複素鏡映群に付随した Kostka 関数について

庄司 俊明

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

1. はじめに

Kostka 多項式 $K_{\lambda,\mu}(t)$ は組合せ論で良く知られた多項式であり、有限体上の一般線形群 $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の表現論で重要な役割りを果たす. 1981 年 Lusztig は Kostka 多項式が GL_n の巾零軌道に関係する交差 cohomology 群により記述されることを示した. この事実は Lusztig の指標層の理論の枠組みの中で大きな発展をとげ, 任意の有限簡約群に対して幾何的手法により Kostka 多項式の一般化が得られた. またそれらを計算する統一的なアルゴリズムも見つけられた. $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ のような古典群の場合, このアルゴリズムは付随する Weyl 群の既約指標の性質と "symbol" と呼ばれる組合せ論的な対象に本質的に依存している.

一方, 古典型 Weyl 群の自然な拡張として複素鏡映群 $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^n$ が考えられ, この群に対しても同様のアルゴリズムにより Kostka 多項式の類似物が定義される. それを複素鏡映群に付随した Kostka 関数という. ところでこのアルゴリズムを与える symbol の取り方にはいくつかの可能性があり, したがって得られる Kostka 関数にもいくつかのバージョンが存在する. 中でも limit symbol と呼ばれる特殊な symbol に付随する Kostka 関数は特にその構造が簡単になることが知られている.

2007 年 Achar-Henderson は $r = 2$ の場合に limit symbol に付随する Kostka 関数 (この場合でも $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ の Kostka 多項式とは別のものになる) がある種の GL_n 軌道に関係する交差 cohomology 群により記述されることを示した. 彼らの議論は一般の r に対しても拡張できる可能性が高いように思われる. 本稿では, Lusztig から Achar-Henderson に至る Kostka 多項式の幾何的実現の系譜を概観し, 一般の r での幾何的実現の試みを述べる.

2. Kostka 多項式

まず Kostka 多項式の定義から始める. $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_m \ge 0$, $\sum_i \lambda_i = n$ となる整数の列 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ を n の分割という. $n = |\lambda|$ と表わす. 変数 $x = (x_1, \dots, x_m)$ を用意し, 分割 λ によってラベル付けされた x に関する種々の対称多項式を考える. その中で最も重要なのが

$$s_\lambda(x) = s_\lambda(x_1, \dots, x_m) = \det(x_i^{\lambda_j + m - j})_{1 \le i,j \le m} / \det(x_i^{m-j})_{1 \le i,j \le m}$$

で定義される **Schur 関数** $s_\lambda(x)$ である. $|\lambda| = n$ とすれば $s_\lambda(x) \in \mathbf{Z}[x_1, \dots, x_m]$ であり n 次の斉次対称多項式になる. もうひとつ**単項式対称関数** $m_\lambda(x)$ をあげておこう.

$$m_\lambda(x) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_m \cdot \lambda} x^\alpha$$

ただし $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^m$ に対し, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$ であり, $\mathfrak{S}_m \cdot \lambda$ は m 次対称群 $\mathfrak{S}_m$ の $\mathbf{Z}^m$ への作用に関する λ の軌道を表わす. $m_\lambda(x)$ もまた次数 n の斉次対称多項式である. これらは対称群の表現論で重要な多項式であるが, さらにパラメータ付き関数への拡張として **Hall-Littlewood 関数** $P_\lambda(x;t)$ が知られている.

$$P_\lambda(x;t) = P_\lambda(x_1, \dots, x_m; t) = \frac{1}{v_\lambda(t)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_m} w\biggl(x_1^{\lambda_1} \cdots x_m^{\lambda_m} \prod_{i<j} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \biggr).$$

ただし t は不定元, $v_\lambda(t)$ は t のある多項式である. 表示は複雑だが $P_\lambda(x;t) \in \mathbf{Z}[x_1, \dots, x_m, t]$ であり, $P_\lambda(x;t)$ は変数 $x_1, \dots, x_m$ に関する n 次の斉次対称多項式になる. $P_\lambda(x;t)$ は $t = 1$ の時 $m_\lambda(x)$ に一致し, $t = 0$ の時 $s_\lambda(x)$ に一致する. その意味で Hall-Littlewood 関数は Schur 関数と単項式対称関数をパラメータ t でつなぐ関数とみることができる.

$\mathcal{P}_n$ を n の分割全体の集合とする (分割 λ において $\lambda_i = 0$ の部分の違いは無視する). 与えられた n に対して m を十分大きく取っておけば, $\{s_\lambda(x) \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\}$ は n 次の斉次対称多項式全体のなす自由 $\mathbf{Z}$ 加群の基底をなし, $\{P_\lambda(x;t) \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\}$ は自由 $\mathbf{Z}[t]$ 加群の基底をなす. そこでこの 2 つの基底の間の変換行列として **Kostka 多項式** $K_{\lambda,\mu}(t) \in \mathbf{Z}[t]$ が定義される (m の取り方にはよらない).

$$s_\lambda(x) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} K_{\lambda,\mu}(t) P_\mu(x;t). \tag{2.1}$$

上に述べたことから (1,1) 式に $t = 1$ を代入すると

$$s_\lambda(x) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_n} K_{\lambda,\mu}(1) m_\mu(x)$$

となる. $K_{\lambda,\mu} = K_{\lambda\mu}(1)$ は **Kostka 数**と呼ばれ, 組合せ論では重要な役割りを演ずる数である. $K_{\lambda,\mu}$ は shape λ, weight μ の半標準盤の個数に一致することが知られている.

$\mathcal{P}_n$ に**支配的順序**と呼ばれる半順序 $\leq$ を次のように定義する. $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$ に対し

$$\mu \leq \lambda \iff \sum_{i=1}^k \mu_i \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, m.$$

集合 $\mathcal{P}_n$ に支配的順序と両立する全順序を定め, それに対する行列 $K = (K_{\lambda.\mu}(t))_{\lambda,\mu \in \mathcal{P}_n}$ を考える. すると行列 K は対角成分が 1 の下三角行列になる. 例えば $n = 4$ の場合は次のようになる.

例 2.2. $n=4$ **の場合の Kostka 多項式** $K=(K_{\lambda,\mu}(t))$

	1^4	21^2	2^2	31	4
1^4	1				
21^2	$t+t^2+t^3$	1			
2^2	t^2+t^4	t	1		
31	$t^3+t^4+t^5$	$t+t^2$	t	1	
4	t^6	t^3	t^2	t	1

3. Kostka 多項式の幾何的実現

1981 年, G. Lusztig は一般線形群の巾零軌道と関連付けて Kostka 多項式の幾何的実現を与えた. 以下それを説明する. V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間, $G=GL(V)$ を一般線形群とする. $\mathcal{N}$ を V 上の巾零変換全体のなす集合 (巾零錐) とする. G は $\mathcal{N}$ に自然に作用し, $\mathcal{N}$ の G 軌道の全体 $\mathcal{N}/G$ は (巾零行列の Jordan 標準型を考えることにより) $\mathcal{P}_n$ と 1 : 1 に対応する. $\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対応する G 軌道を $\mathcal{O}_\lambda$ と表わす. $\mathcal{O}_\lambda$ は Jordan type が λ の巾零変換全体の集合である. $\mathcal{O}_\lambda$ は $\mathcal{N}$ の局所閉集合であり, その閉包を $\overline{\mathcal{O}}_\lambda$ と表わす. そのとき

(Closure relation) $$\overline{\mathcal{O}}_\lambda=\coprod_{\mu\le\lambda}\mathcal{O}_\mu$$

となることが知られている. ここに $\mu\le\lambda$ は前節で定義した支配的順序である.

$\lambda\in\mathcal{P}_n$ に対して $n(\lambda)=\sum_{i\ge1}(i-1)\lambda_i$ とおく. $n(\lambda)$ も重要な量である. 例えば $\dim\mathcal{O}_\lambda=2n({}^t\lambda)$ が成り立つ. ただし ${}^t\lambda$ は λ の Young 図形を対角線で折り返して得られる分割 (λ の双対分割) を表わす. Kostka 多項式 $K_{\lambda,\mu}(t)$ を変形して, 関数 $\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(t)$ を

$$\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(t)=t^{n(\mu)}K_{\lambda,\mu}(t^{-1})$$

により定義する. $\lambda\ge\mu$ に対し, $\deg K_{\lambda,\mu}=n(\mu)-n(\lambda)$ となることが知られており, それより $\widetilde{K}_{\lambda,\mu}\in\mathbf{Z}[t]$ となる. $\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(t)$ を**変形 Kostka 多項式**という.

