

カルタン行列とその周辺の話題について

第54回代数学シンポジウム (明治大学)
2009年8月3日 (月)

佐藤真久 (山梨大学)

1. はじめに

この報告集では、カルタン行列に関係する古典的な結果から、作用素代数から導入された Mutation と呼ばれる概念の利用に至る多元環の表現論の流れを解説するのが目的である。全体の詳細な結果を述べるのは難しいが、どのような方向性で何を調べていくかについてご理解頂ければ幸いである。

この報告集では、次の4つ話題を中心に解説を行っている。

1. カルタン行列問題
2. Reflection から Mutation へ
 - (1) 古典理論再考
 - (2) Mutation と Coxeter 変換
3. Coxeter 行列の Periodicity について
4. Coxeter 行列に関する他の話題

これらは、多元環の表現論の中で独立した話題であるのではなく、互いに関連しているものである。カルタン行列や Coxeter 行列は、多元環の表現論創成期の考察で重要な役割を担ったが、これらの持つ代数的な状況が、ホモロジー代数を用いて記述されたことによって、多元環の表現論に大きな進展がもたらされ、現在の研究の主流になりつつある、加群の Derived カテゴリーの考察に至る活発な研究へと導かれている。この最新の研究のなかで、改めてカルタン行列や Coxeter 行列の注目すべき役割があることも、この報告集で述べたいことの一つである。加群の Derived カテゴリーを用いての多元環の表現論はまだ始まったばかりと言える。その意味で、かつての研究のように、これらは更にホモロジー代数等の何らかの代数的な良い記述を持つ可能性が十分にある。代数幾何学で扱われていた Derived カテゴリーと同一のものが出現し、非可換代数幾何学等と、深いところで研究対象が結びついている可能性も予見される状況であることを見据えて、さらに深く考察がなされることを期待するものである。

2. カルタン行列問題

環 R はアルティン環とする。環 R を右 R 加群として $R = \sum \oplus e_{ij}R$ と直既約分解する。ここで、各 i, j について $e_{i1}R \cong e_{ij}R$ であり、 $\{e_1 = e_{11}, \dots, e_n = e_{n1}\}$ は非同型な直既約射影加群を与える直交原始冪等元の全体となるように番号付けを行う。

アルティン環 R の Jacobson 根基 (極大右イデアルの共通集合) を J とすると、各射影加群 e_iR は、唯一の極大部分加群 e_iJ を持つ。その極大部分加群での商加群として定まる単純加群を $S_i = e_iR/e_iJ$ ($i = 1, \dots, n$) とおくと、これらは全ての単純右 R 加群の同型類を与える。この設定で、アルティン環 R のカルタン行列は、次のように定義される。

定義 1. e_jR の組成剰余加群として S_i が、 c_{ij} 個現れるとする。このとき、 n 次の正方行列

$$\mathbf{C}_R = (c_{ij})$$

を、このアルティン環 R の カルタン行列 という。

$K_0(R)$ を R の \mathbb{Q} 上の Grothendieck 群とする。(即ち、 $K_0(R)$ は、有限生成 R 加群の同型類を基底に持つベクトル空間に、完全列 $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$ から定まる関係式 $[M_1] + [M_3] = [M_2]$ を入れたベクトル空間である。ここで、 $[M]$ は、 R 加群 M の同型類を意味する記号である。)

定義より

$$([e_1R] [e_2R] \dots [e_nR]) = ([S_1] [S_2] \dots [S_n])\mathbf{C}$$

であり、有限生成加群は組成列を持つので、 $[S_1], [S_2], \dots, [S_n]$ は、 $K_0(R)$ の基底をなす。よって、 $\{[e_1R] [e_2R] \dots [e_nR]\}$ が $K_0(R)$ の基底である必要十分条件は、 $|\mathbf{C}_R| \neq 0$ で与えられる。

これに関して、次の結果は基本的である。

定理 1 (Eilenberg 1954 年). アルティン環 R の大局次元が有限なら、ある整数係数正方行列 \mathbf{D} があり、 $\mathbf{C}_R\mathbf{D}$ が単位行列となる。これから、 $|\mathbf{C}_R| = \pm 1$ が成立する。

この証明は、単純加群 S_j の射影分解 $0 \rightarrow P_{nj} \rightarrow \dots \rightarrow P_{0j} \rightarrow S_j \rightarrow 0$ から、 $[S_j] = [P_{0j}] - [P_{1j}] + \dots + (-1)^n [P_{nj}]$ に、 P_{ij} の直既約分解 $P_{ij} = (e_1R)^{c_{1ij}} \oplus \dots \oplus (e_nR)^{c_{nij}}$ から、 $[P_{ij}] = c_{1ij}[e_1R] + \dots + c_{nij}[e_nR]$ を代入して、 $[e_jR]$ 毎に整理すると、行列 \mathbf{D} が得られる。

このなかで、行列式の値が -1 にある例は知られていない。そこで、次の予想がたてられている。

カルタン行列予想

$$|\mathbf{C}_R| = 1$$

この予想が成立する代表例は、次数付き多元環である。最初に、Wilson [11] が 1983 年に正次数付き多元環で、次数零の部分が基礎体となっている場合を証明し、続いて Igusa [4] が 1992 年に一般の次数付き多元環で証明を与えている。なお、知られた結果を統合する形を、Yamagata [13] が 1993 年に与えていることに注意しておく。

群環では次の結果が古くから知られている。([1] 参照)

定理 2 (中山 1938 年, Brauer 1939 年). $K[G]$ を代数閉体 K 上の有限群 G の群環とする。 K を正標数 p を持つ体で、 p は G の位数を割るとすると、ある正整数係数行列 \mathbf{D} があり、

$$\mathbf{C}_R = {}^t \mathbf{D} \mathbf{D}$$

となる。

実際、 $\{Z_1, \dots, Z_m\}$ を $\mathbb{C}[G]$ 上の単純加群とすると、

$$([Z_1/pZ_1] [Z_2/pZ_2] \dots [Z_m/pZ_m]) = (S_1 S_2 \dots S_n) \mathbf{D}$$

で与えられる。群環に関しては、第 5 章で幾つかの話題を取り上げる。

これに関連する予想として、次のような予想がある。

Self-Extension 予想 (No loop 予想)

R の大局次元が有限なら、 $c_{11} = c_{22} = \dots = c_{nn} = 1$ である。

この予想は、体上の有限次多元環については、Lenzing [5] により肯定的に解決されている。さらに強い予想として、次の予想がある。

Strong Loop 予想

単純加群 S について、 S の射影次元が有限なら、次が成立する。

$$\text{Ext}_R^1(S, S) = 0$$

Automorphism 予想

Φ を R の自己同型とし、 $\Phi : \text{mod-}R \rightarrow \text{mod-}R$ の自己同型へ拡張したとき、 R の大局次元が有限なら、次が成立する。

$$\text{Ext}_R^1(S, \Phi(S)) = 0$$

カルタン行列問題への展望

カルタン行列問題を考えるとき、連続変換の考えで解決できないであろうか。即ち、体 K 上の d 次元 K 多元環 $R = v_1K \oplus \cdots \oplus v_dK$ を、基底の乗法 $v_i v_j = \sum_{k=1}^d d_{ij}^k v_k$ より生じる構造定数 $\{d_{ij}^k\} \subset K^{d^3}$ を用いてアフィン空間の点に埋め込んで、代数多様体 $Alg_d K$ として捉え、この多様体の連結性を問題にするのである。

そこで、次のような対応を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
 Alg_d K & \xrightarrow{C} & M_{d^3}(K) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{Z} \\
 \cup & & \cup & & \cup \\
 FAlg_d K & \xrightarrow{C} & \mathcal{U} & \xrightarrow{\det} & \{1, -1\} \\
 \cup & & \cup & & \cup \\
 R & \mapsto & \mathbf{C}_R & \mapsto & |\mathbf{C}_R|
 \end{array}$$

ここで、 $F_1 Alg_d K, F_{-1} Alg_d K$ は、大局次元有限で、各々 $|\mathbf{C}_R| = \pm 1$ の多元環 R の集合で、 $FAlg_d K = F_1 Alg_d K \dot{\cup} F_{-1} Alg_d K$ かつ $\mathcal{U} = \det^{-1}(\pm 1)$ である。

通常の Zarisky 位相では、これらは連結ではないので、発想を変えて、連結になるような位相が存在するか、を調べてみては良いのではないだろうか。

問題： 次のような位相が $Alg_d K$ に入るか？

(1) C が連続

(2) $F_1 Alg_d K = (\det \cdot C)^{-1}(1) \cap FAlg_d K$ が $FAlg_d K$ で連結集合

実際、通常の位相 (Zarisky 位相) では連結でない例をあげておく。

例 1. 2 行 2 列の行列環 S の同型類の閉包には、次のような大局次元が無限である中山環 (単列環) が入る。

$$R = (\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{22})K \oplus (\mathbf{e}_{33} + \mathbf{e}_{44})K \oplus \mathbf{e}_{14}K \oplus \mathbf{e}_{32}K$$

ここで、 $\{e_{ij}\}$ は、行列単位系である。

実際、基底に対して、次で定義される双線形写像を考える。

$$\begin{array}{l}
 F(\mathbf{e}_{14}, \mathbf{e}_{32}) = \mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{22}, \quad F(\mathbf{e}_{32}, \mathbf{e}_{14}) = \mathbf{e}_{33} + \mathbf{e}_{44} \\
 \text{他の基底 } u, v \text{ で } \quad F(u, v) = 0
 \end{array}$$

この F を用いて、 $0 \leq t \leq 1$ となる実数 t に対し、 R の要素 u, v に対する乗法を、 $f_t(u, v) = uv + tF(u, v)$ で定義する。この対応で決まる連続関数 $f: [0, 1] \rightarrow Alg_d K$ を考えると、 $f_0 = R, f_t = S (t \neq 0)$ より上記のことがわかる。

3. REFLECTION から MUTATION へ

3.1. 古典理論.

