加藤のHasse原理，モチフィックコホモロジーの有限性，ゼータ関数の特殊値

斎藤秀司（東京大学数理科学研究科）

Contents

1　モチフィックコホモロジーとは？

モチフィックコホモロジーとは，適当な条件を満たすスキーム X にたいし定義されるアーベル群

$$H^i_M(X,\mathbb{Z}(r)) \quad (i,r\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

である．その研究の動機の一つは数論的多様体のゼータ関数の特殊値の問題において重要な役割を果たすことである．たとえば代数体 K のゼータ関数 $\zeta_K(s)$ にたいする解析的類数公式

$$\lim_{s\to 0}\zeta_K(s)\cdot s^{-\rho_0} = -\frac{|Cl(K)|\cdot R_K}{|(\mathcal{O}_K^\times)_{\rm tors}|}$$

を見てみよう．ここで

$$\rho_0 := \mathrm{ord}_{s=0}\,\zeta_K(s) = \mathrm{rank}(\mathcal{O}_K^\times),$$

$Cl(K)$ は K のイデアル類群，R_K は Dirichlet の単数基準である．ここで $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ とすれば

$$Cl(K) = H^2_M(X,\mathbb{Z}(1)),\quad \mathcal{O}_K^\times = H^1_M(X,\mathbb{Z}(1))$$

と書きなおすことができる．これは解析的類数公式を数論的指数定理

$$\boxed{\text{指数 (解析的不変量)}} = \boxed{\text{特性類 (Euler-Poincaré 標数)}}$$

とみなす可能性を示唆している．

　またモチフィックコホモロジーは様々なコホモロジー理論の背後にある「普遍的なコホモロジー理論」であると考えられている．この哲学はレギュレーター写像

$$H^i_M(X,\mathbb{Z}(r)) \;\rightarrow\; \begin{array}{l} H^i_B(X,\mathbb{Z}(r)) \text{ (Betti コホモロジー)} \\ H^i_D(X,\mathbb{Z}(r)) \text{ (Deligne コホモロジー)} \\ H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}_\ell(r)) \text{ (étale コホモロジー)} \\ H^i_{crys}(X/W(k)) \text{ (crystalline コホモロジー)} \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

の存在により裏打ちされる．また代数的 K-理論とも Atiyah-Hirzebruch 型のスペクトラル系列

$$E_2^{p,q} = H^p_M(X,\mathbb{Z}(-\frac{q}{2})) \Rightarrow K_{-p-q}(X)$$

により関係する．

　モチフィックコホモロジーの構成にはいくつかの方法がある．ここでは二つ紹介しよう．最初の構成法は「混合モチーフの (三角) 圏」の構成によるものである．Voevodsky[V1] は体 k 上の混合モチーフの (三角) 圏 $DM(k)$ と関手

$$Sm/k \rightarrow DM(k)\ ;\ X \rightarrow M(X)$$

を構成した．ここで Sm/k は k 上滑らかなスキームのなす圏である．$X \in Sm/k$ にたいしそのモチフィックコホモロジーが

$$H^i_M(X,\mathbb{Z}(r)) = \mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(X),\mathbb{Z}(r)[i]),$$

で定義される．ここで右辺の $\mathbb{Z}(r)$ は「Tate 捻り」と呼ばれる $DM(k)$ の基本的な対象である．X のモチフィックコホモロジーは，$M(X)$ と Tate 捻りとの間の $DM(k)$ における射全体として定義されるのである．花村や Levine も同様な圏 $DM(k)$ を全く違った手法で構成している．この定義はコホモロジーの一般論が使えるという利点がある一方で具体的な計算には不向きであるという点もある．これを補うのが Bloch[Bl] による高次 Chow 群

$$\mathrm{CH}^r(X,i)$$

である．この定義は後の付録で紹介する．ここで注意すべき大切な事実として，$i=0$ の場合 $\mathrm{CH}^r(X,i)$ は，X 上の余次元 r の代数的サイクルの有理同値類のなす Chow 群 $\mathrm{CH}^r(X)$ に一致する (これが高次 Chow 群の名前の由来である)．