さて一般に既約な代数多様体 X の滑らかな開部分多様体 Y 上の定数層 $\mathbf{C}$ を $X=\overline{Y}$ 上の複体にまで DGM 拡大と呼ばれる標準的な方法で拡大できることが知られている. このようにして得られる X 上の複体を交差 cohomology 複体といい, $K=\mathrm{IC}(X,\mathbf{C})$ と表わす. K を複体の次数シフトで移したものが, X 上の単純偏屈層を与える. さて $\mathcal{H}^iK$ を複体 K の 第 i 番目の cohomology 層とする. $\mathcal{H}^iK$ は構成可能層であり, 各点 $v\in X$ での茎 $\mathcal{H}^i_vK$ は X 上の有限次元ベクトル空間になる. 元の設定に戻って $Y=\mathcal{O}_\lambda\subset X=\overline{\mathcal{O}}_\lambda$ に対して交差複体 $K=\mathrm{IC}(\overline{\mathcal{O}}_\lambda,\mathbf{C})$ を考える. このとき奇数 i に対して $\mathcal{H}^iK=0$ が成立する. そこで $v\in\mathcal{O}_\mu$ に対して

$$\mathrm{IC}_{\lambda,\mu}(t)=\sum_{i\ge0}(\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{H}^{2i}_vK)t^i$$

により多項式 $\mathrm{IC}_{\lambda,\mu}(t)$ を定義する. 実際 $\mathrm{IC}_{\lambda,\mu}(t)$ は $v\in\mathcal{O}_\mu$ の取り方によらない. このとき次の定理が Kostka 多項式の幾何的実現を与える.

定理 1 (Lusztig [L1]) $\widetilde{K}_{\lambda,\mu}(t)=t^{n(\lambda)}\,\mathrm{IC}_{\lambda,\mu}(t).$

この定理から $K_{\lambda,\mu}(t)$ は非負整数係数の多項式になることが導かれる．これはきわめて非自明な事実である．この事実に対する組合せ論サイドからのアプローチとしては次の Lascoux-Schüzenberger の定理が知られている．

定理 2 (Lascoux-Schüzenberger) 半標準盤 T に対しチャージ $c(T)$ と呼ばれる数が定義され

$$K_{\lambda,\mu}(t) = \sum_{T} t^{c(T)}$$

と表わされる．ただし和は shape λ, weight μ の半標準盤をすべて動く．(この式で $t = 1$ とすると以前述べた Kostka 数と半標準盤との関係が得られる.)

4. $GL_n(\mathbf{F}_q)$ の表現論

$\mathbf{F}_q$ を q 個の元からなる有限体とし, $\bar{\mathbf{F}}_q$ をその代数的閉包とする．$\bar{\mathbf{F}}_q$ の元を成分とする n 次正則行列全体の集合 $G = GL_n(\bar{\mathbf{F}}_q)$ は代数群になり, 成分を $\mathbf{F}_q$ に制限して得られる部分集合 $G(\mathbf{F}_q) = GL_n(\mathbf{F}_q)$ は G の有限部分群になる．Kostka 多項式はこの有限群の表現論と密接な関係している．以下それを説明しよう．$F : G \to G, (g_{ij}) \mapsto (g_{ij}^q)$ を G の Forobenius 写像とする．F は G から G への準同型写像を与え, G の F 固定点全体の集合 G^F が $G(\mathbf{F}_q)$ に一致する．以下, G^F の $\mathbf{C} \simeq \bar{\mathbf{Q}}_l$ 上の表現を考える．ここに $\bar{\mathbf{Q}}_l$ は q を割らない素数 l に関する l 進数体 $\mathbf{Q}_l$ の代数的閉包を表わす．今 B を上半三角行列全体のなす G の (F 不変な) 部分群とする．B は Borel 部分群と呼ばれる．$\mathrm{Ind}_{B^F}^{G^F} 1$ を B^F の単位表現 1_{B^F} を G^F まで誘導した表現の指標とする．このとき $\mathrm{Ind}_{B^F}^{G^F} 1$ の分解に現れる G^F の既約指標は $W = \mathfrak{S}_n$ の既約指標によってラベル付けされ,

$$\mathrm{Ind}_{B^F}^{G^F} 1 = \sum_{\chi \in W^\wedge} (\deg \chi) \rho^\chi$$

と表わされる．ただし $W^\wedge$ は W の既約指標全体の集合を表わし, ρ^χ は W の既約指標 χ に対応する G^F の既約指標を表わす．さて良く知られているように $W = \mathfrak{S}_n$ の既約指標は $\mathcal{P}_n$ によってラベル付けされる．$\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対応する W の既約指標を $\chi = \chi^\lambda$ とするとき対応する G^F の既約指標 ρ^χ を ρ^λ と表わすことにする．一方 G_{uni} を G の巾単行列全体の集合とすると G は G_{uni} に共役で作用し G_{uni} の巾単共役類の集合 G_{uni}/G は $\mathcal{P}_n$ と 1 対 1 に対応する．さらに各 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ に対し, C_λ を対応する G の巾単共役類とすれば C_λ^F が G^F の単一の共役類を与える．$u_\lambda \in C_\lambda^F$ を共役類の代表元とする．

$G^F = GL_n(\mathbf{F}_q)$ の既約指標は 1955 年 J.A. Green により完全に記述されたが, その核心をなすのが次の結果である．

定理 3. (Green [G]) $\quad \rho^\lambda(u_\mu) = \widetilde{K}_{\lambda,\mu}(q)$.

G^F の既約指標達 $\{\rho^\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}_n\}$ を**巾単指標**という．定理 3 は G^F の巾単指標の巾単類での値が変形 Kostka 多項式で表わされ, したがって定理 2 により ($\mathcal{N} \simeq G_{\mathrm{uni}}$ の同型のもとで) G の巾単類の閉包に関する交差 cohomology を使って記述されることを示している．それでは ρ^λ の他の値はこのように幾何的な手段で記述できるのだろうか．さらに一般の既約指標に関してはどうだろうか．それが全て可能だというのが以下に述べる Lusztig の指標層の理論である．

5. 指標層の理論, $G = GL_n(\bar{\mathbf{F}}_q)$ の場合

前節のように B を G の Borel 部分群とする．$B = UT$ と分解する．ただし T は G の対角行列全体のなす B の部分群 (極大トーラスと呼ばれる), U は対角成分が 1 の上半 3 角行列全体のなす B の正規部分群である．$W = N_G(T)/T$ を G の Weyl 群という．$W \simeq \mathfrak{S}_n$ である．

$$\widetilde{G} = \{(g, xB) \in G \times G/B \mid x^{-1}gx \in B\} \tag{5.1}$$

とおき, $\pi : \widetilde{G} \to G$ を第一成分への射影とする．$\widetilde{G}$ は滑らかな多様体であり, π は proper な射になる．G 上の $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 層のなすアーベル圏から得られる導来圏を $\mathcal{D}G$ とし, 有界で cohomology 層が構成可能層となる複体からなる充満部分圏を $\mathcal{D}^b_cG$ とする．G 上の偏屈層全体のなす圏 $\mathcal{M}G$ は $\mathcal{D}^b_cG$ の部分アーベル圏になる．$\mathcal{D}^b_c\widetilde{G}$ も同様に定義できる．proper 写像 π は導来圏上に順像函手 $R\pi_* : \mathcal{D}^b_c\widetilde{G} \to \mathcal{D}^b_cG$ を誘導する．$R\pi_*\bar{\mathbf{Q}}_l[\dim G]$ を $\widetilde{G}$ 上の定数層 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ の順像とする．(一般に複体 K に対して $K[m]$ は m 回の次数シフトを表わす)．このとき次が成立する．

定理 4. (Lusztig [L1], [L2]) $\widetilde{G}$ 上の定数層 $\bar{\mathbf{Q}}_l$ に対し $R\pi_*\bar{\mathbf{Q}}_l[\dim G]$ は G 上の半単純な偏屈層になり, $\mathrm{End}_{\mathcal{M}G}(R\pi_*\bar{\mathbf{Q}}_l)$ は W 上の群環 $\bar{\mathbf{Q}}_l[W]$ と同型になる．したがって $\mathcal{M}G$ の対象として

$$R\pi_*\bar{\mathbf{Q}}_l[\dim G] = \bigoplus_{\chi \in W^\wedge} V_\chi \otimes A_\chi$$