3.1.1. **2次形式のカルタン行列.** $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ を点集合 $\Delta_0 = \{1, \dots, n\}$ と矢印集合 Δ_1 よりなるグラフとする。点 i から点 i へ $\alpha_i - 1$ 本の矢印 (即ち Δ_1 の元)、点 i から点 j へ β_{ij} 本の矢印 (ただし、 $i \neq j$) があるとする。これらを、 $i \circ \overset{\alpha_i - 1}{\circ}$, $i \overset{\beta_{ij}}{\circ} \circ j$ のように書く。また、ここでは、混乱が無い限り、有向グラフと向きの無いグラフを同じ記号で書くことにする。

有向グラフ Δ のカルタン行列は、

$$C_\Delta = (c_{ij}), c_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & i = j \\ -\beta_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

で、有向グラフ Δ の2次形式は、

$$B_\Delta(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 - \sum_{i \neq j} \beta_{ij} x_i x_j = {}^t \mathbf{x} C_\Delta \mathbf{x}$$

で定義される。

有向グラフ Δ の双1次形式も、2次形式から

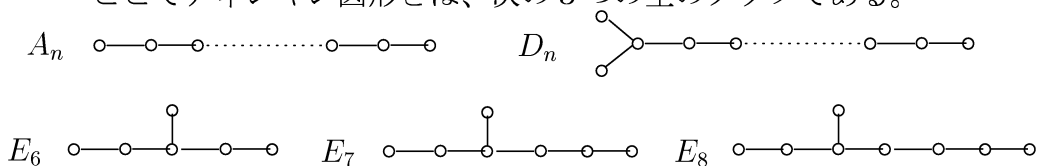
$$B_\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t \mathbf{y} C_\Delta \mathbf{x} = \frac{1}{2} (B_\Delta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - B_\Delta(\mathbf{x}) - B_\Delta(\mathbf{y}))$$

と自然に定義する。

これに関する基本的な結果は次の定理である。([3] 等に詳細が解説されている)

定理 3. 体 K は、代数閉体とする。 Δ が、木 (Tree) のとき、 $B_\Delta(\mathbf{x})$ が正定値2次形式である必要十分条件は、 Δ がディンキン図形である。

ここでディンキン図形とは、次の5つの型のグラフである。

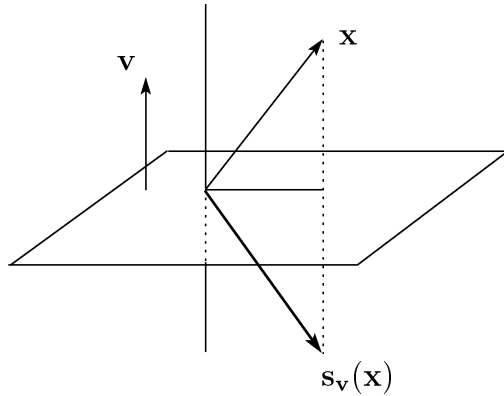


3.1.2. Reflection (鏡映). (1) ベクトルの Reflection

$B(\mathbf{x})$ を正定値2次形式、 $B(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を2次形式に対応する双1次形式とする。ベクトル $\mathbf{v} \in K^n$ に関する Reflection を、次の式で定義される線形写像 $s_{\mathbf{v}} : K^n \rightarrow K^n$ とする。

$$s_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - B(\mathbf{x}, \mathbf{v})\mathbf{v}$$

特に、基本ベクトル \mathbf{e}_i に関する Reflection を、**ワイル変換** という。

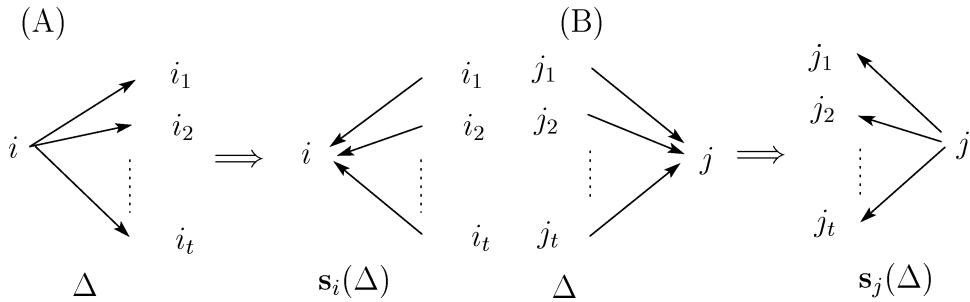


(2) 有向グラフの Reflection

Δ を loop の無い有向グラフとする。

(A) 点 i がソース (i に入る矢印が無い点) のとき、 Δ の点 i に関する Reflection $s_i(\Delta)$ を、点 i から出る矢印を逆にした有向グラフとする。

(B) 点 j がシンク (j から出る矢印が無い点) のとき、 Δ の点 j に関する Reflection $s_j(\Delta)$ を、点 j に入る矢印を逆にした有向グラフとする。

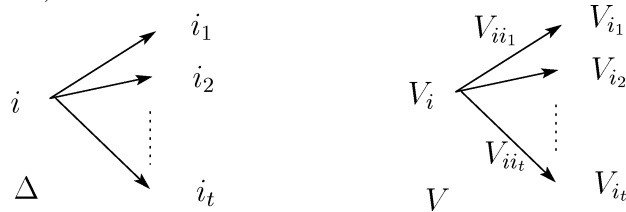


(3) 表現の Reflection

有向グラフ Δ の表現 $V = (V_i; V_{ij})$ とは、点 i に対し、ベクトル空間 V_i を対応させ、矢印 $i \rightarrow j$ に対し、線形写像 $V_{ij} : V_i \rightarrow V_j$ を対応させたものである。

$\dim V = (\dim_K V_1, \dots, \dim_K V_n)$ を、表現 V の次元列という。

(A) ソース i とその近傍での表現

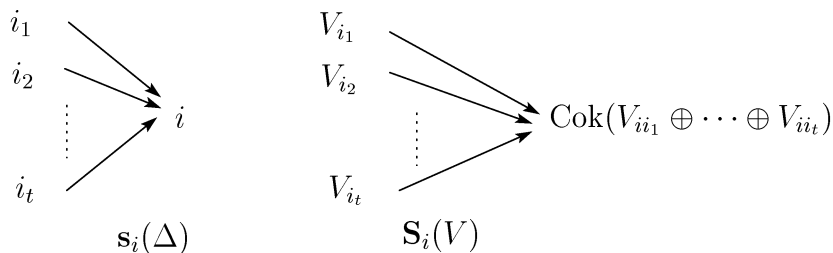


に対し、 V の点 i に関する Reflection $\mathbf{S}_i(V)$ を、完全列

$$V_i \rightarrow V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_t} \rightarrow \text{Cok}(V_{ii_1} \oplus \cdots \oplus V_{ii_t}) \rightarrow 0$$

で決まる $s_i(\Delta)$ の表現として、次のように決める。

$\mathbf{S}_i(V)_i = \text{Cok}(V_{ii_1} \oplus \cdots \oplus V_{ii_t})$ として、 $\mathbf{S}_i(V)_{i_j i} = V_{i_j} \rightarrow \mathbf{S}_i(\Delta)_i$ を余核への自然な写像とする。



(B) シンク i とその近傍での表現

核 $\text{Ker}(V_{ii_1} \oplus \cdots \oplus V_{ii_t})$ を取ることで、上記と同様に決める。

3.1.3. 直既約表現. 2つの表現 $V = (V_i; V_{ij}), W = (W_i; W_{ij})$ の直和を、 $V \oplus W = (V_i \oplus W_i; V_{ij} \oplus W_{ij})$ と決める。表現 V が零表現 $(0; 0)$ 以外に直和因子を持たないとき、**直既約表現** と呼ばれる。直既約表現に関しては、Reflection が次の定理のように、都合の良い性質を持つ。

定理 4. 直既約表現に対して、写像 $V_{ii_1} \oplus \cdots \oplus V_{ii_t}$ は単射になる。従って、次の短完全列が得られる。

$$0 \rightarrow V_i \rightarrow V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_t} \rightarrow \text{Cok}(V_{ii_1} \oplus \cdots \oplus V_{ii_t}) \rightarrow 0$$

このとき、次が成立する。

$$\underline{\dim} \mathbf{S}_i(V) = s_i(\underline{\dim} V)$$

Reflection と 2 次形式の間には、次のように非常に密接な関係が成立している。

定理 5. (1) $B_\Delta(\underline{\dim} V) = B_\Delta(s_i(\underline{\dim} V))$

即ち、鏡映で 2 次形式の値は不変である。

(2) Δ を、ディンキン図形とする。 V が直既約表現である必要十分条件は、 $B_\Delta(\underline{\dim} V) = 1$ となることである。