高次 Chow 群には Dedekind 環上の有限型のスキームに対しても定義が可能であるという利点も存在する (Levine[L] と Geisser[Ge] による)．これにより代数体の整数環にたいしてもモチフィックコホモロジーが定義される．さらに Voevodsky のモチフィックコホモロジーと高次Chow 群の間には次の比較定理が成り立つ．

定理 1.1 *([V1])* 完全体 k 上の滑らかな多様体 X にたいし

$$H^i_M(X, \mathbb{Z}(r)) = \mathrm{CH}^r(X, 2r - i),$$

以下ではモチフィックコホモロジーとして高次Chow 群を用いる．

2 モチフィックコホモロジーの有限性予想

モチフィックコホモロジーに関して基本的な予想は次の有限性予想である．

予想 2.1 X を有限体 $\mathbb{F}_p$ あるいは整数環 $\mathbb{Z}$ 上の有限型で正則なスキームとすると，全ての q, r にたいし $\mathrm{CH}^r(X, q)$ は有限生成なアーベル群である．

代数体 K にたいし $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ とすると

$$Cl(K) = \mathrm{CH}^1(X), \quad \mathcal{O}_K^\times = \mathrm{CH}^1(X, 1)$$

であるので，上の予想はイデアル類群の有限性あるいは単数群の有限性生成といった数論の基本的な定理の一般化であることがわかる．

この予想は Beilinson 予想や Bloch-加藤の玉河数予想など，数論的多様体のゼータ関数の特殊値に関する予想の基盤となている予想である．にもかかわらず予想に関して知られている結果は非常に少ない．これまで知られている結果を述べる．以下，X を有限体 $\mathbb{F}_p$ あるいは整数環 $\mathbb{Z}$ 上の有限型で正則なスキームとする

定理 2.2 *(Minkowski, Dirichlet, Mordell-Weil)* 全ての $q \geq 0$ にたいし，$\mathrm{CH}^1(X, q)$ は有限生成である．

実際,

$$\mathrm{CH}^1(X, q) = \begin{cases} \mathrm{Pic}(X) & q = 0 \\ \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times) & q = 1 \\ 0 & q > 1 \end{cases}$$

である．よって定理は，代数体のイデアル類群や単数群の有限性定理および代数体上のアーベル多様体の有理点に対する Mordell-Weil からの帰結である．

定理 2.3 *(Quillen (1972))* $dim(X) = 1$ とすると $\mathrm{CH}^r(X, q)$ は有限生成である．

定理 2.4 *(Bloch[Bl2], Kato-S.[KS](1985))* $\mathrm{CH}_0(X) = \mathrm{CH}^d(X)$ は有限生成である．ただし $d = dim(X)$.

これらの結果は全てレギュレーター写像あるいはサイクル写像を用いて示される．たとえば定理 2.4 の証明には，高次元相互写像

$$\rho_X \ : \ \mathrm{CH}_0(X) \to \pi_1^{ab}(X)$$

が用いられる．ここで $\pi_1^{ab}(X)$ は X の代数的基本群のアーベル化である．実際，定理 2.4 は $\pi_1^{ab}(X)$ にたいする Katz-Lang の有限性定理と次の定理 (高次元不分岐類体論) の帰結である．

定理 2.5 *(Kato-S.[KS], Colliot-Thélène-Sansuc-Soulé[CTSS])* X を有限体 $\mathbb{F}_p$ あるいは整数環 $\mathbb{Z}$ 上の有限型で正則なスキームとすると，高次元相互写像 ρ_X は *(ほぼ)* 同型である．

代数体 K にたいし $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ とすれば，$\mathrm{CH}_0(X) = Cl(K)$ であることに注意すれば上の定理は Hilbert-Furtwengler の不分岐類体論の一般化である．

3 エタールコホモロジーへのサイクル写像

この説ではとくに断らない限り，X を有限体 $\mathbb{F}_p$ あるいは整数環 $\mathbb{Z}$ 上の有限型で正則なスキームとする．高次元相互写像 ρ_X を一般化する写像が，エタールコホモロジーへのサイクル写像 (Geisser-Levine[GL], Levine[L], 佐藤周友 [Sat2])

$$\rho_X^{r,q} : \mathrm{CH}^r(X, q; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H_{\text{ét}}^{2r-q}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \tag{1}$$

