいだろう．実は 2 次曲線の対から交点を求めるプロセスは，4 次方程式の解法と著しい類似がある．詳しくは述べないが，例えば高木貞治 [13, 第 6 章, §38] に解説があるので参照されたい．

以上は $\mathbb{Q}$ 上の理論だが，近年 Bhargava の高次合成則 (Higher Composition Laws) の理論 [1] により $\mathbb{Z}$ 上の構造が極めて明らかになり，特に $G(\mathbb{Z})\backslash V(\mathbb{Z})$ は 4 次環を分類し，また $G(\mathbb{Z})\backslash V(\mathbb{Z})^\vee$ は 3 次環のイデアル類の 2-torsion の集合と対応することが示された．

このことから，3 元 2 次形式の対の空間に付随するゼータ関数についても，定理 9 と類似の双対恒等式が成り立つことは相当に確からしいと考えられている．中川氏はこの場合についても，多くの係数について，その予想が正しいことを確かめている ([4])．

現在のところ，定理 9 は (したがって定理 10 も) 類体論が唯一の解釈である．これらの双対恒等式の解析的な証明があるか，あるいは代数的としても類体論を用いない証明があるか，などは興味深い問題である．また，概均質ベクトル空間のゼータ関数は，Dirichlet 指標で捻った L 関数も考えることができ，L 関数についても双対恒等式の類似が存在すると考えられる．これらのゼータ関数は正標数大域体上でも定義され，q^{-s} の有理関数となることから，その有理式を調べることもゼータ関数の素性を明らかにするのに有効かもしれない．これらの課題が将来進展することを期待したい．

謝辞． 講演の機会をいただいたオーガナイザーの先生方に感謝します．また，文献 [13] を教えていただいた吉田輝義氏 (ケンブリッジ大) にも感謝します．

参考文献

[1] M. Bhargava. Higher composition laws II: On cubic analogues of gauss composition. *Ann. Math.*, 159:865–886, 2004; III: The parametrization of quartic rings. *Ann. Math.*, 159:1329–1360, 2004.

[2] T. Ibukiyama and H. Saito. On zeta functions associated to symmetric matrices I: An explicit form of zeta functions. *Amer. J. Math.*, 117:1097–1155, 1995.

[3] J. Nakagawa. On the relations among the class numbers of binary cubic forms. *Invent. Math.*, 134:101–138, 1998.

[4] J. Nakagawa. 3 元 2 次形式のペアのなす概均質ベクトル空間のゼータ関数について, a note in Japanese.

[5] Y. Ohno. A conjecture on coincidence among the zeta functions associated with the space of binary cubic forms. *Amer. J. Math.*, 119:1083–1094, 1997.

[6] Y. Ohno and T. Taniguchi. Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms II. preprint, 2009.

[7] Y. Ohno, T. Taniguchi, and S. Wakatsuki. Relations among Dirichlet series whose coefficients are class numbers of binary cubic forms. *Amer. J. Math.* to appear.

[8] F. Sato. Quadratic maps and non-prehomogeneous local functional equations. *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, 56:163–184, 2007.

[9] M. Sato and T. Kimura. A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. *Nagoya Math. J.*, 65:1–155, 1977.

[10] M. Sato and T. Shintani. On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces. *Ann. of Math.*, 100:131–170, 1974.

[11] T. Shintani. On Dirichlet series whose coefficients are class-numbers of integral binary cubic forms. *J. Math. Soc. Japan*, 24:132–188, 1972.

[12] T. Shintani. On zeta-functions associated with vector spaces of quadratic forms. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect IA*, 22:25–66, 1975.

[13] 高木貞治. 代数学講義, 改訂新版. 共立出版, 1965.

[14] D.J. Wright and A. Yukie. Prehomogeneous vector spaces and field extensions. *Invent. Math.*, 110:283–314, 1992.

神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学大学院理学研究科
e-mail: `tani@math.kobe-u.ac.jp`