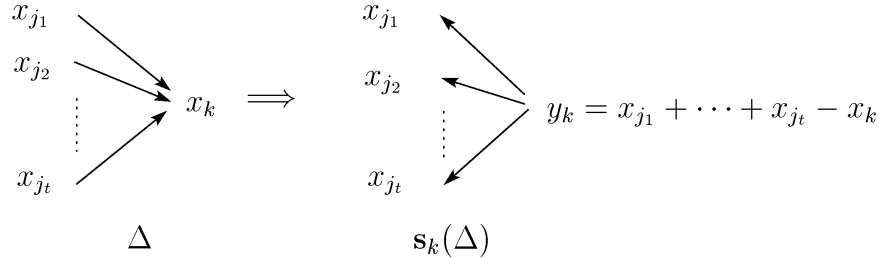
即ち、 $\underline{\dim} V$ がルートとなることである。

(3) Δ を、ディンキン図形とする。 V が直既約表現のとき、 $s_i(\underline{\dim} V) > 0$ なら、 $\mathbf{S}_i(V)$ も直既約表現になる。

特に、 $V_{ii_1} \oplus \cdots \oplus V_{ii_t}$ が全射のとき

$$\underline{\dim} V = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{s}_i(\underline{\dim} V) = (y_1, \dots, y_n)$$

とすると、 $x_i = y_i$ ($i \neq k$) で、 y_k は次のようになる。



3.1.4. Coxeter 変換. 有向グラフ Δ を、向きを考えない図形が木 (Tree) であるものとする。 $\{i_1, \dots, i_n\}$ を Δ の全ての点とし、 i_1 は Δ のシンク (ソース) であり、 i_{j+1} は $\mathbf{s}_{i_j} \dots \mathbf{s}_{i_1}(\Delta)$ のシンク (ソース) となるように並んでいるとする。このとき、

$$\Phi_\Delta = \mathbf{s}_{i_n} \dots \mathbf{s}_{i_1}$$

を、有向グラフ Δ の **Coxeter 変換** と呼ぶ。この変換に関する基本的な結果は次のものである。 ([3] 等を参照)

定理 6. 次の事実が成立する。

- (1) $\Phi_\Delta(\Delta) = \Delta$
- (2) Δ がディンキン図形である必要十分条件は、ある自然数 h があり $\Phi_\Delta^h = \mathbf{E}$ となることである。
この自然数 h を **Coxeter 数** という。実際、 $h(A_n) = n+1$, $h(D_n) = 2n-2$, $h(E_6) = 12$, $h(E_7) = 18$, $h(E_8) = 30$ である。
- (3) $\Phi_\Delta = -\mathbf{C}_\Delta^{-1t} \mathbf{C}_\Delta$
- (4) $\mathbf{C}_\Delta^{-1} = \mathbf{C}_R$
ここで、多元環 R は、 K 上の n 次正方形のなす行列環 $(K)_n$ の部分環 $R = (K_{ij}) \subseteq (K)_n$ とみなして、 $i \rightarrow \cdots \rightarrow j$ となる矢印よりなる道があるとき $K_{ij} = K$ 、無いとき $K_{ij} = 0$ と定める。

定義 2. $\mathbf{x} = \underline{\dim}(X)$, $\mathbf{y} = \underline{\dim}(Y)$ に対し、**Euler Form** と呼ばれる双一次形式を、

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_K \text{Ext}_R^i(X, Y)$$

で定義する。この双一次形式から、対応する 2 次形式およびグラフ Δ が決まる。特に、 Δ が木であるときは、

$$B_\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \dim_K \text{Hom}_R(X, Y) - \dim_K \text{Ext}_R^1(X, Y)$$

は、**Tits form** と呼ばれる。また、

$$\Phi_R = -\mathbf{C}_R^{-1t} \mathbf{C}_R$$

を、 R の Coxeter 変換 と呼ぶ。

グラフと多元環の Coxeter 変換には、次のような関係がある。

定理 7.

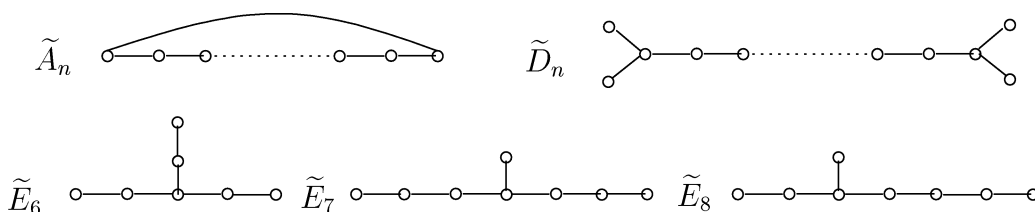
$$\Phi_R = {}^t\Phi_\Delta$$

特に、

$${}^t\mathbf{x}\Phi_{R\mathbf{x}} = {}^t\mathbf{x}\Phi_{\Delta\mathbf{x}}$$

であり、2つの Coxeter 変換から決まる 2 次形式は一致する。

ユークリディアン図形とは、次の図形を指す。(ディンキン図形に線分を 1 つ加えた図形とみることが出来る。)



木 Δ がユークリディアン図形である必要十分条件は、 Δ の 2 次形式 B_Δ が非負値、即ち、全ての実ベクトル \mathbf{x} で $B_\Delta(\mathbf{x}) \geq 0$ となることは、よく知られている。([3] 等を参照)

また、Sato [7] により、次の事が示されている。

定理 8. 次が成立する。

(1) 2 次形式 B_Δ が非負値なら、ある自然数 m があり、

$$(\Phi_\Delta^m - \mathbf{E})^n = \mathbf{O}$$

となる。

(2) $(\Phi_\Delta^m - \mathbf{E})^n = \mathbf{O}$ なら、 Φ_Δ の固有値 α に対し、 $|\alpha| = 1$ となる。

例 2. A_3 のディンキン図形よりなる有向グラフを、

$$\Delta : \overset{1}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \overset{2}{\circ} \xrightarrow{\beta} \overset{3}{\circ}$$

とすると、

$$B_\Delta(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3$$

$$\text{より、} \mathbf{C}_\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_R = \mathbf{C}_\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix} = K\mathbf{e}_{11} \oplus K\mathbf{e}_{22} \oplus K\mathbf{e}_{33} \oplus K\mathbf{e}_{12} \oplus K\mathbf{e}_{23} \oplus K\mathbf{e}_{33}$$

となる。

実際、 $1 = \mathbf{e}_{11}, 2 = \mathbf{e}_{22}, 3 = \mathbf{e}_{33}, \alpha = \mathbf{e}_{12}, \beta = \mathbf{e}_{23}$ と対応し、 \mathbf{C}_R は、この多元環 R のカルタン行列になっている。

グラフとベクトルの Reflection の計算:

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{s_3} 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3 \xrightarrow{s_2} 1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{s_1} 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{s}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_3 - x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{s}_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

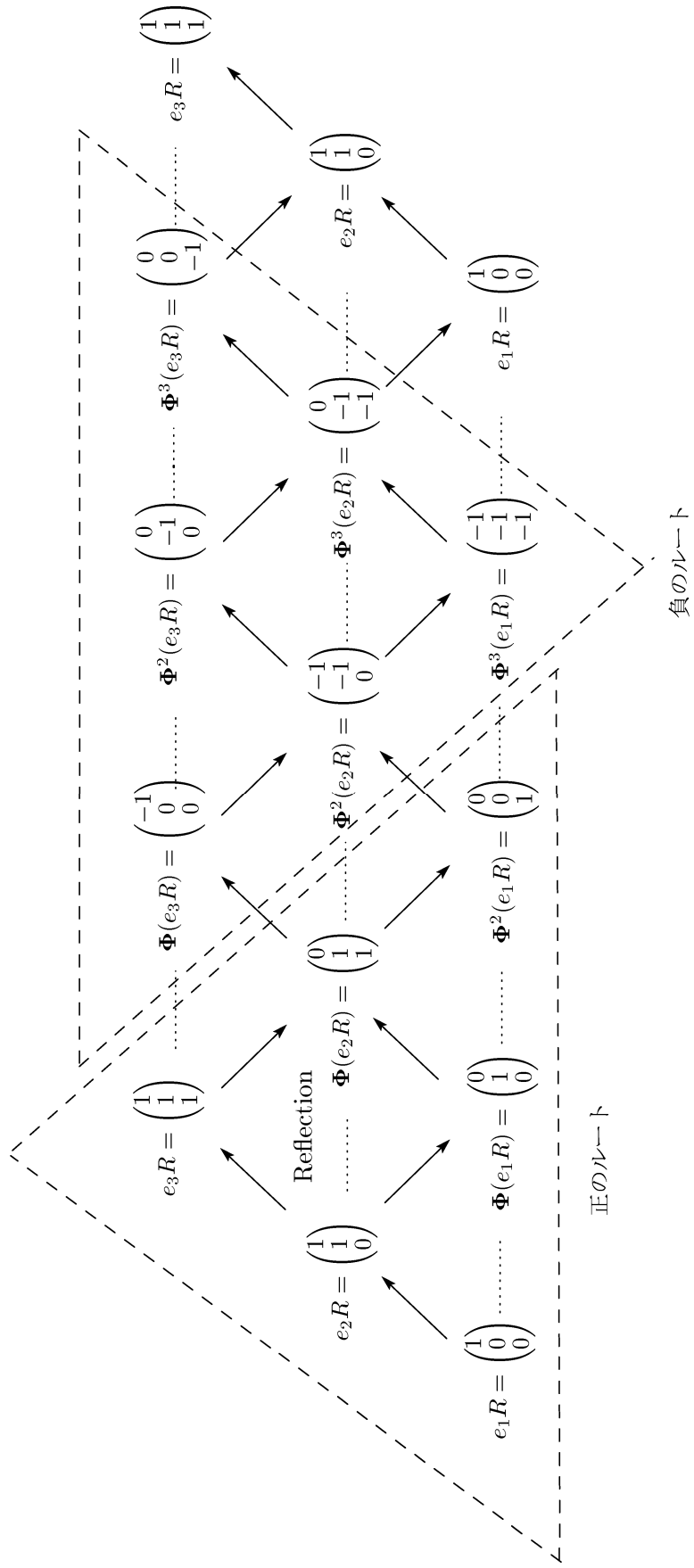
実際に計算すると、次のように各々両者は確かに一致する。

$$\begin{aligned} \Phi_{\Delta} = \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad -\mathbf{C}_{\Delta}^{-1t} \mathbf{C}_{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ {}^t \Phi_{\Delta} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_R = -\mathbf{C}_R^{-1t} \mathbf{C}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Φ -Orbit のグラフを、次ページに示しておく。これは、直既約加群とその間の既約写像を表すグラフで、**Auslander-Reiten グラフ**と呼ばれる。