である．ここで n は自然数，左辺は有限係数の高次 Chow 群 (付録を参照) で，完全系列

$$0 \to \mathrm{CH}^r(X, q)/n \to \mathrm{CH}^r(X, q; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathrm{CH}^r(X, q+1)[n] \to 0 \tag{2}$$

によりもとの高次 Chow 群と関係している．(1) の右辺は適当な係数をもつ X のエタールコホモロジーである．n が X の剰余体の標数と素であれば

$$H_{\text{ét}}^t(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) = H_{\text{ét}}^t(X, \mu_n^{\otimes r}) \quad (\mu_n \text{ は } 1 \text{ の } m \text{ 乗根の層})$$

である．n が X の剰余体の標数と素でないときは特別な扱いが必要となるが説明は省略する (X が整数環 $\mathbb{Z}$ 上平坦である場合の定義は，n を割る標数のファイバーに関する適当な付加条件を必要とする ([Sat1] 参照)．いかに述べる定理ではこの条件を常に必要とするのだがとくに断らないことにする)．

エタールコホモロジーについてはすでに長年研究されており，多くの基本的な事実が示されている．その一つとして次の定理が重要である．

定理 3.1 *(M.Artin, Milne, 佐藤)* n は X の剰余体の標数と互いに素，あるいは X は有限体上または整数環上固有的であると仮定する．このとき，$H_{ét}^t(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$ は有限である．

従って，$\rho_X^{r,q}$ が単射であれば $\mathrm{CH}^r(X, q; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ の有限性が従う．完全系列 (2) よりこれは $\mathrm{CH}^r(X, q)/n$ や $\mathrm{CH}^r(X, q+1)[n]$ の有限性を導いてくれる．

$\rho_X^{r,q}$ の単射性に関しての最初の重要な結果は次の定理である．

定理 3.2 *(Suslin-Voevodsky[SV], Geisser-Levine[GL])* $\rho_X^{r,q}$ は $r \leq q$ にたいし同型で，$r = q+1$ にたいしては単射である．

証明には最近 Rost と Voevodsky により解決された Bloch-Kato 予想が使われる ([SJ], [V2], [HW], [W1], [W2]).

次に $r \geq d = \dim(X)$ の場合の結果について説明する．

定理 3.3 *(Jannsen-S.[JS])* X が有限体 $\mathbb{F}$ 上の滑らかな射影的多様体とし，$r \geq d = dim(X)$ とする．このとき

$$\rho_X^{r,q} : \mathrm{CH}^r(X, q; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H_{\acute{e}t}^{2r-q}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$$

は $q \leq 2$, または以下に述べる仮定 $\mathbf{(RES)}_{q,\mathbb{F}}$ のもとで同型である．

一般にスキーム S にたいし S 上の有限型スキームにたいする特異点解消の条件を考える．

$\mathbf{(RES)}_{q,S}$ 任意の S 上有限型な正則スキーム Z と整な閉部分スキーム $W \subset Z$ で次元が q 以下のものにたいし，双有理写像 $\pi : Z' \to Z$ が存在して次を満たす.

- Z' は正則かつ $\pi^{-1}(Z - W) \simeq Z - W$,
- $W' = \pi^{-1}(W)_{red} \subset Z'$ は単純正規交叉因子.

定理 3.4 *(Hironaka, Cossart-Jannsen-S.[CJS])* S が優秀 *(たとえば体または Dedekind 環上有限型)* かつ $q \leq 2$ なら $\mathbf{(RES)}_{q,S}$ は成立する．

次に特異点解消に頼らない結果を紹介する．

定理 3.5 *(Kerz-S.[KeS], [Sa])* X が有限体 $\mathbb{F}$ 上の固有的かつ滑らかな多様体とする．このとき $r \geq d = dim(X)$ かつ n が $\mathrm{ch}(\mathbb{F})$ と互いに素であれば

$$\rho_X^{r,q} : \mathrm{CH}^r(X, q; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H_{\acute{e}t}^{2r-q}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$$