と分解できる．ただし V_χ は既約 W 加群, A_χ は対応する G の単純偏屈層を表わす．

この結果を G^F の指標の話と結び付けるために $\mathcal{D}^b_cG$ の対象に対する Frobenius 写像 F の効果を考える．一般に $\mathcal{D}^b_cG$ の対象 K に対して F^*K を F による K の引き戻しとする．$F^*K \simeq K$ となるとき K は F 不変であるという．このとき同型 $\varphi : F^*K \to K$ は cohomology 層 $\mathcal{H}^iK$ の $x \in G^F$ での茎上に線形写像 $\varphi^i_x : \mathcal{H}^i_xK \to \mathcal{H}^i_xK$ を導く．$\mathcal{H}^i_xK$ は $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 上の有限次元ベクトル空間であるので

$$\chi_{K,\varphi}(x) = \sum_i (-1)^i \,\mathrm{Tr}\,(\varphi^i_x, \mathcal{H}^i_xK)$$

により関数 $\chi_{K,\varphi} : G^F \to \bar{\mathbf{Q}}_l$ が定義される．$\chi_{K,\varphi}$ を K の (φ に関する) **特性関数**という．ところで偏屈層には G 同変の概念が定義され, K が G 同変な偏屈層の場合, その特性関数は G^F の類関数を与える．特に K が F 不変かつ G 同変な単純偏屈層ならば同型写像 φ はスカラー倍を除いて一意的なので特性関数 $\chi_{K,\varphi}$ もスカラー倍を除いて一意的に定まる．

定理 4 の状況で, $R\pi_*\bar{\mathbf{Q}}_l$ は G 同変かつ F 不変な偏屈層であり, その単純成分 A_χ もまた同じ性質を持つ．$\chi = \chi^\lambda \in W^\wedge$ に対応する A_χ を A_λ と表わすことにし, 同型 $\varphi_\lambda : F^*A_\lambda \to A_\lambda$ を固定する．このとき次が成り立つ．

定理 5. (Lusztig [L2])

(i) φ_λ の適当な正規化のもとで類関数 $\chi_{A_\lambda,\varphi_\lambda}$ は既約指標 ρ^λ に一致する．

(ii) $A_\lambda|_{G_{\mathrm{uni}}} \simeq \mathrm{IC}(\overline{C}_\lambda, \bar{\mathbf{Q}}_l)[\dim C_\lambda + \dim T]$

$\mathrm{IC}(\overline{C}_\lambda, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ と $\mathrm{IC}(\overline{\mathcal{O}}_\lambda, \mathbf{C})$ は本質的に同じ構造を持つ．そこで (i) と合わせて (ii) の主張が定理 1 と定理 3 の主張をカバーしているのである．この A_λ が指標層の例を与える．Lusztig はある種の G 同変単純偏屈層として G の指標層を定義し, F 不変な指標層の特性関数として G^F のすべての既約指標が得られることを示した ([L2]).

6. 指標層の理論, 簡約群への一般化

5 節の議論は一般の連結簡約群に拡張される．実際 $G = GL_n(\bar{\mathbf{F}}_q)$ の話は指標層の理論の最も簡単な場合であり, GL_n 以外の場合には, 色々と複雑な現象が現れる．ここではその違いを簡単に説明しよう．G を $\mathbf{F}_q$ 上定義された連結な簡約代数群, $F : G \to G$ をその Frobenius 写像とする．$B \supset T$ を G の F 不変な Borel 部分群と F 不変な極大トーラスの組とする．G の Weyl 群 $W = N_G(T)/T$ も同様に定義される．(5.1) 式と同様に proper 写像 $\pi : \widetilde{G} \to G$ が定義され $R\pi_*\bar{\mathbf{Q}}_l[\dim G]$ は F 不変な G 同変半単純偏屈層になり定理 4 と同様に分解される．しかし定理 5 はそのままの形では成立しない．(ii) の主張については $A_\chi|_{G_{\mathrm{uni}}} \simeq \mathrm{IC}(\overline{C}_\chi, \mathcal{E}_\chi)[\dim C_\chi + \dim T]$ と表わされる．ここに C_χ は G のある巾単共役類, $\mathcal{E}_\chi$ は C_χ 上の G 同変単純局所系である．組 $(C_\chi, \mathcal{E}_\chi)$ は $\chi \in W^\wedge$ により一意的に定まり $\chi \mapsto (C_\chi, \mathcal{E}_\chi)$ により対応 $f : W^\wedge \to \mathcal{M}_G$ を与える．ただし $\mathcal{M}_G$ は G の巾単類とその上の G 同変単純局所系の組全体の集合である．f は単射になることが知られているが一般に全射ではない．f を Weyl 群の既約指標と巾単類との間の **Springer 対応**という．GL_n の場合の Springer 対応は $\chi^\lambda \mapsto (C_\lambda, \bar{\mathbf{Q}}_l)$ に他ならない．GL_n 以外の場合に C_χ の定数層でない局所系が現れるのは, F 不変な巾単類 C に対して C^F がいくつかの G^F 共役類に分解するという事情によっている．

(i) の主張についても, 同型 $\varphi_\chi : F^*A_\chi \to A_\chi$ に対して特性関数 $\chi_{A_\chi,\varphi_\chi}$ は一般に G^F の既約指標にはならない．しかしその既約指標への分解は簡明な形をしており (例えばその重複度は q によらない), G^F の表現論で重要な役割りを演ずる**概指標**を与える．$GL_n(\mathbf{F}_q)$ の場合, $\chi_{A_\lambda,\varphi_\lambda}$ の G^F_{uni} への制限が変形 Kostka 関数を与えたが, それにならって $\chi_{A_\chi,\varphi_\chi}$ の G^F_{uni} への制限から変形 Kostka 多項式 $\widetilde{K}_{\chi,\chi'}(t) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[t]$ を定義することができる．ただしこの場合は各 $(C, \mathcal{E}) \in \mathcal{M}_G^F$ に対して, G^F_{uni} 上の G^F 不変関数全体のなす空間の基底を与える $\psi_{(C,\mathcal{E})}$ が定まり, $\chi_{A_\chi,\varphi_\chi}$ の展開における $\psi_{(C_{\chi'},\mathcal{E}_{\chi'})}$ の係数が q の多項式として $\widetilde{K}_{\chi,\chi'}(q)$ を与えるのである．Lusztig の指標層の理論の重要なポイントは, 一般の簡約群に対してこの $\widetilde{K}_{\chi,\chi'}(t)$ を計算するアルゴリズムの存在を示したことにある．(実は G^F の既約指標の計算にはさらなる一般化が必要で Lusztig はその場合を扱った．$\widetilde{K}_{\chi,\chi'}(t)$ の場合は筆者による).

さてこのアルゴリズムを実行するためには, Springer 対応の具体的な記述が必要になる．GL_n の場合それは n の**分割**によって記述された．古典群 $Sp_{2n}, SO_{2n+1}, SO_{2n}$ の場合にその役割りを果たすのが Lusztig によって導入された**巾単 symbol** の概念である．巾単 symbol は分割の概念の拡張になっている．ここでは最も簡単な場合である $Sp_4(\mathbf{F}_q)$ の場合を例にあげてその雰囲気を味わってもらうことにする．

例 6.1. $G = Sp_4(\bar{\mathbf{F}}_q)$ とし $G^F = Sp_4(\mathbf{F}_q)$ とする．$G \subset GL_4(\bar{\mathbf{F}}_q)$ の埋め込みのもとで G の巾単共役類は $GL_4(\bar{\mathbf{F}}_q)$ の巾単共役類と G の共通部分として得られる．したがって 4 の分割でラベル付けされ, 以下のようになる．

G の巾単共役類 : $\{(1^4),\ (21^2),\ (22),\ (4)\}$

一方, G^F での巾単共役類は, (22) のクラスが 2 つに分かれ

$$G^F \text{ の巾単共役類：} \{(1^4),\ (21^2),\ (22),\ (22)',\ (4)\}$$

と 5 個のクラスになる．また Weyl 群 W は $W \simeq S_2 \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ であって W の既約指標は 2 個の分割の組 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}; \lambda^{(2)})$ で $|\lambda^{(1)}| + |\lambda^{(2)}| = 4$ となるものによりラベル付けされる．

$$W^\wedge \simeq \{(-;1^2),\ (1^2;-),\ (1;1),\ (-;2),\ (2;-))\}.$$

このとき $W^\wedge$ に付随した巾単 symbol が以下のように与えられる．

$$\text{巾単 symbol：} \left\{ \begin{pmatrix} 0\ 2\ 4 \\ 2\ 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ - \end{pmatrix} \right\}$$