3.1.5. Tilting 理論. 多元環の表現論における古典的理論では、Brenner-Butler により導入された Tilting 加群の理論が、研究上有効な対象であった。これが、Derived カテゴリーを考察する上で不可欠のものになろうとは当初は想像もつかなかったことであった。しかし、多元環の表現論の研究途上で、 Φ -Orbit のグラフと、このグラフの正のルート部分のスライス（断面）に乗る加群の準同型環の Φ -Orbit のグラフには、顕著な類似性があることが判明してきた。この類似性に関する理論の総体が、**Tilting 理論**と言える。より広い世界である Derived カテゴリーで考えると、この類似性はより明確かつ容易に理解することができる。両者は「同じものの一部」と見ることが可能で、これが加群のカテゴリーだけを取り出して眺めると、「顕著な類似性を持つ」と見える理由であると言える。ここでは、このようなことも含めて、加群を Derived カテゴリーで眺める利点について解説をしていきたい。

Φ-Orbit のグラフ



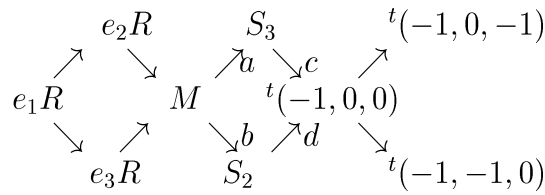
最初に、考える問題として、加群の理論では扱われなかった、負のルートにどんな意味があるのか？

について、考えてみる。

例 3. スライス $1 \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{matrix}$ 上の 3 つの加群の直和の準同型環

$$S = \text{End}_R(e_1R \oplus e_3R \oplus \Phi(e_1R))$$

は、 $C_S = C_{\Delta}^{-1}$ の関係式にある有向グラフ Δ として、このスライスを持つ。 S の Φ -Orbit のグラフは、以下のようになる。



上の図グラフで、負のルート $t(-1,0,0)$ が

$$M \xrightarrow{(a,b)} S_2 \oplus S_3 \longrightarrow t(-1,0,0)$$

として出てくる理由を見てみる。

このグラフを、射影被覆の短完全列よりなる可換図式で表してみる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & e_1R & \longrightarrow & e_2R \oplus e_3R & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & : \text{射影分解} \\
 & & \downarrow & & \parallel & & a+b \downarrow & & (a+b)^* \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & e_1R \oplus e_1R & \longrightarrow & e_2R \oplus e_3R & \longrightarrow & S_2 \oplus S_3 & \longrightarrow & 0 & : \text{射影分解} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & e_1R & \longrightarrow & 0 & & & & & : e_1R^*[1]
 \end{array}$$

この図式で、 $\text{Cok}(a+b)^*$ が、 e_1R を 1 つシフトしたものとして現れることがわかる。即ち、 $e_1R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を 1 つズラして -1 が出てくると考え、

$$\text{Cok}(a+b)^* = e_1R^*[1] = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と理解出来る。

同様に、負のルート ${}^t(-1, 0, -1)$ が

$$S_3 \xrightarrow{d} {}^t(-1, 0, 0) \longrightarrow {}^t(-1, 0, -1)$$

として出てくる理由を見てみる。

S_3 と $e_1R[1]$ の射影被覆の短完全列よりなる可換図式で d^* を表してみると、

$$\begin{array}{ccccccc} S_3^* : & 0 & \longrightarrow & e_1R & \longrightarrow & e_3R & \longrightarrow 0 \\ & d^* \downarrow & & \parallel & & \downarrow & \\ e_1R^*[1] : & 0 & \longrightarrow & e_1R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow 0 \end{array}$$

であるので、この Mapping Cone を取ると、これは次のように $e_3R^*[1]$ とホモトピックになる。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & e_1R & \longrightarrow & e_1R \oplus e_3R & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & e_3R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

この図式で、 $\text{Cok}(d^*)$ が、 e_3R を 1 つシフトしたものとして現れている。

そこで、 $e_3R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を 1 つズラして -1 が出てくると考え、

$$\text{Cok}(d^*) = e_3R^*[1] = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と理解出来る。

3.1.6. 加群の Tilting 理論と Derived カテゴリー. 加群の Tilting 理論は、多元環やその上の加群のカテゴリーの類似性に関する理論である。しかし、次のように、加群のカテゴリー内のみで扱うには大きな制約がある。

(1) $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ と $1 \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{matrix}$ の加群 (正のルート) のグラフは、似ているが微妙にズレている。

(2) 射影加群や入射加群は端にあるので、特別に扱う必要があるなど、扱いにくさが残っている。

一方、負のルートを考えた Φ -orbit のグラフは同一である、ということに注目する。

そこで、次のように、加群よりもう少し広い対象を考える。
 即ち、加群に代わって射影加群よりなる(有界)複体を、加群の準同型に代わって複体間の写像を考える。
 加群の同型に対応するものとして、ホモトピックな複体間の写像を考える。

これを **Derived カテゴリー** と呼び、次のようにかく。

$$D^b(\text{mod-}R)$$

Derived カテゴリーを扱う利点として、次のことがあげられる。

- (1) 今までの Tilting 理論で用いる Tilting 加群が、同一のカテゴリーの中の対象として扱える。
- (2) 射影加群や入射加群等を除外しないで扱える。

Derived カテゴリーでの Tilting 理論の新たな可能性として、加群の Tilting 理論で与えた類似性より、広く類似性を持つ加群あるいは多元環を同じ Derived カテゴリー内に見出すことができる点をあげることができる。

例 4. 重要なカテゴリーとして、次のようなものがある。

例 2 で扱った A_3 の有向グラフ $\circ \xrightarrow{1, \alpha} \circ \xrightarrow{2, \beta} \circ$ の Φ -orbit で、正のルートと負のルート間で、2つのスライス

$$\begin{aligned} e_1 R &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow e_2 R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow e_3 R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Phi(e_3 R) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \Phi^2(e_2 R) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \Phi^3(e_1 R) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を重ね合わせるグラフの自己同型が存在する。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi^2(e_3 R) = \Phi(e_1 R^*[1])$$

となっていることに注目する。この自己同型 $\Phi \cdot [1]$ による Φ -orbit の軌跡は、

$$\mathcal{C} = D^b(\text{mod-}R) / \langle \Phi \cdot [1] \rangle$$

というカテゴリーを与え、これは **2-Calabi-Yau** と呼ばれるカテゴリーになっており重要なものである。

[注意] 2-Calabi-Yau とは、次の条件を満たすカテゴリー \mathcal{C} である。

- (1) Serre duality S がある。

即ち、任意のオブジェクト X, Y に対し、次の同型が成立する。

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cong \text{Hom}_K(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, S(X)), K)$$

(2) Shift Fuctor T があり、 $T^2 = S$ を満たすものがある。

(2) の条件を満たすものとして、次の2つは、先の例においてグラフ上で意味している内容が良くわかるであろう。

$$S = \Phi^4, T = [1]; \quad S = \Phi^6, T = \Phi[1]$$

3.2. Mutation と Coxeter 変換. Δ をディンキン図形よりなる有向グラフとし、これに対応する環を $R = (K_{ij}) \subseteq (K)_n$ 、 V を Δ の表現 (R -加群) とする。定理5に加えて、次の結果は、直既約表現を特徴付ける基本的なものである。([3] 等を参照。)

定理 9. $\dim V > 0$ とする。このとき、次は条件は同値である。

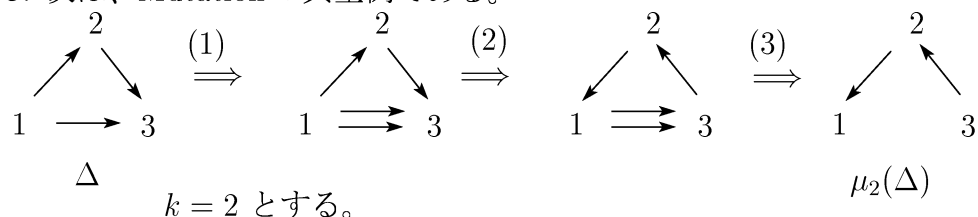
- (1) V は直既約表現である。
- (2) $B_\Delta(\dim V) = 1$
- (3) ある自然数 i, j があり、 $V = \Phi^i(e_j R)$ となる。

Reflection を用いて、上記のような重要な定理が得られるが、この Reflection の概念を一般化し、より分かり易く有益な結果を得るため、次の概念を導入する。

定義 3 (有向グラフの Mutation). 有向グラフ Δ は、ループ \circ および二重矢印 \rightrightarrows を持たないとする。 $\Delta_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ にクラスター変数と呼ばれる変数 x_1, x_2, \dots, x_n を対応させることにする。 k を Δ の点として、新しい有向グラフ $\mu_k(\Delta)$ を、次の操作を行って作る。

- (1) 各 $i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\beta} j$ に対して、新しい矢印 $i \xrightarrow{(\alpha, \beta)} j$ を追加する。
- (2) α, β を反転させる。 $i \xleftarrow{\alpha'} k \xleftarrow{\beta'} j$
- (3) もし、二重矢印 \rightrightarrows が生じたら、この対になっている二重矢印を削除する。この削除を可能な限り行っていく。

例 5. 次は、Mutation の典型例である。



定義 4 (Mutation のクラスター変数).

