Hochschild cohomology and Nakayama algebras

長瀬　潤

奈良工業高等専門学校

1　序

代数のホッホシルト・コホモロジー（Hochschild cohomology）は環論や群論，表現論，幾何学，トポロジー，ホモトピー論など様々な分野に現れる．その定義は線形代数の知識があれば理解できるため簡単に計算に取り掛かることができるが，比較的小さな代数であってもその計算は複雑なものとなる．特に，ホッホシルト・コホモロジーには積構造があり代数となるが，その生成元と関係式を求めることには更なる困難を伴う．一方，代数 A のホッホシルト・コホモロジー代数 $\mathrm{HH}(A)$ が有限生成代数で，任意の有限生成 A-加群 M，N に対して，$\oplus_{n\geqq 0}\mathrm{Ext}^n_{A\otimes_k A^{op}}(M,N)$ が有限生成 $\mathrm{HH}(A)$-加群であれば，A-加群の表現論的性質とその加群に付随するサポート多様体の幾何学的性質の間に興味深い関係が生じることから，この二つの有限性条件を満たす代数に関する研究が進められている．また，これらの有限性条件を満たす代数のクラスとしては，有限群の群環（[7]），その一般化である有限次元余可換ホップ代数（[8]），外積代数，可換代数の場合では完全交叉などが知られているが，計算が困難であるため，あまり多くは知られていない．

そこで，本稿では表現論的性質が十分に研究されている中山代数において、二つの有限性条件がいつ成立するかを考える．

2　準備

本稿では簡単のため，k を代数的閉体とし代数は k-代数とする．また，代数は結合的で単位元を持つものとする．代数 A と A-A-両側加群 M に対して，M を係数とする A のホッホシルト・コホモロジー群は鎖複体

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_k(k,M)\longrightarrow \mathrm{Hom}_k(A,M)\longrightarrow \mathrm{Hom}_k(A\otimes_k A,M)\longrightarrow\cdots$$

が与えられ，そのホモロジーとして定義される（[20] 参照）．一方，この鎖複体は A の A-A-両側加群としての射影分解（bar resolution）

$$\cdots \longrightarrow A \otimes_k A \otimes_k A \longrightarrow A \otimes_k A \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

に関手 $\mathrm{Hom}_{A \otimes_k A^{op}}(-, M)$ を適用してできる鎖複体と同型になることから，M を係数とする A の n 番目のホッホシルト・コホモロジー群は $\mathrm{Ext}^n_{A \otimes_k A^{op}}(A, M)$ と同型になる．また，$M = A$ のとき，ホッホシルト・コホモロジーにはカップ積により次数代数となり，$\oplus_{n \geqq 0} \mathrm{Ext}^n_{A \otimes_k A^{op}}(A, A)$ は米田積により次数代数となるが，これらは次数代数として同型になる．そこで，本稿ではホッホシルト・コホモロジー群を以下のように定義する．

定義 2.1. 代数 A と A-A-両側加群 M に対して，M を係数とする A の n 番目の**ホッホシルト・コホモロジー群** $\mathrm{HH}^n(A, M)$ を $\mathrm{Ext}^n_{A \otimes_k A^{op}}(A, M)$ と定義する．

以降，代数 A の包絡代数 $A \otimes_k A^{op}$ を A^e と記し，ホッホシルト・コホモロジー代数 $\oplus_{n \geqq 0} \mathrm{HH}^n(A, A)$ を $\mathrm{HH}(A)$ と記す．

ホッホシルト・コホモロジー代数 $\mathrm{HH}(A)$ は graded cmmutative，つまり A の斉次元 x と y に対して，$xy = (-1)^{(\deg x)(\deg y)} yx$ が成立つ（[18] 参照）．このことから，有限群の場合と同様に，$\mathrm{HH}(A)$ の極大イデアルスペクトラム $\mathrm{MaxSpec}\,\mathrm{HH}(A)$ を使って，A-加群のサポート多様体を定義することができる．しかし，$\mathrm{HH}(A)$ は有限生成代数とは限らないため，$\mathrm{HH}(A)$ の部分代数で有限生成なものを使ってサポート多様体を定義する方法がある．詳しくは次節で説明する．

3　二つの有限性条件

有限群においては，そのコホモロジー代数を通して加群のサポート多様体が定義され，加群の極小射影分解の増大度とサポート多様体の次元の一致が示される．この結果は加群の表現論的性質と幾何学的性質を結びつける興味深いものであるが，一般の代数において同様の考察を試みると幾つかの問題点が浮上してくる．先ずは，一般の代数においてコホモロジー代数を定義できないことが挙げられる．そこで，コホモロジー代数の代用物としてホッホシルト・コホモロジー代数を使うことが考えられるが，次の問題点として，ホッホシルト・コホモロジー代数は，一般には，有限生成代数でないことが挙げられる．有限群のコホモロジー代数は常に有限生成代数であり，代数幾何での考え方を効果的に使うことができる．この問題点を回避するために，Snashall と Solberg は [18] において，加群のサポート多様体を次の様に定義した．