は同型である．

定理 3.5 よりモチフィックコホモロジーの有限性定理に関する新しい結果が得られる．

系 3.6 X が有限体 $\mathbb{F}$ 上の準射影的なスキームとする．このとき $r \geq d = dim(X)$ かつ n が $\mathrm{ch}(\mathbb{F})$ と互いに素であれば，$\mathrm{CH}^r(X, q; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は有限である．

定理 3.5 の証明法は定理 3.3 のそれを改良したもので，特異点解消の代わりに次の結果を用いる．

定理 3.7 *(Gabber[Il])* F を完全体とし，ℓ を $\mathrm{ch}(F)$ と異なる素数とする．F 上滑らかな多様体 Z と，Z とは異なる整な閉部分スキーム $W \subset Z$ にたいし，固有的な全射 $\pi : Z' \to Z$ が存在して次を満たす．

• Z' は F 上滑らかつ $\pi^{-1}(W)_{red}$ は単純正規交叉因子，

• Z とは異なる閉部分スキーム Σ が存在して $\pi : \pi^{-1}(Z-\Sigma) \to Z-\Sigma$ は有限エタール射で，その次数は ℓ と互いに素である．

同じ手法により次の定理も示される．

定理 3.8 *(Kerz-S.)* k を $\mathfrak{p}$-進体とし F をその剰余体とする．X が $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ 上の固有的かつ正則なスキームとする．このとき $r \geq d = dim(X)$ かつ n が $\mathrm{ch}(F)$ と互いに素であれば

$$\rho_X^{r,q} : \mathrm{CH}^r(X, q; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H_{\acute{e}t}^{2r-q}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$$

は同型である．

系 3.9 k を $\mathfrak{p}$-進体とし F をその剰余体とする．X が $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ 上の準射影的なスキームとする．このとき $r \geq d = dim(X)$ かつ n が $\mathrm{ch}(\mathbb{F})$ と互いに素であれば，$\mathrm{CH}^r(X, q; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は有限である．

4 ゼータ関数の特殊値への応用

この節では X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかで射影的な多様体とする．X の合同ゼータ関数

$$\zeta(X, s) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^n})| \frac{q^{-ns}}{n}\right) \quad (s \in \mathbb{C})$$

を考える．その整数点 $s = r \in \mathbb{Z}$ での特殊値

$$\zeta(X, r)^* := \lim_{s \to r} \zeta(X, s) \cdot (1 - q^{r-s})^{\rho_r} \quad (\rho_r := -\mathrm{ord}_{s=r}\zeta(X, s))$$

が問題となる．Grothendieck と Deligne の基本的結果により

$$\zeta(X, r)^* \in \mathbb{Q}^\times$$

であることが知られている．以下，ℓ を素数として，アーベル群 M の ℓ べきで消えるねじれ元全体を $M\{\ell\}$ で表す．

定理 4.1 $\ell \neq \mathrm{ch}(\mathbb{F}_q)$ または $d = dim(X) \leq 4$ を仮定する．このとき全ての $i \geq 0$ にたいし $\mathrm{CH}^d(X, i)\{\ell\}$ は有限である．さらに $\zeta(X, 0)^*$ の ℓ べき部分は次の値に一致する。

$$\prod_{0 \leq i \leq 2d} \left|\mathrm{CH}^d(X, i)\{\ell\}\right|^{(-1)^i}$$

上の定理は定理 3.5 および $\zeta(X, 0)^*$ をエタールコホモロジーを用いて表す Milne の公式 [Mil] より従う．

上の結果は解析的類数公式の類似と見れる．実際，代数体 K にたいし $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ とすれば，類数公式を

$$\lim_{s\to 0} \zeta(X,s)\cdot s^{-\rho_0} = -\frac{|\mathrm{CH}^1(X)_{\mathrm{tors}}|}{|\mathrm{CH}^1(X,1)_{\mathrm{tors}}|}\cdot R_K$$

と書きなおすことができる．$X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ の場合には $\mathrm{CH}^1(X,1)$ が有限生成であっても一般には有限ではないのでレギュレーター R_K が公式の中に現れる．定理 4.1 の場合には $\mathrm{CH}^d(X,i)$ は $i=0$ 以外では有限と予想されており，これによりレギュレーターに相当する量が表れない．