Δ のクラスター変数 x_1, x_2, \dots, x_n に、 $\mu_k(\Delta)$ のクラスター変数 x'_1, x'_2, \dots, x'_n を次のように対応させる。

$$x_i = x'_i \quad (i \neq k), \quad x_k = \frac{1}{x_k} \left(\prod_{i \rightarrow k} x_i + \prod_{k \rightarrow j} x_j \right)$$

注意：

- (1) Mutation およびクラスター変数の対応は、Reflection の場合と同様に 可逆的 である。
- (2) k がシンクまたはソースのとき、 $\prod_{i \rightarrow k} x_i, \prod_{k \rightarrow j} x_j$ の積において、添え字部分の一方の矢印部分は空集合である。これについて、 $\prod_{\text{空集合}} x_i$ の値の与え方は、 $0, 1$ の 2 通りが考えられる。

例 6. A_2 型の有向グラフ $1 \rightarrow 2$ を考える。 $\prod_{\text{空集合}} x_i$ に、 $0, 1$ のそれぞれの値を与えたとき、クラスター変数が、どの様になっているかを調べて見る。

(i) $\prod_{\phi} x_i = 1$ のとき

$$\begin{aligned} x_1 \rightarrow x_2 &\xrightarrow{\mu_1} x'_1 = \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \xrightarrow{\mu_2} x'_1 \rightarrow x'_2 = \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \xrightarrow{\mu_1} \\ x''_1 = \frac{1+x_1}{x_2} \leftarrow x'_2 &\xrightarrow{\mu_2} x'_1 \rightarrow x_2 \xrightarrow{\mu_1} x_2 \leftarrow x_1 \end{aligned}$$

この計算から、異なる変数が 5 個出てくる。この個数が $1 \rightarrow 2$ の直既約表現の個数 + グラフの点の個数 (下記の 2-Calabi-Yau カテゴリー \mathcal{C} の直既約複体の個数) と一致してしていることは、注目に値する。

(ii) $\prod_{\phi} x_i = 0$ のとき

$$\begin{aligned} x_1 \rightarrow x_2 &\xrightarrow{\mu_1} x'_1 = \frac{x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \xrightarrow{\mu_2} x'_1 \rightarrow x'_2 = \frac{1}{x_1} \xrightarrow{\mu_1} \\ x''_1 = \frac{1}{x_2} \leftarrow x'_2 &\xrightarrow{\mu_2} x''_1 \rightarrow x''_2 = \frac{x_1}{x_2} \xrightarrow{\mu_1} x_1 \leftarrow x''_2 \xrightarrow{\mu_2} x_1 \rightarrow x_2 \end{aligned}$$

この計算から、異なる変数が 6 個出てくる。この個数は、 $1 \rightarrow 2$ の直既約表現の個数の 2 倍となっていることに注目されたい。

実際、次の結果を得る。

定理 10. 木 Δ がディンキン図形である必要十分条件は、クラスター変数が有限個しか出てこないことである。

- (1) の場合は、直既約表現の個数 + Δ の点の個数
- (2) の場合は、直既約表現の個数の 2 倍 + "Cycles" の個数だけ、クラスター変数が出てくる。

(1) の " Δ 点の個数 " は、2-Calabi-Yau カテゴリー

$$\mathcal{C} = D^b(\text{mod-}R) / \langle \Phi[1] \rangle$$

の負のルートに対応する。

(2) の "Cycles" は、新しい Tilting に対応する。

これにより、 $\text{mod-}R$ より広いカテゴリーで、 $\mu_k(\Delta)$ は、**新しい Tilt-
ing を与える**ことがわかる。

また、この関係は、次の図式のように、被覆の関係として捉えることが可能である。

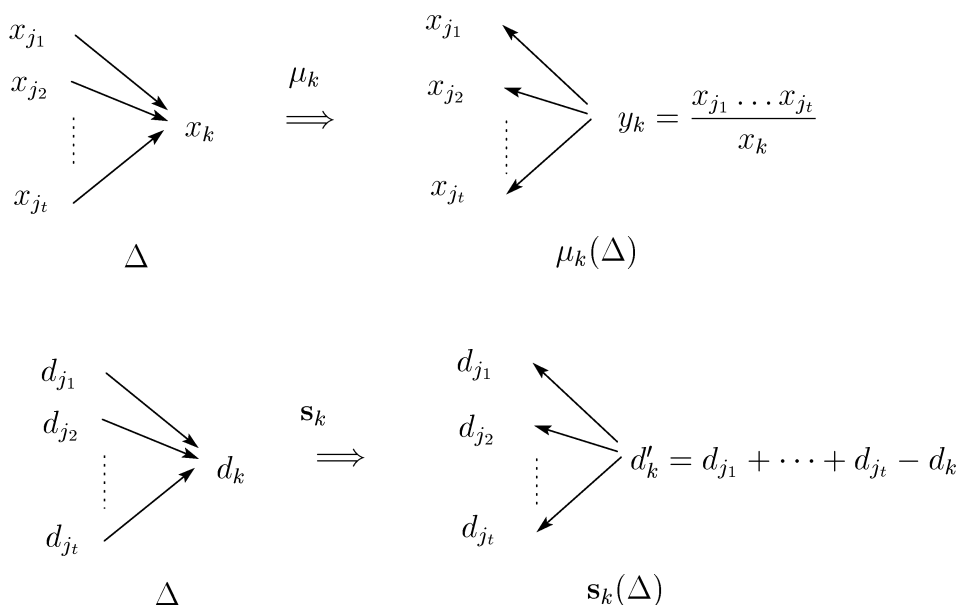
$$\begin{array}{ccc} \text{mod-}R & \subset & D^b(\text{mod-}R) \\ \parallel & & \downarrow \text{covering} \\ \text{mod-}R & \subset & D^b(\text{mod-}R) / \langle \Phi[1] \rangle \end{array}$$

Derived カテゴリーでの Tilt- ing 理論の有効性

加群の Tilt-
ing 理論で与えた類似性より広い類似性を持つ加群あるいは多元環を、一つの Derived カテゴリー内に一括して見出すことができる可能性がある。(次のページの例を参照すると、この意味が分かり易いであろう。) その意味で、Derived カテゴリーの考察は重要であると言える。

Mutation と Reflection の関係について

次の図で、Mutation と Reflection を比較してみる。



上の変換は、次の対応を考えることで、同じ変換であることがわかる。

$$x_i \longrightarrow \log x_i = d_i, \quad d_i \longrightarrow x_i = e^{d_i}$$

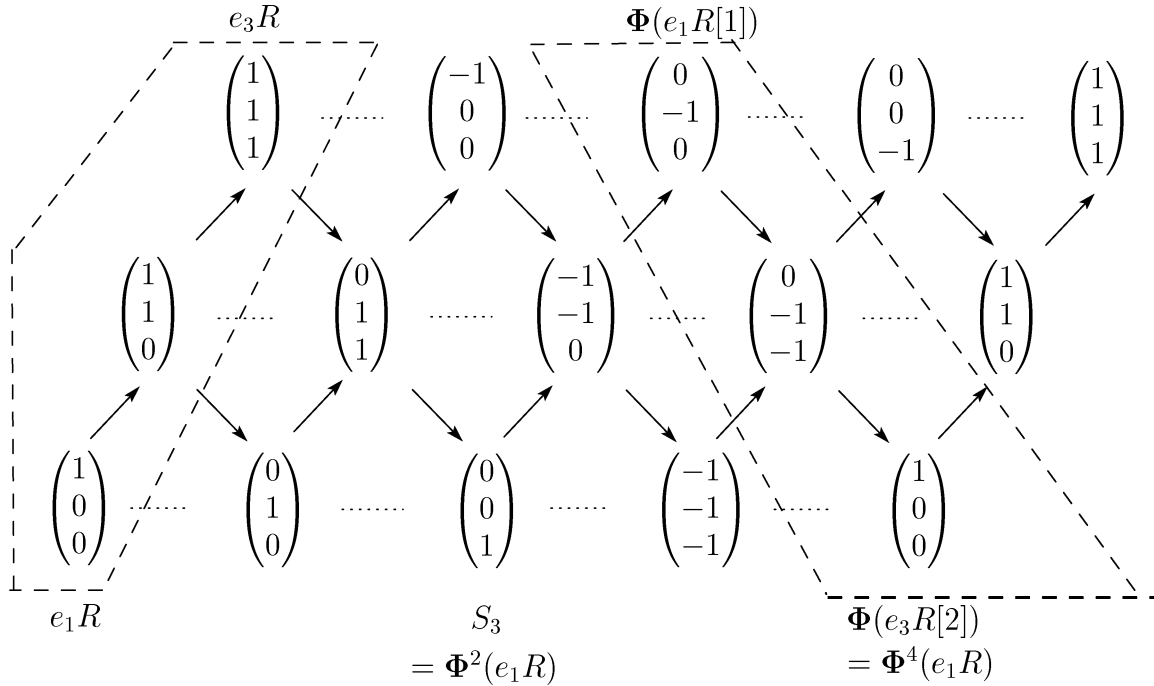
従って、Mutation は、Reflection の一般化であることがわかる。