この作り方は, 一般に $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}; \lambda^{(2)}) \in \mathcal{P}_{n,2}$ を適当に 0 を補うことにより $\lambda_1^{(1)} \le \cdots \le \lambda_{m+1}^{(1)}, \lambda_1^{(2)} \le \cdots \le \lambda_m^{(2)}$ と増加順にならべ ($\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ と m の関係に注意) 対応する巾単 symbol $\boldsymbol{\Lambda}$ を

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} + 0, \lambda_2^{(1)} + 2, \dots, \lambda_{m+1}^{(1)} + 2m \\ \lambda_1^{(2)} + 1, \lambda_2^{(2)} + 3, \dots, \lambda_m^{(2)} + (2m-1) \end{pmatrix}$$

により定める．m の取り方により種々の巾単 symbol が得られるがそれらは同じものと見るのである．ここで作った symbol は $W^\wedge$ との全単射に過ぎないが, 単なる分割の組以上の情報を持っている．今 symbol の間に同値関係 $\boldsymbol{\Lambda} \sim \boldsymbol{\Lambda}'$ を symbol に現れる数字が重複度こみで同じであることとして定義すると

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0\ 2\ 4 \\ 2\ 4 \end{pmatrix} \right\},\quad \left\{ \begin{pmatrix} 1\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},\quad \left\{ \begin{pmatrix} 0\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},\quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ - \end{pmatrix} \right\}$$

と同値類に分割する．この同値類が G の巾単共役類と 1 対 1 に対応し, 各 symbol がその G^F への分解を記述する．symbol を介した $W^\wedge$ と巾単類との対応が Springer 対応に他ならない．Sp_4 では $W^\wedge$ に対応する symbol しか現れないが一般にはもっと複雑になる．しかし symbol の同値類が $Sp_{2n}(\bar{\mathbf{F}}_q)$ の巾単類に自然に対応し, 同値類に含まれる symbol の個数はその巾単類に含まれる G^F の巾単類の個数と一致する．(ただしこちらには自然な対応は存在しない.)

W に対する 変形 Kostka 多項式 の表 $\widetilde{K} = (\widetilde{K}_{\chi,\chi'}(t))$ は

(1^4)	$(-;1^2)$	t^4				
(21^2)	$(1^2;-)$	t^2	t^2			
$(2;2)$	$(1;1)$	t^3+t	t	t		
	$(-;2)$	t^2			t	
(4)	$(2;-)$	1	1	1		1

で与えられる．第 1 列が G の巾単共役類, 第 2 列が Springer 対応により対応する Weyl 群の既約指標（分割の組で表わす) である．3 列目以降が変形 Kostka 多項式の値を示している．

7. 複素鏡映群に付随した Kostka 関数

複素鏡映群 $W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^n$ を考える．$r = 1$ の場合, W は GL_n の Weyl 群 $W(A_{n-1})$ に一致し, $r = 2$ の場合 Sp_{2n} の Weyl 群 $W(C_n)$ に一致する．その意味で W は

これらの Weyl 群の自然な拡張と思えるが, 対応する簡約群は存在しない. しいて考えれば W は仮想的な簡約群 Sp_{rn} の Weyl 群と見なされるのである. $r=2$ の場合の拡張として W の既約指標は r 個の分割の組によってラベル付けされる.

$$W^\wedge \simeq \mathcal{P}_{n,r} = \{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}) \mid \sum_{i=1}^{r} |\lambda^{(i)}| = n\}$$

$\mathcal{P}_{n,r}$ の元を n の r-分割という. 一方, 前節に出てきた巾単 symbol の概念はこの場合に拡張できて (巾単) r-symbol が定義される. r-symbol は r 個の行からなり, $r=2$ の場合が本来の巾単シンボルである. さらに r-symbol 自体にもいくつかのバージョンを考えることができる. 実際 $r=2$ の場合でも巾単 symbol の他に $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ の巾単指標をラベル付ける別種のシンボルが導入されているのである. さて Sp_{2n} の Kostka 多項式を計算するアルゴリズム (Weyl 群 $W(C_n)$ に関係している) は, $W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^n$ に対しても意味を持ち, このアルゴリズムにより関数系 $\{K^{\pm}_{\chi,\chi'}(t) \in \mathbf{Q}(t) \mid \chi, \chi' \in W^\wedge\}$ が一意的に定まる. これを複素鏡映群 W に付随した Kostka 関数という (多項式になることが予想されているが apriori には有理関数である).

注意 7.1. 後に説明するように, 複素鏡映群の場合, 上記のアルゴリズムは複素共役を取る操作を含む. その関係で得られる Kostka 関数には $\pm$ の 2 種類が存在する. またこのアルゴリズムは r-symbol の取り方に依存し, r-symbol を変えれば異なった関数系が得られる. その意味で正確には **r-symbol に付随した Kostka 関数** というべきである.

次の結果は, $W = \mathfrak{S}_n$ の場合の Kostka 多項式を定める組合せ論的な枠組みが, この拡張された Kostka 関数にも適用できることを示している.

定理 6. ([S1]) r-symbol に付随して Schur 関数 $s_{\boldsymbol{\lambda}}(x)$ と Hall-Littlewood 関数 $P^{\pm}_{\boldsymbol{\mu}}(x;t)$ ($\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_{n,r}$) が定義され (Schur 関数は r-symbol の取り方によらない), 対応 $W^\wedge \simeq \mathcal{P}_{n,r}$ のもとに, $K^{\pm}_{\chi,\chi'}(t)$ は両者の間の変換行列として得られる.

ここで r-symbol の役割りを明確にしておこう. 6 節で説明した構成を拡張して $W^\wedge$ と r-symbol との全単射が定義される (r-symbol 自体はもっと一般的だが, ここでは $W^\wedge$ に対応する部分のみに話を限定している). すなわち

$$r\text{-symbol の集合} \simeq W^\wedge \simeq \mathcal{P}_{n,r}.$$

Sp_4 の場合と同様に, r-symbol を部分集合 (族) に分割することができる. また分割 λ に対して $n(\lambda)$ が定まるように, r-symbol $\mathbf{\Lambda}$ に対して 値 $a(\mathbf{\Lambda})$ を定義することができる. そこで上の全単射を用いて, 集合 $W^\wedge$ に対して次が得られる.

(i) $W^\wedge$ の部分集合 (族) への分割,
(ii) a 関数 $a : W^\wedge \to \mathbf{Z}_{\geq 0}$ の定義.

Kostka 関数を計算するアルゴリズムではこの 2 つの性質が重要な役割りを果たす. r-symbol の役割りは $W^\wedge$ に対して (i), (ii) を定めることに他ならない. r-symbol を変えれば (i), (ii) が変わり, したがって得られる Kostka 関数も変化するのである.

$Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ の場合の巾単共役類の記述が $GL_n(\mathbf{F}_q)$ に比べて複雑になった原因は, $Sp_{2n}(\bar{\mathbf{F}}_q)$ での巾単共役類が $Sp_{2n}(\mathbf{F}_q)$ でいくつかの共役類に分かれたことによる．これは巾単 symbol を族に分割することに対応する．$W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^n$ の場合も事情は同様で, 族への分割が Kostka 関数の複雑さを反映しているのである．そこで r-symbol をうまく取ることにより, すべての族がただひとつの元からなるようにできれば (自明な同値関係)、状況は GL_n の場合に似て簡単になるであろう．実際そのような r-symbol は存在し, 種々の r-symbol の極限とみることができる．その意味でこの r-symbol を **limit symbol** ということにする．以下に limit symbol に対応する Kostka 関数の例をあげておく．

例 7.2. $W = W(C_2) \simeq \mathfrak{S}_2 \ltimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ の場合の Kostka 関数の比較

$(-;1^2)$	t^4				
$(1^2;-)$	t^2	t^2			
$(1;1)$	t^3+t	t	t		
$(-;2)$	t^2			t	
$(2;-)$	1	1	1		1

本来の Kostka 関数 (6 節参照)

$(-;1^2)$	t^4				
$(1^2;-)$	t^2	t^2			
$(-;2)$	t^2		t^2		
$(1;1)$	t^3+t	t	t	t	
$(2;-)$	1	1	1	1	1

limit symbol に付随した Kostka 関数

8. Kostka 関数計算のアルゴリズム (limit symbol の場合)

ここで limit symbol に付随した Kostka 関数を計算するアルゴリズムを与えておく．$W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})^n$ とし, $W \subset GL(V)$ を W の鏡映群としての実現とする．$W^\wedge \simeq \mathcal{P}_{n,r}$ は $\chi^{\boldsymbol{\lambda}} \leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$ で与えられるとする．$R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i = S(V^*/I_+)$ を W の余不変式環とする．ただし I_+ は 定数でない W 不変な斉次多項式で生成される $S(V^*)$ のイデアルである．R は次数付き W 加群になり, $\dim R = |W|$ となる．W の (既約とは限らない) 指標 f に対して $R(f) = \sum_{i\geq 0} \langle f, R_i \rangle_W t^i \in \mathbf{Z}[t]$ とおく．ここで $\langle\, , \rangle_W$ は W の指標に対する内積を表わす．f が既約な場合, $R(f)$ は f の fake degree または graded degree と呼ばれる．$\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_{n,r}$ に対して

$$\omega_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} = t^{N^*} R(\chi^{\boldsymbol{\lambda}} \otimes \overline{\chi^{\boldsymbol{\mu}}} \otimes \overline{\det}_V)$$

とおく．ここで N^* は W に含まれる複素鏡映の個数, $\det_V$ は V 上の線形変換の行列式を取ることにより得られる W の線形指標である．また $\overline{\chi}$ は指標 χ の複素共役を表わす．$\Omega = (\omega_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}})$ を $\mathcal{P}_{n,r}$ を添字集合とする正方行列とする．

次に $\mathcal{P}_{n,r}$ の支配的順序を次のように定義する．$\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{n,r}$ の各パートに 0 を補うことにより, 適当な m に対して

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \lambda_2^{(1)} & \cdots & \lambda_m^{(1)} \\ \lambda_1^{(2)} & \lambda_2^{(2)} & \cdots & \lambda_m^{(2)} \\ & \vdots & \vdots & \\ \lambda_1^{(r)} & \lambda_2^{(r)} & \cdots & \lambda_m^{(r)} \end{pmatrix}$$

とおく (この場合 m がすべてそろっていることに注意).

$c(\boldsymbol{\lambda}) = (\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_1^{(r)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_2^{(r)}, \dots, \lambda_m^{(1)}, \dots, \lambda_m^{(r)})$ とおく．$c(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^{mr}$ ではあるが，必ずしも分割ではない．しかし 1 節の支配的順序の定義はその場合にも適用でき

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{\mu} \Leftrightarrow c(\boldsymbol{\lambda}) \geq c(\boldsymbol{\mu}), \qquad (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}_{n,r})$$

により $\mathcal{P}_{n,r}$ の支配的順序を定義する．右辺は通常の支配的順序である．さらに $\mathcal{P}_{n,r}$ 上の a 関数を

$$a(\boldsymbol{\lambda}) = r \cdot n(\boldsymbol{\lambda}) + |\lambda^{(2)}| + 2|\lambda^{(3)}| + \cdots + (r-1)|\lambda^{(r)}|$$

により定める．ただし $n(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_i n(\lambda^{(i)})$ である．$r = 1$ の場合 $a(\boldsymbol{\lambda}) = n(\boldsymbol{\lambda})$ であり，a 関数は 3 節の n 関数の拡張になっている．Kostka 関数 $K^{\pm}_{\chi,\chi'}(t)$ を $\chi = \chi^{\boldsymbol{\lambda}}, \chi' = \chi^{\boldsymbol{\mu}}$ に対して $K^{\pm}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ と表わす．変形 Kostka 関数 $\widetilde{K}^{\pm}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ を $\widetilde{K}^{\pm}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t) = t^{a(\boldsymbol{\mu})} K^{\pm}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t^{-1})$ により定義する．

ここで $\mathcal{P}_{n,r}$ に支配的順序と両立するような全順序を定め，次のような $\mathcal{P}_{n,r}$ を添字集合に持つ行列に関する関係式を考える．

$$P^{-} \varLambda\, {}^tP^{+} = \Omega. \tag{8.1}$$

さらに $P^{\pm}$ は $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda})$ 成分が $t^{a(\boldsymbol{\lambda})}$ である下三角行列，$\varLambda$ は対角行列と仮定する．このとき次の結果が成立する．

定理 7. ([S2]) 関係式 (8.1) を $P^{\pm}, \varLambda$ を未知の行列，Ω を既知の行列とする行列方程式とみる．そのとき変形 Kostka 関数 $\widetilde{K}^{\pm}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ は (8.1) の解として $(\widetilde{K}^{\pm}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}) = P^{\pm}$ により一意的に定まる．$\widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t) \in \mathbf{Q}(t)$ である．

注意 8.2. (i) $r = 2$ のとき Ω は対称行列なので $\widetilde{K}^{+}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t) = \widetilde{K}^{-}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ となる．それを $\widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ と表わす．$r \geq 3$ の場合 Ω は非対称なので 両者は一致しない．

(ii) $r = 2$ の場合，$\widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ は多項式になることが知られている ([S2])．

予想 8. 一般に $\widetilde{K}^{\pm}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ は非負整数係数の多項式になることが予想される．

9. Kostka 関数の幾何的実現 ($r = 2$ の場合)

2007 年, Achar-Henderson が $r = 2$ の場合に limit symbol に付随する変形 Kostka 関数の幾何的実現を与えた．以下それを説明する．V を $\mathbf{C}$ 上の n 次元ベクトル空間，$\mathcal{N}$ を巾零錐とする．$G = GL(V)$ の $V \times \mathcal{N}$ への対角的な作用を考える．このとき Achar-Henderson [AH] と Travkin [T] により独立に $V \times \mathcal{N}$ の G 軌道の全体と $\mathcal{P}_{n,2}$ が 1 対 1 に対応することが示された．$\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対応する G 軌道を $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$ と表わすことにする．

$$(V \times \mathcal{N})/G \simeq \mathcal{P}_{n,2}, \qquad \mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}} \leftrightarrow \boldsymbol{\lambda}. \tag{9.1}$$

(9.1) の対応は次のようにして与えられる．$x \in \mathcal{N}$ に対し，$E^x = \{g \in \mathrm{End}(V) \mid gx = xg\}$ とおく．$v \in V$ に対し，$W(v, x) = E^x v$ は V の x 不変な部分空間になる．x の $W(v, x)$ への制限 $x|_{W(v,x)}$ が Jordan type μ を持ち，x の $V/W(v, x)$ への制限 $x|_{V/W(v,x)}$ が Jordan type ν を持つとすると $\boldsymbol{\lambda} = (\mu, \nu) \in \mathcal{P}_{n,2}$ であり, $\mu + \nu \in \mathcal{P}_n$ が x の Jordan type を与えることが確かめられる．このとき (v, x) は type $\boldsymbol{\lambda}$ を持つということにする．

$$(v, x) \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}} \Leftrightarrow (v, x): \text{ type } \boldsymbol{\lambda}$$

が成立し (9.1) の対応を与える．

ここで $Z_G(v, x)$ が連結になっていることに注意する．これは G 軌道が 3 節の巾零軌道と同様の構造を持っていることを意味する．すなわち複素数体から $\bar{\mathbf{F}}_q$ に移って $G = GL(V)$ の軌道を $\mathcal{O}$ とした時, $\mathcal{O}^F$ がひとつの G^F 軌道になっているのである．

さて $\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\lambda}}$ を軌道 $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の閉包とする．3 節の closure relation の類似として次が成立する．

(Closure relation) $$\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\lambda}} = \coprod_{\boldsymbol{\mu} \le \boldsymbol{\lambda}} \mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu}}$$

ここで $\boldsymbol{\mu} \le \boldsymbol{\lambda}$ は 8 節で定義した $\mathcal{P}_{n,2}$ の支配的順序である．

3 節と同様に交差 cohomology 複体 $K = \mathrm{IC}(\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{\lambda}}, \mathbf{C})$ を考える．このとき奇数 i に対して $\mathcal{H}^i K = 0$ が成立する．そこで $(v, x) \in \mathcal{O}_{\boldsymbol{\mu}}$ に対して

$$\mathrm{IC}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t) = \sum_{i \ge 0} (\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}^{2i}_{(v,x)} K) t^i$$

により多項式 $\mathrm{IC}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ を定義する．実際 $\mathrm{IC}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ は $(v, x) \in \mathcal{O}_\mu$ の取り方によらない．このとき Achar-Henderson により次の定理が示された．

定理 9. (Achar-Henderson [AH]) $\widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ を limit symbol に付随した Kostka 関数とする ($r = 2$ の場合)．このとき $\widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t) = t^{a(\boldsymbol{\lambda})} \mathrm{IC}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t^2)$ が成り立つ．

定理 9 の系として次が得られる．

系 10.