定義 3.1. A を有限次元代数，H を $\mathrm{HH}(A)$ の次数部分代数で有限生成代数とする．A-加群 M に対して，代数の写像 φ_M を次の合成で定義する．

$$H \xrightarrow{incl.} \mathrm{HH}(A) \xrightarrow{-\otimes_A M} \oplus_{n\geqq 0} \mathrm{Ext}^n_A(M,M).$$

このとき，

$$V_H(M) = \{m \in \mathrm{MaxSpec}H | m \geqq \mathrm{Ker}\,\varphi_M\}$$

を M の H における**サポート多様体**と呼ぶ．

一方，加群の表現論的性質と幾何学的性質を結びつける結果の証明には，$\oplus_{n\geqq 0}\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A/J, A/J)$ が H-加群として有限生成であることが必要となる．ここで，H-加群としての作用は $\varphi_{A/J}$ を通して与えられ，J は A の Jcobson radical とする．この有限性条件を仮定して，Erdmann と Holloway，Snashall，Solberg，Taillefer は [6] において，次の結果を示した．

定理 3.2. A を直既約有限次元代数，M を有限生成 A-加群，H を $\mathrm{HH}(A)$ の次数部分代数で $H^0 = \mathrm{HH}^0(A)$ とする．もし H が有限生成代数で，$\oplus_{n\geqq 0}\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A/J, A/J)$ が有限生成 H-加群であれば，次が成り立つ．

(1) $\dim V_H(M) = c(M)$.
(2) $\dim V_H(M) = 0 \iff \mathrm{pd}M < \infty \iff \mathrm{id}M < \infty$.
(3) A は *Gorenstein* である．

ここで，$\dim$ は多様体の次元を表し，$c(M)$ は M の極小射影分解 P_* の増大度

$$\min\{i \geqq 0 | i \text{ は整数で，ある自然数 } a \text{ と任意の } n \text{ に対し } \dim_k P_n < an^{i-1}\}$$

を表す．また，代数 A が *Gorenstein* であるとは，A の右側入射次元，左側入射次元が共に有限であるときをいう．

この結果は有限群における結果を一般化したものになっているが，Erdmann と Holloway，Snashall，Solberg，Taillefer は [6] において，上の定理における代数 A を自己入射代数に制限することで，有限群における様々な結果を一般化することに成功している．

また，Solberg は [19] において，上の定理における二つの有限性条件

- H が有限生成代数
- $\oplus_{n\geqq 0}\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A/J, A/J)$ が有限生成 H-加群

が共に成立する H が存在することと

- $\mathrm{HH}(A)$ が有限生成代数
- $\oplus_{n\geqq 0}\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A/J, A/J)$ が有限生成 $\mathrm{HH}(A)$-加群

が共に成立することが同値であることを示している．このことから，便宜上，**二つの有限性条件**と言えば，後半の $\mathrm{HH}(A)$ に関する条件を意味することとする．そこで，上で紹介した定理より次の問題が考えられる．

問題 3.3. 有限次元代数はいつ二つの有限性条件を満たすか．

本稿では，中山代数に対してこの問題を考える．

一方，この問題に関連した別の問題もあるので紹介しておく．加群の表現論的性質とサポート多様体の幾何学的性質の関係を調べる上では二つの有限性条件を考えることに興味がもたれるが，サポート多様体を研究する上では，ホッホシルト・コホモロジー代数が有限生成代数であれば十分である．更に，有限次元代数 A に対し，$\mathrm{HH}(A)$ のべき零元で生成されるイデアルを $\mathcal{N}$ とすると $\mathrm{MaxSpec}\,\mathrm{HH(A)}$ と $\mathrm{MaxSpec}\,\mathrm{HH(A)}/\mathcal{N}$ の間に一対一の対応があることから，次の問題が考えられる．

問題 3.4. 有限次元代数 A に対し，$\mathrm{HH}(A)/\mathcal{N}$ がいつ有限生成代数になるか．

この問題に関しては幾つかの結果があるが，例えば，Green，Snashall，Solberg が [9] において，A が monomial であれば $\mathrm{HH}(A)/\mathcal{N}$ が有限生成代数になることを示している．また，Xu は [21] において，$\mathrm{HH}(A)/\mathcal{N}$ が有限生成代数にならない有限次元代数 A の例を紹介している．

4　階層化イデアルと長完全列

この節では，ホッホシルト・コホモロジーに関する長完全列を紹介する．前説で述べた二つの有限性条件を確認する方法の一つとして，何らかの手段で，確認がより簡単な代数に帰着させる方法が考えられる．その手段の一つとして，長完全列を使った帰着方法が挙げられるが，一般の代数において，そのホッホシルト・コホモロジーに関する長完全列はまだ知られていない．一方，特別な代数における長完全列は幾つか知られており，次の Happel の長完全列がその源流となっている．