上記を総合して、次の例で負のルートも含めて、Derived カテゴリーの様子を見てみる。

例 7. A_3 型のディンキン図形の有向グラフの Mutation

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \xrightarrow{\mu_2} \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & \swarrow & \nwarrow \\ & 1 & \rightarrow 3 \end{array}$$

を作る。この三角形の有向グラフが、どのように Tilting 加群として出てくるかを考察してみる。 Φ -orbit は以下のようにになっている。



Tilting 加群を与える 3 つの直既約加群 e_1R, e_3R, S_3 の直和を作る。 R -加群としての準同型環は以下のように、 A_3 型の有向グラフである。

$$\text{End}_R(e_1R \oplus e_3R \oplus S_3) = K \langle e_{11} \xrightarrow{e_{21}} (e_{22} + e_{44}) \xrightarrow{e_{34}} e_{33} \rangle$$

一方、点線で囲んだ 2 つのスライスを逆さに同一視したカテゴリ \mathcal{C} での準同型を取ると以下のように、三角形の有向グラフが出てくる仕組みになっている。

$$\text{End}_{\mathcal{C}}(e_1R \oplus e_3R \oplus S_3) = K \left\langle \begin{array}{ccc} & e_{22} + e_{55} & \\ e_{42} & \swarrow & \nwarrow e_{56} \\ e_{11} + e_{44} & \xrightarrow{e_{31}} & e_{33} + e_{66} \end{array} \right\rangle$$

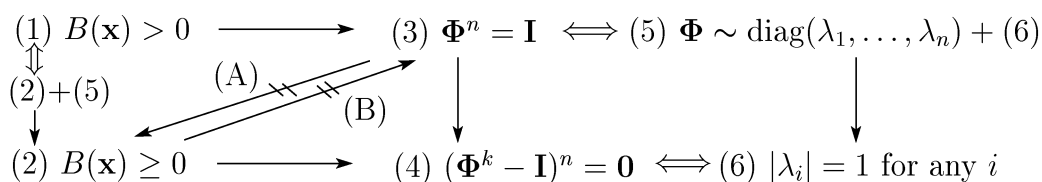
$e_1R \oplus e_3R \oplus S_3$ の準同型環を、 $\text{mod-}R, D^b(\text{mod-}R) / \langle \Phi[1] \rangle$ で考えると異なる準同型環になる。

しかし、これは同じ Derived Category を与えるので、(詳細は次の節を参照) 類似性を与える Tilting 理論が広いカテゴリでより自由度を持って展開可能であることを示すものと言える。

4. COXETER 変換の PERIODICITY について

この節では Coxeter 変換についての各種の結果を紹介し、Derived カテゴリーでの Coxeter 変換の役割を述べる。

4.1. Coxeter 変換の Periodicity. Δ を木とする。このとき、 Δ がディンキン図形である必要十分条件は、ある自然数 h で $\Phi^h = E$ となる、(即ち、 Φ が Periodic である)、という結果が有効に使われていた。これらを総合して、2次形式 $B(\mathbf{x})$ の(弱)正定値性、Periodicity、 Φ の対角可能性、 Φ の固有値には、図示すると次のような関係がある。



ここで、 $B(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}\Phi\mathbf{x}$ は二次形式、 λ_i は Φ の固有値、 \sim は対角化可能であること、(A),(B) は命題が不成立であることを各々示している。また、

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \iff B(\mathbf{x}) = 0$$

の関係より、 Φ の固有値 1 の固有空間が $B(\mathbf{x}) = 0$ の解を与えていることに注意する。

例 8. (A) の反例として、 Φ は Periodic だが、 $B(\mathbf{x})$ は負値を取る次のような多元環がある。

K を体として、行列単位を用いて

$e_1 = e_{11} + e_{22}, e_2 = e_{33} + e_{44} + e_{55}, \alpha = e_{51}, \beta = e_{21}, \gamma = e_{21}, \delta = e_{34} + e_{54}$ と表せる基底を持つ K 上 6 次元の多元環

$$R = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus K\alpha \oplus K\beta \oplus K\gamma \oplus K\delta$$

のカルタン行列と Coxeter 行列は

$$C_R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Phi_R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Phi^2 = E$$

となる。しかし、2次形式は、

$$B_R(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2$$

より、負値を取る。

例 9. $B(\mathbf{x})$ は非負値だが、 Φ は対角化可能でない、次のような (B) の反例がある。

K を体として、行列単位を用いて

$$e_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}, e_2 = e_{44} + e_{55} + e_{66}, \alpha = e_{14} + e_{52}, \beta = e_{63}, \gamma = e_{21}, \delta = e_{54}$$

と表せる基底を持つ K 上 6 次元の多元環

$$R = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus K\alpha \oplus K\beta \oplus K\gamma \oplus K\delta$$

のカルタン行列と Coxeter 行列は

$$C_R = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_R = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

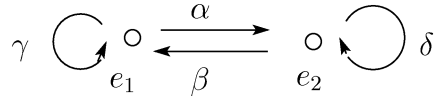
となる。しかし、

$$(\Phi_R - E)^2 = 0$$

となり、1 の固有空間は 1 次元なので、 Φ_R は対角化できない。また、2 次形式は

$$B_R(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = 2(x_1 + x_2)^2$$

より、非負値である。なお、この環の有向グラフは、次のようになる。



4.2. **Derived カテゴリーでのカルタン行列.** Derived カテゴリーでの双一次形式である **Euler form** B_{dR} を次のように決める。

$$B_{dR}(X, Y) = \sum_{i \geq 0} \dim_K \text{Hom}_{D^b(\text{mod-}R)}(X, Y[i])$$

対応する 2 次形式から、グラフ Δ_{dR} とカルタン行列 $C_{\Delta_{dR}}$, C_{dR} および Coxeter 行列 $\Phi_{\Delta_{dR}}$, Φ_{dR} を作る。

また、基本性質

$$B_{dR}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -B_{dR}(\mathbf{y}, \Phi(\mathbf{x}))$$

も成立する。

注意: Lenzing[6] により、 R の大局次元が有限なら、 B_{dR} は、非退化 (non-degenerate) であることが示されている。従って、上の行列 Φ が構成される。

C_{dR} についてもカルタン行列問題が同様に考えられ、次の問題を提起する。

Dericved カテゴリー版カルタン行列問題

カルタン行列問題は、 C_{dR} に対して成立するか。

2 次形式に関しては、次のことが成立している。

定理 11. (1) \mathbf{C}_{dR} が三角行列なら Φ_{dR} は Reflection の積である。
 (2) $D^b(\text{mod-}R)$ と $D^b(\text{mod-}R')$ が (三角圏) 同値なら、

$$B_{dR} = B_{dR'}$$

である。特に、 Φ_{dR} が Periodic である必要十分条件は、 $\Phi_{dR'}$ が Periodic となることである。

多元環については、次のことが成立する。

定理 12 (S.Ladkani(2008)[8]). $D^b(\text{mod-}R)$ と $D^b(\text{mod-}R')$ が (三角圏) 同値で $\Delta_{R'}$ が Tree (R' が遺伝環) とする。
 このとき、 $\Phi_{R'}$ が Periodic なら、 $B_R(\mathbf{x}) \geq 0$

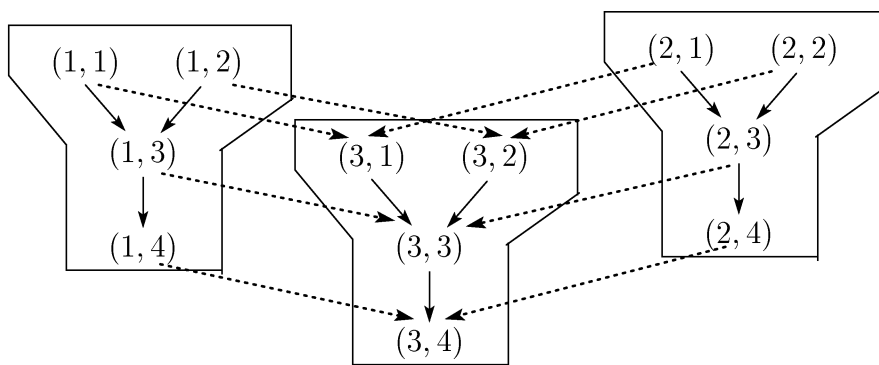
予想 (佐藤 2005[7]) : \mathbf{C}_R が三角行列で、 Φ_R が Periodic なら、 $B_R(\mathbf{x})$ は、非負値である。

答 : NO[8]