(i) $\widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ は非負整数係数の多項式であり, 偶数次または奇数次の項のみが現れる．

(ii) limit symbol に付随した Kostka 多項式と本来の対称群に付随した Kostka 多項式の間に次の関係が成り立つ．

$$\widetilde{K}_{(-;\mu),(-;\nu)}(t) = t^{|\mu|} \widetilde{K}_{\mu,\nu}(t^2), \qquad \widetilde{K}_{(\lambda;-),(\mu;\nu)}(t) = \widetilde{K}_{(\lambda;\mu+\nu)}(t^2).$$

10. Mirabolic 指標層

Lusztig による Kostka 多項式の交差 cohomology 複体による幾何的実現は, 指標層の理論の中で表現論的な意味付けを与えられた．それでは Achar-Henderson による limit symbol に付随する Kostka 多項式の幾何的実現を表現論的に位置づけることはできるのだろうか．実はそれが可能であって, 以下に述べるように Finkelberg-Ginzburg-Travkin によって mirabolic 指標層の理論として構成されている．“mirabolic” とは miracle parabolic から来た造語で,

$v \in V$ の固定群として得られる GL_n の放物部分群 P_n のことをいう. GL_n の表現論が他の簡約群に比べて非常に簡単になるのはこの奇跡的な P_n の存在によるところが大きい. 一方 GL_n の P_n に関する微分作用素のなす環の quantum Hamiltonian reduction は spherical trigonmetric Cherednik 代数 H_n に同型になる. この同型を利用して $V \times GL_n$ 上の $\mathcal{D}$ 加群でその quantum Hamiltonian reduction が H_n の圏 $\mathcal{O}$ に入るものから, Riemann-Hilbert 対応により $V \times GL_n$ 上の (G 同変) 単純偏屈層が得られる. それらは Lusztig の指標層の一般化とみることができて, mirabolic 指標層と名付けられている. 以下では Finkelberg-Ginzburg-Travkin にしたがって $\mathcal{N}$ の代りに $V \times \mathcal{N}$ を考える場合を mirabolic な状況ということにする.

$\mathbf{C}$ から $\bar{\mathbf{F}}_q$ に移って, V,$\mathcal{N}$ を $\bar{\mathbf{F}}_q$ 上で考える. $G = GL_n(\bar{\mathbf{F}}_q)$, $G^F = GL_n(\mathbf{F}_q)$ とする. 4 節の結果をまとめると, $G_{\mathrm{uni}} \simeq \mathcal{N}$ の同型のもとに指標層 $A_{\boldsymbol{\lambda}}$ の特性関数が G^F の既約指標を与え, それの G^F_{uni} への制限が (変形)Kostka 多項式により記述された. また G^F のすべての既約指標が指標層の特性関数で表わされたのであった. そこで G^F の $V^F \times G^F$ への対角作用を考え, $C(V^F \times G^F)$ を $V^F \times G^F$ 上の G^F 不変な関数全体のなす $\bar{\mathbf{Q}}_l$ 上のベクトル空間とする.

$$V \times G \supset V \times G_{\mathrm{uni}} \simeq V \times \mathcal{N}$$

であって, $V \times \mathcal{N}$ への G の作用は $V \times G$ への G の作用から導かれる. さて G^F の既約指標とは G^F 上の類関数の空間 $C(G^F)$ の "良い性質" を持った基底である. そこで $C(V^F \times G^F)$ の何らかの意味で "良い" 性質を持った基底が mirabolic な状況における G^F の既約指標の役割りを果たすことになる. 逆に言えば mirabolic 指標層の特性関数は, このような良い関数を与えていると期待できる. このような状況で Finkelberg-Ginzburg-Travkin は指標層に関する Lusztig の結果が mirabolic な状況でも成立することを示した.

定理 11. (Finkelberg-Ginzburg-Travkin [FGT])

(i) F 不変な mirabolic 指標層の特性関数の全体が $C(V^F \times G^F)$ の基底を与える.

(ii) $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}_{n,2}$ に対して mirabolic 指標層 $A_{\boldsymbol{\lambda}}$ が存在し, $A_{\boldsymbol{\lambda}}$ の特性関数の $V^F \times G^F_{\mathrm{uni}}$ への制限が (limit symbol に付随する) 変形 Kostka 関数 $\widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\bullet}(q)$ を与える.

11. 加藤のエキゾチック巾零錐

9 節の Achar-Henderson の結果は, GL_n 軌道が $W(C_n)$ 型 Weyl 群の既約指標によってラベル付けされる状況を扱っている. $W(C_n)$ 型 Weyl 群が自然に現れるのはもちろん Sp_{2n} を考える場合であるが, Sp_{2n} の Lie 環における巾零軌道は $W(C_n)$ によってラベル付けされないし, またその固定化群は連結にならない. しかし加藤周は Sp_{2n} の Lie 環における巾零錐を, 彼の導入したエキゾチック巾零錐に置き換えることにより Sp_{2n} の作用に関する軌道が $W(C_n)$ の既約指標によりラベル付けされ, 各点での固定化群が連結になることを示した. 実は Achar-Henderson の結果は加藤の結果に強く触発されたものであり, Achar-Henderson の GL_n 作用は Sp_{2n} での複雑な状況が退化したものと見ることができる. 以下に加藤の結果を述べる.

$V \times \mathcal{N}$ を 9 節と同様に取り, $W = V \oplus V^*$ とおく. W は自然に symplectic space とみなせる. $\mathcal{N}_W$ を W の巾零錐とし $\mathfrak{N}_0$ を $\mathcal{N}_W$ に含まれる自己随伴変換の全体とする. $W \times \mathfrak{N}_0$

を**エキゾチック巾零錐**という．$H = Sp(W)$ を W 上の symplectic 群とする．

$$H \supset \{g \in H \mid g(V) = V, g(V^*) = V^*\} \simeq G = GL(V)$$

により G を H の部分群とみなす．一方, $\mathrm{End}\,V \to \mathrm{End}\,W$, $x \mapsto (x, {}^t x)$ により $\mathcal{N}$ は $\{x \in \mathfrak{N}_0 \mid x(V) \subset V, x(V^*) \subset V^*\}$ と同一視できる．すなわち

$$V \times \mathcal{N} \subset \mathfrak{N} = W \times \mathfrak{N}_0 \subset W \times \mathcal{N}_W$$

であって, $V \times \mathcal{N}$ は $\mathfrak{N}$ の G 不変な閉集合であり, $\mathfrak{N}$ は $W \times \mathcal{N}_W$ の H 不変な閉集合になる．このとき次の定理が加藤によって示された (ただし $V \times \mathcal{N}$ や $W \times \mathcal{N}_W$ との関係は Achar-Henderson [AH] による）．

定理 12. (Kato [K1], [K2]) 次の性質をみたす全単射 $\mathfrak{N}/H \simeq \mathcal{P}_{n,2}$ が存在する．$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda; \mu)$ に対応する $\mathfrak{N}$ の H 軌道を $\mathbb{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$ と表わすと, $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}} \subset \mathbb{O}_{\boldsymbol{\lambda}} \subset \mathcal{O}_{\mu\cup\mu;\nu\cup\nu}$. ただし $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対し $\lambda \cup \lambda = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \dots)$ であって $\mathcal{O}_{\mu\cup\mu;\nu\cup\nu}$ は $GL(W)$ 軌道を表わす．

H 軌道 $\mathbb{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の closure relation については $\mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$ と同様の関係が成立する．そこで $\mathbb{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$ に対しても交差 cohomology 複体 $\mathrm{IC}(\overline{\mathbb{O}}_{\boldsymbol{\lambda}}, \mathbf{C})$ が考えられる．これについてはまだ不明な点が多いが次の予想がある．

予想 13.