5 定理の証明と Hasse 原理

X は 3 節のとおりとする．さらに X は有限体あるいは整数環上射影的であるとしたとき，$r \geq d = \dim(X)$ にたいしての同型

$$\rho_X^{r,q} : \mathrm{CH}^r(X,q;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_{\text{ét}}^{2r-q}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$$

が成り立つことを示す基本的なアイデアを以下で説明する．まず高次 Chow 群とエタールコホモロジーにたいする射影束公式 (これにより X を $\mathbb{P}_X^{r-d} = X\times\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{r-d}$ に置き換えることが許される) を用いることにより，$r > d = \dim(X)$ の場合が $r = d$ の場合に帰着される

次に $r = d := \dim(X) = 1$ の場合を見てみる．このとき X は有限体上の滑らかな射影的曲線，または代数体 k にたいし $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ である．議論を簡単にするために，後者の場合には k は実素点を持たないと仮定する．このとき

$$\rho_X^{1,0} : \mathrm{CH}^1(X)/n \to H_{\text{ét}}^2(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))$$

を考える．

補題 5.1 次の完全系列が存在する．

$$0 \to \mathrm{CH}^1(X)/n \xrightarrow{\rho_X^{1,0}} H_{\acute{e}t}^2(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) \to \\ \mathrm{Ker}\Big(Br(k)[n] \xrightarrow{\iota} \bigoplus_{x\in X_{(0)}} Br(k_x)[n]\Big) \to 0$$

ここで $X_{(0)}$ は X の閉点全体の集合で，$x \in X_{(0)}$ にたいし k_x は X の関数体 $k = k(X)$ の x における完備化である．また $Br(k)$ は k のブラウアー群である．

補題から $\rho_X^{1,0}$ が同型性が，次に述べる k のブラウアー群の Hasse 原理 (つまり ι の単射性) から従う．

定理 5.2 *(Brauer-Hasse-Noether)* k を代数体あるいは有限体上の一変数関数体とする．P_k を k の付値全体の集合とし，k_v を $v \in P_k$ における k の完備化とする．A を k 上の中心的単純環 A とし，$[A:k] = n^2$ とする．このとき，任意の $v \in P_k$ にたいし同型 $A\otimes_k k_v \simeq M_n(k_v)$ が成り立つなら同型 $A \simeq M_n(k)$ が成り立つ．ここで $M_n(*)$ は n 次正方行列環を表す．

ここでブラウアー群の Hasse 原理を高次元に拡張した原理を導入しよう．

定義 5.3 X を有限体，あるいは代数体または局所体の整数環上有限型なスキームとする．X の加藤複体 $KC_\bullet(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ とは

$$\cdots \to \bigoplus_{x \in X_{(a)}} H^{a+1}(x, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a)) \to \bigoplus_{x \in X_{(a-1)}} H^{a}(x, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a-1)) \to \cdots$$
$$\cdots \to \bigoplus_{x \in X_{(1)}} H^{2}(x, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) \to \bigoplus_{x \in X_{(0)}} H^{1}(x, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

なる複体である．ここで

$$X_{(a)} = \{x \in X \mid dim\overline{\{x\}} = a\}$$

*(*つまり X における閉包が次元 a をもつような点全体の集合*)* である．$X_{(a)}$ の項が次数 a に置かれている．$H^{a+1}(x, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a))$ は x の剰余体 $\kappa(x)$ のガロアコホモロジーで，その係数 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(a)$ は n と $\mathrm{ch}(\kappa(x))$ が互いに素なら $\mu_n^{\otimes a}$ である *(*その他の場合の説明は省略する*)*．境界写像は離散付値体のガロアコホモロジーの剰余写像により与えられる．

$\dim(X) = 1$，つまり X は有限体上の滑らかな射影的曲線，または代数体 k にたいし $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ である場合には，加藤複体 $KC_\bullet(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は

$$\bigoplus_{\eta \in X_{(1)}} H^{2}(\eta, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) \to \bigoplus_{x \in X_{(0)}} H^{1}(x, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

となる．k を X の関数体とすれば，第一項は $Br(k)[n]$ に同型，第二項は剰余写像により $\bigoplus_{x \in X_{(0)}} Br(k_x)[n]$ に同型であることが示される．よって k のブラウアー群の Hasse 原理は，$KC_\bullet(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ の次数 1 でのホモロジー群 $H_1(KC_\bullet(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ の消滅と同値である．