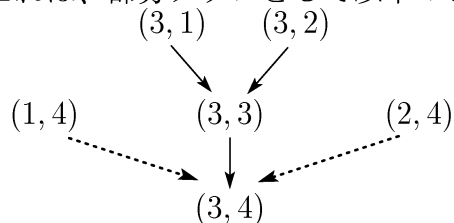
例 10. $\Delta_{R_1} \times \Delta_{R_2} = \Delta_{R_1 \otimes R_2}$, $\mathbf{C}_{R_1} \times \mathbf{C}_{R_2} = \mathbf{C}_{R_1 \otimes R_2}$ に注意して、2つのディンキン図形の直積のグラフを作る。

$$\Delta_{R_1} = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \searrow \quad \swarrow \\ 3 \end{array}, \quad \Delta_{R_2} = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \searrow \quad \swarrow \\ 3 \\ \downarrow \\ 4 \end{array} \quad \text{として、}$$

$X = \Delta_{R_1} \times \Delta_{R_2}$ のグラフは次のようになる。

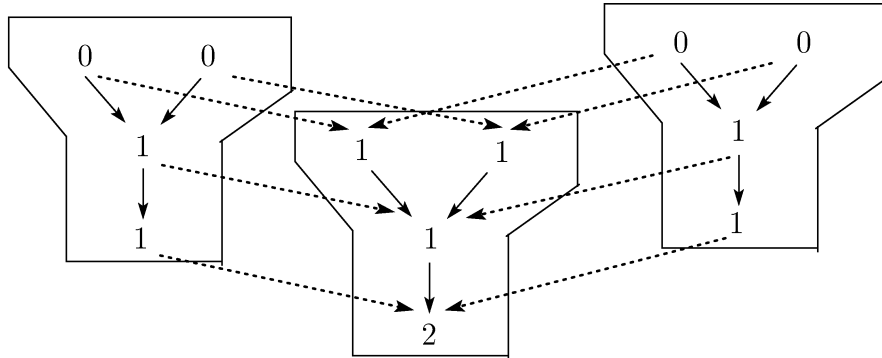


これは、部分グラフとして以下の \tilde{D}_4 を含んでいる。



Dlab-Ringel の結果 [3] より、2次形式は非負値ではない。

実際、次のベクトル \mathbf{x} に対して、 $B_R(\mathbf{x}) < 0$ となる。



一方、 $\Phi_{A_3}^4 = \mathbf{E}$, $\Phi_{D_4}^6 = \mathbf{E}$ より、 $\Phi_X^{12} = \mathbf{E}$ となる。 □

4.3. Derived カテゴリーでの既約写像と Coxeter 行列. Derived カテゴリーと Grothendieck 群の間で、次の可換図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 D^b(\text{mod-}R) & \xrightarrow{\tau_R} & D^b(\text{mod-}R) & \tau_R^e = [d] \\
 \downarrow & & \downarrow & \\
 K_0(D^b(\text{mod-}R)) & \xrightarrow{\Phi_R} & K_0(D^b(\text{mod-}R)) & \Phi_R^m = \mathbf{E}
 \end{array}$$

問題：(1) ディンキン図形の場合と同様な議論が可能ではないか。
 (2) カルタン行列問題は、Derived カテゴリーの中で、 Φ 等と何らかの関係があるのではないか。

次の例でわかるように、上記の可換図式は加群のカテゴリー場合でも、同様の図式が成り立つが、その軌道については、加群のカテゴリーと Derived カテゴリーでは様子が異なる。

例 11. $R: 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ の新しい Tilting を

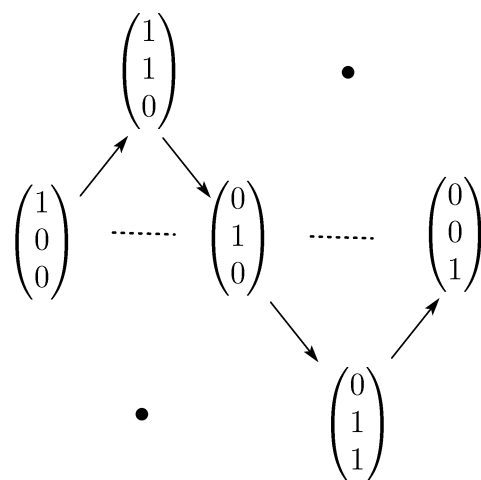
$$S = \text{End}_R(e_1R \oplus e_2R \oplus S_3) : e_{11} \xrightarrow{e_{21}} e_{22} + e_{44} \xrightarrow{e_{43}} e_{11}$$

とする。このカルタン行列と Coxeter 行列は、以下のようになる。

$$\mathbf{C}_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_\Delta = \mathbf{C}_S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_\Delta = -\mathbf{C}_\Delta^{-1t} \mathbf{C}_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

S の直既約加群の既約写像の図式 (AR 図式) での軌道 (τ 軌道) は、以下のようなになる。



一方、 Φ_{Δ} -orbit の方も、以下のように、3つの軌道がある。しかし、Derived カテゴリーと加群のカテゴリーで、軌道および既約写像は、そのまま対応していない。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \star & & \star & \\
 & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

両図での \bullet, \star が意味しているのは、ここでは見えてこない。

問題点： (1) 軌道および加群の既約写像の両者にはずれがある。
 (2) \star のベクトルで、 ${}^t(1, 0, -1)$ と ± 1 が入っているのは、如何なる意味があるのか。

このような問題が起こるのは、どこに原因があるのであろうか？

そこで、 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ の Mutation で現れたグラフに対応した、次の例を見てみる。

$$\text{例： } T = \text{End}_{\mathcal{C}}(e_1 R \oplus e_2 R \oplus S_3) = K \left\langle \begin{array}{ccc} & e_{22} + e_{55} & \\ e_{42} \swarrow & & \nwarrow e_{56} \\ e_{11} + e_{44} & \xrightarrow{e_{31}} & e_{33} + e_{66} \end{array} \right\rangle$$

グラフは $\begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 \nearrow & & \searrow \\ & \longleftarrow & 3 \end{array}$ で、これの被覆を取ってみる。

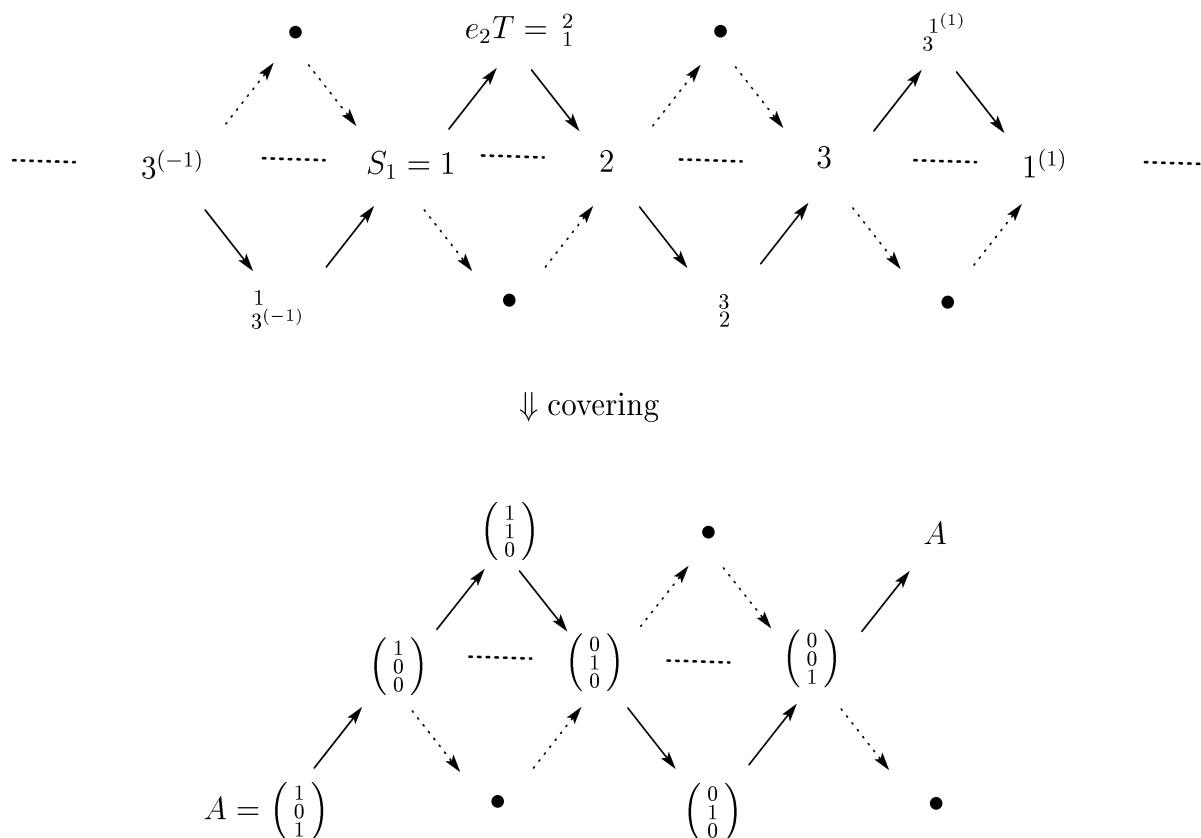
$$\begin{array}{c} \dots \rightarrow 3^{(-1)} \rightarrow \underbrace{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3}_S \rightarrow \underbrace{1^{(1)} \rightarrow 2^{(1)} \rightarrow 3^{(1)}}_{S^{(1)}} \rightarrow \dots \\ \downarrow \\ \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 \nearrow & & \searrow \\ & \longleftarrow & 3 \end{array} \end{array}$$