(i) $i \not\equiv 0 \pmod 4$ に対して $\mathcal{H}^i\,\mathrm{IC}(\overline{\mathbb{O}}_{\boldsymbol{\lambda}}, \mathbf{C}) = 0$.

(ii) $(v, x) \in \mathbb{O}_{\boldsymbol{\mu}}$ に対し $t^{a(\boldsymbol{\lambda})} \sum_i \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}^{4i}_{(v,x)}\,\mathrm{IC}(\overline{\mathbb{O}}_{\boldsymbol{\lambda}}, \mathbf{C}) t^{2i} = \widetilde{K}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$.

12. Kostka 関数の幾何的実現 (r が一般の場合)

本稿の最後に r が一般の場合の変形 Kostka 関数 $\widetilde{K}^{\pm}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ の幾何的実現について考察する．$V, \mathcal{N}$ を 9 節の通りとし, $G = GL(V)$ の $V^{r-1} \times \mathcal{N}$ への対角作用を考える．$r = 1, 2$ の場合, 以前に述べたように G 軌道は有限個になる．しかし $\dim(V \times \mathcal{N}) = \dim G$ であることから $r \ge 3$ の場合 G 軌道の個数は無限になり, 決定的な違いが生ずる．そこで $V^{r-1} \times \mathcal{N}$ を G 軌道に分解する代りに次のように考える．

$(\mathbf{v}, x) \in V^{r-1} \times \mathcal{N}$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{r-1})$ とし, $W_1 = W(v_1, x) = E^x v_1$ を 9 節のように取る．$\overline{V} = V/W(v_1, x)$ とおき, $\bar{v}_2 \in \overline{V}$ を v_2 の像とし, $\bar{x}$ を x から誘導された $\overline{V}$ 上の巾零変換とする．$W_2 \subset V$ を $W_2/W_1 = W(\bar{v}_2, \bar{x}) \subset \overline{V}$ により定義する．以下同様にして x 不変な V の部分空間の列 $0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{r-1} \subset V$ が得られる．各商空間 W_i/W_{i-1} への x の制限の Jordan type が

$$\begin{cases} x|_{W_1} & : \text{type } \lambda^{(1)} \\ x|_{W_2/W_1} & : \text{type } \lambda^{(2)} \\ \quad\vdots & \\ x|_{V/W_{r-1}} & : \text{type } \lambda^{(r)} \end{cases}$$

で与えられたとする．すると $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}) \in \mathcal{P}_{n,r}$ であり, $\lambda^{(1)} + \cdots + \lambda^{(r)} \in \mathcal{P}_n$ が x の Jordan type を与えることが分かる．このとき $(\mathbf{v}, x) \in V^{r-1} \times \mathcal{N}$ は type $\boldsymbol{\lambda}$ を持つとい

うことにする．V の部分集合 $X_{\boldsymbol{\lambda}}$ を type $\boldsymbol{\lambda}$ を持つ元全体の集合として定義する．$r=1,2$ の場合 $X_{\boldsymbol{\lambda}}=\mathcal{O}_{\boldsymbol{\lambda}}$ であるが, 一般には $X_{\boldsymbol{\lambda}}$ は無限個の G 軌道の和集合になる．このとき次が成立する．((ii) は定義からの当然の帰結).

命題 14. (i) $X_{\boldsymbol{\lambda}}$ は滑らかで既約な $V^{r-1}\times\mathcal{N}$ の局所閉集合になる．
(ii) $V^{r-1}\times\mathcal{N}=\coprod_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathcal{P}_{n,r}}X_{\boldsymbol{\lambda}}$.

例 12.1. $n=1, r=3$ とする．$G=GL_1(\mathbf{C})\simeq\mathbf{C}^*$, $V=\mathbf{C}$, $\mathcal{N}=\{0\}$ なので $V^{r-1}\times\mathcal{N}\simeq\mathbf{C}^2$. このとき $\mathcal{P}_{1,3}=\{(-;-;1)<(-;1;-)<(1;-;-)\}$ であって

$$X_{(-;-;1)}=\{(0,0)\},\quad X_{(-;1;-)}=\{0\}\times\mathbf{C}^*,\quad X_{(1;-;-)}=\mathbf{C}^*\times\mathbf{C}$$

となる．

次に旗多様体との関係を調べる．$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(r)})\in\mathcal{P}_{n,r}$ に対し分割 $\lambda^{(i)}$ の双対分割を ${}^t\lambda^{(i)}=(\mu^{(i)}_1\le\mu^{(i)}_2\le\cdots\le\mu^{(i)}_{\ell_i}),\quad \ell_i=\lambda^{(i)}_1$ とおいて

$$(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_r})=(\mu^{(1)}_1,\dots,\mu^{(1)}_{\ell_1},\mu^{(2)}_1,\dots,\mu^{(2)}_{\ell_2},\dots)$$

と表わす．$\boldsymbol{\lambda}$ に付随した（一般化された) 旗多様体 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}$ を

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}=\{0=V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_r}=V\mid\dim V_i=\nu_1+\cdots+\nu_i\}$$

により定義し, $\widetilde{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{\lambda}}$ を

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{\lambda}}=\{(\mathbf{v},x,(V_k))\in V^{r-1}\times\mathcal{N}\times\mathcal{F}_{\boldsymbol{\lambda}}\mid x(V_k)\subset V_{k-1},\forall k, v_i\in V_{\ell_1+\cdots+\ell_i}\forall i\}$$

により定義する．$\pi_{\boldsymbol{\lambda}}:\widetilde{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{\lambda}}\to V^{r-1}\times\mathcal{N}$ を自然な射影とする．このとき次が成立する．

命題 15.

(i) $\widetilde{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{\lambda}}$ は滑らかで既約.
(ii) $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}:\widetilde{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{\lambda}}\to V^{r-1}\times\mathcal{N}$ は proper.
(iii) $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}(\widetilde{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{\lambda}})=\overline{X}_{\boldsymbol{\lambda}}$.

特に $\pi_{\boldsymbol{\lambda}}:\widetilde{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{\lambda}}\to\overline{X}_{\boldsymbol{\lambda}}$ は $\overline{X}_{\boldsymbol{\lambda}}$ の特異点還元を与える．

ここで記号を導入する．$i=1,\dots,r$ に対して $\mu^{(i)}\le\lambda^{(i)}$ が成立するとき $\boldsymbol{\mu}\trianglelefteq\boldsymbol{\lambda}$ と書く．特にこの場合各 i に対して $|\lambda^{(i)}|=|\mu^{(i)}|$ となることに注意する．${}^t\boldsymbol{\lambda}=({}^t\lambda^{(1)},\dots,{}^t\lambda^{(r)})$ と表わす．$K_{\lambda,\mu}$ を通常の Kostka 数とするとき $\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}_{n,r}$ で $\boldsymbol{\mu}\trianglelefteq\boldsymbol{\lambda}$ となるものに対して

$$K_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}=K_{\lambda^{(1)},\mu^{(1)}}K_{\lambda^{(2)},\mu^{(2)}}\cdots K_{\lambda^{(r)},\mu^{(r)}}$$

と定める．$X_{\boldsymbol{\lambda}}$ の閉包 $\overline{X}_{\boldsymbol{\lambda}}$ に関して交差 cohomology 複体 $\mathrm{IC}(\overline{X}_{\boldsymbol{\lambda}},\mathbf{C})$ を考える．次の定理は $r=2$ の場合の Achar-Henderson の結果 ([AH]) の拡張になっている．

定理 16.

$$R(\pi_{\boldsymbol\lambda})_*\mathbb{C}[\dim X_{\boldsymbol\lambda}] = \bigoplus_{\boldsymbol\mu \trianglelefteq \boldsymbol\lambda} K_{{}^t\boldsymbol\mu, {}^t\boldsymbol\lambda}\,\mathrm{IC}(\overline{X}_{\boldsymbol\mu}, \mathbb{C})[\dim X_{\boldsymbol\mu}].$$

さて $X_{\boldsymbol\lambda}$ は単一の G 軌道ではないので closure relation はより複雑になるが, 次の弱い結果は成り立つ.