定義 5.4 X を定義 *5.3* のとおりとするとき，X の加藤ホモロジーを

$$KH_a(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = H_a(KC_\bullet(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \quad (a \geq 0)$$

で定義する．

加藤 [K] はブラウアー群の Hasse 原理を高次元のスキームに拡張する予想を提出した．

予想 5.5 *(*加藤の *Hasse* 原理*)* X を有限体上滑らかで固有的なスキーム，あるいは代数体あるいは局所体の整数環上の固有的かつ正則なスキームとする．簡単のため $X(\mathbb{R}) = \emptyset$*(*つまり X は $\mathbb{R}$-有理点をもたない*)* と仮定する．このとき

$$KH_a(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0 \quad \mathit{for}\ a > 0.$$

サイクル写像

$$\rho_X^{d,q} : \mathrm{CH}^d(X, q; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^{2d-q}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d))$$

の同型性と加藤予想との関係は次の補題により与えられる．補題により加藤予想から $\rho_X^{d,q}$ が同型性が導かれる．

補題 5.6 X を上のとおり，$d = dim(X)$ とすると次の完全系列が存在する．

$$KH_{q+2}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathrm{CH}^d(X, q; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho_X^{d,q}} H^{2d-q}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \to KH_{q+1}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

最後に加藤予想の現状について説明しよう (詳しくは[Sa] を参照)．$\dim(X) = 1$ の場合の加藤予想は古典的なブラウアー群の Hasse 原理に同値である．$\dim(X) = 2$ の場合の加藤予想は加藤氏自身により証明された [K]．

定理 5.7 *(Jannsen-S.[JS])* X が有限体 $\mathbb{F}$ 上の滑らかな射影的多様体とする．このとき $a \leq 4$ または仮定 $\mathbf{(RES)}_{a-2,\mathbb{F}}$ のもとで

$$KH_a(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0 \quad (a > 0)$$

定理 5.8 *(Kerz-S.[KeS])* X が有限体 $\mathbb{F}$ 上の固有的かつ滑らかな多様体とする．このとき n が $\mathrm{ch}(\mathbb{F})$ と互いに素であれば

$$KH_a(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0 \quad (a > 0)$$

定理 5.9 *(Kerz-S.[KeS])* k を $\mathfrak{p}$-進体とし F をその剰余体とする．X が $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ 上の固有的かつ正則なスキームとする．このとき n が $\mathrm{ch}(\mathbb{F})$ と互いに素であれば

$$KH_a(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0 \quad (a > 0)$$

定理 3.3，定理 3.5，定理 3.8 は上の定理と補題 5.6 の帰結である．これらの定理の証明では Weil 予想 (Deligne の定理 [D]) が基本的な役割を果たす．

6 付録：高次 Chow 群の定義の復習

まず位相空間 X の特異ホモロジー

$$H_q(X, \mathbb{Z}) := H_q(s(X, \bullet))$$

を復習しよう．ここで $s(X, \bullet)$ は特異チェイン複体

$$\cdots \to s(X, q) \xrightarrow{\partial} s(X, q-1) \xrightarrow{\partial} \cdots \to s(X, 0)$$

$$s(X, q) = \bigoplus_{\Gamma} \mathbb{Z}[\Gamma] \qquad (\Gamma : \Delta^q_{top} \to X \text{ 連続写像})$$

である．ただし

$$\Delta^q_{top} = \Big\{(x_0, x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid \sum_{0 \leq i \leq q} x_i = 1,\ x_i \geq 0\Big\}$$

は位相的標準単体である．境界写像は Δ^q_{top} の余次元 1 の面 ($q+1$ 個ある) への制限の交代和として定義される．

高次 Chow 群の定義はこの代数的類似をたどる．位相的標準単体の代数的類似は

$$\Delta^q = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t_0, \ldots, t_q]/(\sum_{i=0}^{q} t_i - 1))$$