被覆の中に、 $S = \text{End}_R(e_1 R \oplus e_2 R \oplus S_3)$ が現れている。

解決策を与えるために：

- ☆ $D^b(\text{mod-}R) = D^b(\text{mod-}S) = D^b(\text{mod-}T)$ となる状況と、互いの関係を調べて見る必要がある。
- ☆ Derived カテゴリや \mathcal{C} で考える利点を、最大限利用する。
- ☆ 依然として、 Φ_{Δ} が重要な役割を持っていることを確認する。

T および被覆上での直既約加群の既約写像の AR 図式での τ 軌道は、以下のようなになる。



一方、Derived カテゴリーでは、次のように、既約写像 $S_1 \rightarrow e_2T$ の間に更に写像が入り込む。

$$\begin{array}{ccccc}
 \dots & \longrightarrow & \begin{matrix} 3^{(-1)} \\ 2^{(-1)} \end{matrix} & \longrightarrow & \begin{matrix} 1 \\ 3^{(-1)} \end{matrix} & : S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の射影分解} \\
 & & \downarrow & & \parallel & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \begin{matrix} 1 \\ 3^{(-1)} \end{matrix} & : \begin{matrix} 1 \\ 3^{(-1)} \end{matrix} \text{ の射影分解} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} & : e_2T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の射影分解}
 \end{array}$$

従って、 $\text{mod-}T$ の既約写像の τ 軌道と $D^b(\text{mod-}T)$ の Φ_Δ 軌道は、軌道ごと順番が入れ替わる。

次に、±1 が出てくる理由 を見てみる。

射影分解の中間の射影加群

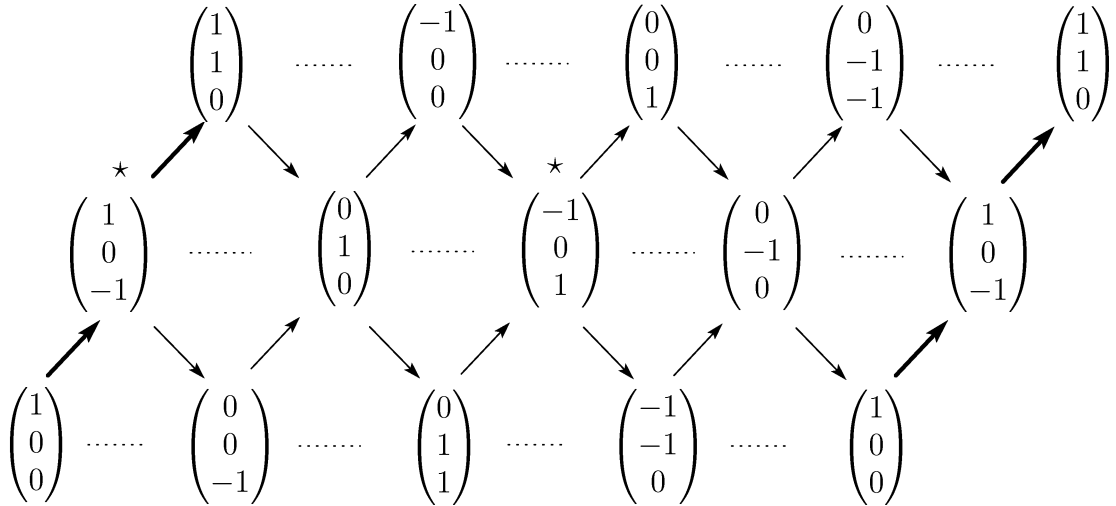
に、被覆の中で 3 を 1 つシフトした $3^{(-1)}$

が現れる。この射影加群の次元列が

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。

従って、 $D^b(\text{mod-}S)$ の既約写像を与える Φ_Δ -orbit (Φ_S でない!!) は以下のようなになる。



Φ_Δ を用いて、 $D^b(\text{mod-}S)$ の直既約複体とその既約写像よりなるグラフが作られていく。mod- S の AR 変換での τ 軌道は、そのままこのグラフに対応しているわけではない。従って、 $D^b(\text{mod-}S)$ では、Coxeter 変換の役割の方が、AR 変換 τ より優っているとと言える。そこで、次の問題を提起する。

問題： Φ_Δ のホモロジー的性質を説明せよ。

5. COXETER 行列に関する他の話題

5.1. Coxeter 行列の固有値問題.

問題： Coxeter 行列の固有値は代数的整数か？
数論的特徴は何か？

前章の定理では、絶対値 1 以下の代数的整数を持つので、固有値全体も代数的整数であった。

一般の場合は、数論で研究されている。

5.2. カルタン行列の固有値問題.

問題： カルタン行列の固有値は整数か？
全てが整数の場合はどんな場合か？

(1) Cellular 代数 [12]
(ある種の Filtration と Involution を持つ多元環)

行列 $\mathbf{D} = (d_{ij})$ の成分 d_{ij} を Filtration $\Delta(i)$ に現れる単純加群 S_j の個数としたとき、

$$\mathbf{C}_R = \mathbf{D}^t \mathbf{D}$$

と、群環と同様な式が成立する。

定理 13 (Xi, Xiang(2003)[12]). R を Cellular 代数とすると、 R が半単純代数である必要十分条件は、 $|\mathbf{C}_R| = 1$ かつ \mathbf{C}_R の固有値は整数となっている、ことである。

(2) 群環

次のものは代表的な問題であろう。

和田予想 [10] : G を有限群、 K を正標数 p の代数的閉体で $p \mid |G|$ とし、 B を群環 KG のブロックとする。このとき、 \mathbf{C}_B の全ての固有値が整数なら、固有値の集合と \mathbb{Z} 上の単因子の集合は一致する。また B の不足群 D がアーベル群のときは、さらに B とその Brauer 対応子である D の正規化群のブロック b は森田同値になる。

これらの結果に関して、和田先生から次のことを教えて頂きました。最大固有値が整数なら、すべての固有値が整数になり、さらに、固有値の集合と単因子の集合が一致すると予想される。単因子については Brauer がすでに研究し、一つだけ $|D|$ があり、他はすべて $|D|$ を割る p べきになってる。従って、固有値の集合がこれと一致してしまうというのは、恐ろしく強い結果で、これは他の多元環のカルタン行列では、成り立たない。

例 12. 3点からなる、Brauer tree algebra (これは cellular algebra になっている) で、両端点が exceptional で multiplicity が 2 のとき、カルタン行列は、 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ となるが、これは固有値が 4, 2 で、単因子は 8, 1 となり、固有値の集合と単因子の集合は一致しない。

固有値が整数である、ということのより一般的な主張は [9] に **Decomposition Conjecture** としてあり、もしこれが成り立つと、固有値がもし整数なら、それは必ず単因子になっていることもいえる。

5.3. カルタン行列の役割. カルタン行列が有効な役割持つ場合は、どんな時であろうか？

環 R からカルタン行列 C_R を作ると、一般には C_R に R の構造が反映されなくなる。従って、遺伝環のように

C_R から、ある程度構造が復活できる場合は、カルタン行列の考察は有効である。

例 13. カルタン行列に構造が反映するものとして、よく調べられている代表例は、以下の環であろう。

- (1) 遺伝環：ディンキン等の木になる。
- (2) 群環：既約写像のなす図形 (AR 図形) が A タイプに限られる。
- (3) 自己入射的な環：被覆を取ることで、スライスにディンキン図形が現れ、遺伝環との関係が深くなる。

REFERENCES

- [1] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton, 1956.
- [2] W. Curtis, I. Reiner, *Representation Theory of Finite groups and Associative Algebras*, Wiley-Interscience, New York, 1962.
- [3] V Dlab, C.M Ringel, *Indecomposable representations of graphs and algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **173**, 1976.
- [4] K. Igusa, *Cyclic homology and the determinant of the Cartan matrix*, J. Pure and Appl. Algebra, **93** (1992), 101–119.
- [5] H. Lenzing, *Nilpotent Elemente in Ringen von endlicher globaler Dimension*, Math. Z, **108** (1969), 313–324.
- [6] ———, *Coxeter transformations associated with finite dimensional algebras*, Progress Math. **173** (1999), 287–308.
- [7] M. Sato, *Periodic Coxeter Matrices and their associated Quadratic Forms*, Linear Algebra and its Appl., **406** (2005), 99–108.
- [8] S. Ladkani, *On the periodicity of Coxeter transformations and the non-negativity of their Euler forms*, Linear Algebra and its Appl., **4** (2008), 742–753.
- [9] T. Wada, *Eigenvalues and elementary divisors of Cartan matrices of cyclic blocks with $l(B) \leq 5$ and tame blocks*, J.Algebra, **281** (2004), 306–331.

- [10] ———, *Eigenvector matrices of Cartan matrices for finite groups*, *J. Algebra*, **308** (2007), 629–640.
- [11] *G. W. Wilson*, *The Cartan map on Categories of Graded modules*, *J. Algebra*, **85** (1983), 390–398.
- [12] X. Changchang, D.J. Xiang, Cellular algebras and Cartan matrices *Linear Algebra and its Appl.*, **365** (2003), 369–388.
- [13] K. Yamagata, *A reduction formula for the Cartan determinant problem for algebras*, *archiv der Mathematik* **61-1** (1993), 27–34.
- [14] A. Zelvinsky, S. Fomin, *Cluster Algebras I*, *J. of American Math. Soc.* **15-2** (2001), 497–529.
- [15] ———, *Cluster Algebras II*, *Invent. Math.* **154** (2003), 63–121.