(Closure relation) $$\overline{X}_{\boldsymbol\lambda} \subseteq \coprod_{\boldsymbol\mu \le \boldsymbol\lambda} X_{\boldsymbol\mu}$$

$\boldsymbol\mu \le \boldsymbol\lambda$ は $\mathcal{P}_{n,r}$ の支配的順序である. 一般に等号は成立せず, しかも $\boldsymbol\mu \le \boldsymbol\lambda$ に対して $X_{\boldsymbol\mu} \cap \overline{X}_{\boldsymbol\lambda} \subsetneq X_{\boldsymbol\mu}$ となることが起きる. そこで closure relation を記述するためには $X_{\boldsymbol\mu}$ をさらに細分する必要が生じる. $z = (\mathbf{v}, x) \in X_{\boldsymbol\mu}$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{r-1})$ とする. $j = 1, \dots, r-1$ に対して U_j を $v_1, v_2, \dots, v_j$ によって生成された V の $\mathbf{C}[x]$ 部分加群とする. j を固定し $\overline{V} = V/U_j$ とおく. U_j は x 不変な部分空間なので x から誘導された $\overline{V}$ 上の変換を $\bar{x}$ と表わす. $j = 0, 1, \dots, r-1$ に対して $z_j = (\bar{v}_{j+1}, \bar{x}) \in \overline{V} \times \mathcal{N}_{\overline{V}}$ とおく. ただし $\bar{v}_{j+1}$ は v_{j+1} の $\overline{V}$ への像である. z_j の type を $\boldsymbol\mu^j \in \mathcal{P}_{n_j,2}$ とする ($n_j = \dim \overline{V}$). 今 $z, z' \in X_{\boldsymbol\mu}$ に対して, z_j と z'_j がすべての j で同じタイプ $\boldsymbol\mu^j$ を持つとき, $z \sim z'$ として $X_{\boldsymbol\mu}$ の同値関係を定義する. この同値類を $X_{\boldsymbol\mu,\alpha}$ ($\alpha \in I_{\boldsymbol\mu}$) と表わす. したがって $X_{\boldsymbol\mu}$ は

$$X_{\boldsymbol\mu} = \coprod_{\alpha \in I_{\boldsymbol\mu}} X_{\boldsymbol\mu,\alpha}$$

と細分される. 次の結果は上記の Closure relation の精密化である.

命題 17. $I_{\boldsymbol\mu}(\boldsymbol\lambda) = \{\alpha \in I_{\boldsymbol\mu} \mid X_{\boldsymbol\mu,\alpha} \cap \overline{X}_{\boldsymbol\lambda} \ne \emptyset\}$ とおく. このとき

$$\overline{X}_{\boldsymbol\lambda} = \coprod_{\boldsymbol\mu \le \boldsymbol\lambda} \coprod_{\alpha \in I_{\boldsymbol\mu}(\boldsymbol\lambda)} X_{\boldsymbol\mu,\alpha}.$$

ここで交差 cohomology 複体 $K = \mathrm{IC}(\overline{X}_{\boldsymbol\lambda}, \mathbf{C})$ に戻る. $r = 2$ の場合と同じく i が奇数のとき $\mathcal{H}^i K = 0$ となることが確かめられる. そこで $(\mathbf{v}, x) \in X_{\boldsymbol\mu,\alpha}$ に対して

$$\mathrm{IC}^-_{\boldsymbol\lambda;\boldsymbol\mu,\alpha}(t) = \sum_{i \ge 0} (\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}^{2i}_{(\mathbf{v},x)} K) t^i$$

とおく. $\mathrm{IC}^-_{\boldsymbol\lambda;\boldsymbol\mu,\alpha}(t)$ は $(\mathbf{v}, x) \in X_{\boldsymbol\mu,\alpha}$ の取り方によらない. $r = 2$ の場合の拡張として次が成り立つと予想される.

予想 18. 各 $\boldsymbol\mu \in \mathcal{P}_{n,r}$ に対して次の性質をみたす $\alpha_0 \in I_{\boldsymbol\mu}$ が存在する.

$$\widetilde{K}^-_{\boldsymbol\lambda,\boldsymbol\mu}(t) = t^{a(\boldsymbol\lambda)}\,\mathrm{IC}^-_{\boldsymbol\lambda;\boldsymbol\mu,\alpha_0}(t^r).$$

講演では定理として述べたけれど, 証明の不備が見つかって今のところ予想にとどまっている. また $\widetilde{K}^+_{\boldsymbol\lambda,\boldsymbol\mu}(t)$ についてはそれがどのような幾何的表示を持つか不明である. $n = 2$ なら

すべての r で, $n=3, r=3$ でも予想は正しい. $r=2$ の場合と同様に, 予想が正しければ次が導かれる.

系 19. 予想 18 が成立するとする. そのとき次が成り立つ

(i) $\widetilde{K}^{-}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ は非負整数係数の多項式で $i \equiv a(\boldsymbol{\lambda}) \pmod r$ 次の項のみが現れる.
(ii) $\lambda^{(1)} = \mu^{(1)} = \emptyset$ とし, $\boldsymbol{\lambda}' = (\lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(2)})$, $\boldsymbol{\mu}' = (\mu^{(2)}, \dots, \mu^{(r)})$ とする. このとき

$$\widetilde{K}^{-}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t^{r-1}) = t^{(r-1)|\lambda^{(2)}|+(r-2)|\lambda^{(3)}|+\cdots+|\lambda^{(r)}|}\widetilde{K}^{-}_{\boldsymbol{\lambda}',\boldsymbol{\mu}'}(t^r).$$

最後に $\widetilde{K}^{\pm}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)$ の例をあげておく.

例 12.2. $n=2, r=3$ とする. したがって $W \simeq \mathfrak{S}_2 \ltimes (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$. このとき

$$(\widetilde{K}^{-}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)) = \begin{pmatrix}
t^7 & & & & & & & & \\
t^5 & t^5 & & & & & & & \\
t^4 & 0 & t^4 & & & & & & \\
t^3 & t^3 & 0 & t^3 & & & & & \\
t^6+t^3 & t^3 & t^3 & 0 & t^3 & & & & \\
t^5+t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & t^2 & & & \\
t^2 & t^2 & t^2 & 0 & t^2 & 0 & t^2 & & \\
t^4+t & t^4+t & t & t & t & t & t & t & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix},$$

$$(\widetilde{K}^{+}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}}(t)) = \begin{pmatrix}
t^7 & & & & & & & & \\
t^3 & t^5 & & & & & & & \\
t^4 & 0 & t^4 & & & & & & \\
t^5 & 0 & 0 & t^3 & & & & & \\
t^5+t^2 & t^4 & t^2 & 0 & t^3 & & & & \\
t^6+t^3 & 0 & t^3 & t & 0 & t^2 & & & \\
1 & t^2 & 1 & 0 & t & 0 & t^2 & & \\
t^4+t & t^3 & t & t^2 & t^2 & 0 & 0 & t & \\
t^2 & 0 & t^2 & 1 & 0 & t & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

References

[AH] P.N. Achar and A. Henderson; Orbit closures in the enhanced nilpotent cone, preprint.

[FGT] M. Finkelberg, V. Ginzburg and R. Travkin; Mirabolic affine Grassmannian and character sheaves, preprint.

[G] J.A. Green; The charactes of finite general linear groups, Trans. Am. Math. Soc., **80** (1955), 402-447.

[K1] S. Kato; An exotic Deligne-Langlands correspondence for symplectic groups, preprint, arXiv:math.RT/0601155.

[K2] S. Kato; An exotic Springer correspondence for symplectic groups, preprint, arXiv:math.RT/0607478.

[L1] G. Lusztig; Green polynomials and singularities of unipotent classes, Adv. in Math. **42** (1981), 169-178.

[L2] G. Lusztig; Character sheaves, I Adv. in Math. **56** (1985), 193–237, II Adv. in Math. **57** (1985), 226–265, III, Adv. in Math. **57** (1985), 266–315, IV, Adv. in Math. **59** (1986), 1–63, V, Adv. in Math. **61** (1986), 103–155.

[S1] T. Shoji; Green functions associated to complex reflection groups, J. Algebra **245** (2001), 650-694.

[S2] T. Shoji; Green functions attached to limit symbols, in "Representation theory of algebraic groups and quantum groups", Adv. Stud. Pure Math., **40**. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004, 443–467.

[T] R. Travkin; Mirabolic Robinson-Schensted-Knuth correspondence, preprint.