である．その面は

$$\Delta^s = \{t_{i_1} = \cdots = t_{i_{q-s}} = 0\} \subset \Delta^q$$

により与えられる．$s(X, q)$ の代数的類似は

$$z^r(X, q) = \bigoplus_{\Gamma \subset X \times \Delta^q} \mathbb{Z}[\Gamma]$$

により与えられる．ただし Γ は $X \times \Delta^q$ 上の余次元 r の整な閉部分スキームで Δ^q の全ての面 Δ^s にたいし $X \times \Delta^s$ と正しい次元で交わるもの全体をわたる．これから特異チェイン複体の場合と同様にして，サイクル複体

$$\cdots \to z^r(X, q) \xrightarrow{\partial} z^r(X, q-1) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} z^r(X, 0)$$

が生じる．高次 Chow 群は

$$\mathrm{CH}^r(X, q) := H_q(z^r(X, \bullet))$$

により定義される．また有限係数の高次 Chow 群は

$$\mathrm{CH}^r(X, q; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) := H_q(z^r(X, \bullet) \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

により定義される．

References

[Bl] S. Bloch, *Algebraic cycles and higher algebraic K-theory*, Adv. Math. **61** (1986), 267–304.

[Bl2] S. Bloch, *Higher Algebraic K-theory and class field theory for arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **114** (1981), 229–265.

[CJS] V. Cossart, U. Jannsen and S. Saito, *Resolution of singularities for embedded surfaces*, in preparation (see www.mathematik.uni-regensburg.de/Jannsen).

[CTSS] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc and C. Soulé, *Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux*, Duke Math. J. **50** (1983), 763–801.

[D] P. Deligne, *La conjecture de Weil II*, Publ. Math. IHES **52** (1981), 313–428.

[Ge] T. Geisser, *Motivic cohomology over Dedekind rings*, Math. Z. **248** (2004), 773–794.

[GL] T. Geisser and M. Levine, *The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky*, J. Reine Angew. **530** (2001), 55–103.

[HW] C. Weibel, *Axioms for the Norm Residue Isomorphism*, K-theory Preprint Archives, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0809/

[Il] L. Illusie, *On Gabber's refined uniformization*, a preprint available at http://www.math.u-psud.fr/ illusie/

[JS] U. Jannsen and S. Saito, *Kato conjecture and motivic cohomology over finite fields*, preprint (http://www.lcv.ne.jp/ smaki/en/index.html).

[K] K. Kato, *A Hasse principle for two dimensional global fields*, J. für die reine und angew. Math. **366** (1986), 142–183.

[KS] K. Kato and S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **118** (1985), 241–275.

[KeS] M. Kerz and S. Saito, *Kato conjecture and motivic cohomology for arithmetic schemes*, text in preparation.

[L] M. Levine, *K-theory and motivic cohomology of schemes*, preprint.

[Mil] J.S. Milne, *Values of zeta functions of varieties over finite fields*, American J. of Math. **108** (1986), 297–360.

[SJ] A. Suslin and S. Joukhovitski, *Norm Varieties* J. Pure Appl. Alg. **206** (2006), 245–276.

[Sat1] K. Sato, *p-adic étale Tate twists and duality of arithmetic schemes* (with an appendix by Hagihara, K.). Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4) **40** (2007), 519–588

[Sat2] K. Sato, *Higher cycle class maps for p-adic étale Tate twists and the image of p-adic regulators*, in preparation

[Sa] S. Saito, *Recent progress on the Kato conjecture*, preprint (http://www.lcv.ne.jp/ smaki/en/index.html).

[SV] A. Suslin and V. Voevodsky, *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, in: Cycles, Transfer, and Motivic Homology Theories, Annals of Math. Studies **143**, Princeton University Press, 2000.

[V1] V. Voevodsky, *Triangulated categories of Motives over a field*, in: Cycles, Transfer, and Motivic Homology Theories, Annals of Math. Studies **143**, Princeton University Press, 2000.

[V2] V. Voevodsky, *On motivic cohomology with $\mathbb{Z}/l$-coefficients*, K-theory Preprint Archives, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0639/

[W1] C. Haesemeyer and C. Weibel, *Norm Varieties and the Chain Lemma (after Markus Rost)*, K-theory Preprint Archives, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0900/

[W2] C. Weibel, *Patching the Norm Residue Isomorphism Theorem*, K-theory Preprint Archives, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0844/