定理 4.1 ([11]). B を有限次元代数，M を有限生成左 B-加群，

$$A = \begin{pmatrix} B & M \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

とすると，次の長完全列が存在する．

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_B^{n-1}(M, M) \to \mathrm{HH}^n(A) \to \mathrm{HH}^n(B) \oplus \mathrm{HH}^n(k) \to \cdots .$$

この長完全列は Happel のものと少し違う表記となっているが，本質的に同じものである．また，この長完全列は二通りの方法で一般化される．一つは，次に挙げる三角代数への一般化であり，もう一つは，その次に挙げる heredity イデアルを持つ代数への一般化である．

定理 4.2 ([2], [10], [13]). B と C を有限次元代数，M を有限生成 B-C-両側加群，

$$A = \begin{pmatrix} B & M \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

とすると，次の長完全列が存在する．

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_{B\text{-}C}^{n-1}(M, M) \to \mathrm{HH}^n(A) \to \mathrm{HH}^n(B) \oplus \mathrm{HH}^n(C) \to \cdots .$$

定理 4.3 ([15]). A を有限次元代数で *heredity* イデアル AeA をもつものとし，$B = A/AeA$ とすると，次の長完全列が存在する．

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_A^n(D(eA), Ae) \to \mathrm{HH}^n(A) \to \mathrm{HH}^n(B) \to \cdots .$$

ここで，$D = \mathrm{Hom}_k(-, k)$，*heredity* イデアルは，A べき等元 e で生成されるイデアル AeA で，左 A-加群として射影的で，$eAe \cong k$ となるものである．

代数 $A = \begin{pmatrix} B & M \\ 0 & k \end{pmatrix}$ において $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と置くと， AeA が heredity イデアルとなることから，最後の長完全列は Happel の長完全列の一般化とみることができる．

上の二つの定理に現れる代数は共に階層化イデアル（stratifying ideal）をもつ代数であり，これらの長完全列は，階層化イデアルをもつ代数の場合へと一般化される．その結果を述べる前に，階層化イデアルの定義を述べる．

定義 4.4 ([3] 参照). A を代数とし，e を A のべき等元とする．e で生成されるイデアル AeA が次の条件をみたすとき，**階層化イデアル**と呼ぶ．

(1) 積写像 $Ae \otimes_{eAe} eA \to AeA$ が同型写像である．

(2) 任意の $n > 0$ に対して，$\mathrm{Tor}_n^{eAe}(Ae, eA) = 0$.

定理 4.5 ([12]). A を有限次元代数で，階層化イデアル AeA をもつものとし，$B = A/AeA$ とすると，次の長完全列が存在する.

(1) $\cdots \to \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, AeA) \to \mathrm{HH}^n(A) \to \mathrm{HH}^n(B) \to \cdots$.
(2) $\cdots \to \mathrm{Ext}^n_{A^e}(B, A) \to \mathrm{HH}^n(A) \to \mathrm{HH}^n(eAe) \to \cdots$.
(3) $\cdots \to \mathrm{Ext}^n_{A^e}(B, AeA) \to \mathrm{HH}^n(A) \to \mathrm{HH}^n(B) \oplus \mathrm{HH}^n(eAe) \to \cdots$.

代数 $A = \begin{pmatrix} B & M \\ 0 & C \end{pmatrix}$ において $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と置くと， AeA が 階層化イデアルとなることから，上の定理の長完全列 (3) は 定理 4.2 の一般化とみることができる．また，別の代数 A において，そのべき等元 e で生成されるイデアル AeA が左（もしくは右）A-加群として射影的であれば，階層化イデアルになることから heredity イデアルは階層化イデアルである．よって，上の定理の長完全列 (1) は定理 4.3 の一般化とみることができる.

また，階層化イデアル AeA をもつ代数 A においては，有限生成加群の上に有界な導来圏に関する partial recollement

$$D^+(\mathrm{mod}\, A/AeA) \rightleftarrows D^+(\mathrm{mod}\, A) \rightleftarrows D^+(\mathrm{mod}\, eAe),$$

が存在する（[3] 参照)．このことから，上の定理の長完全列 (3) が存在することを伺い知ることができる．長完全列 (1) に関しては，Suarez-Alvarez（[16]）のスペクトラル系列を使った証明もある。

5　中山代数のホッホシルト・コホモロジー

二つ前の節で紹介したように，Erdmann と Holloway，Snashall，Solberg，Taillefer は [6] において，与えられた有限次元代数のホッホシルト・コホモロジーが二つの有限性条件を満たすときその有限次元代数が Gorenstein になることを示した．一方，与えられた中山代数が Gorenstein であるとき，そのホッホシルト・コホモロジーが二つの有限性条件を満たすことが示される（[14])．この節では，その証明の粗筋を紹介する．ここで使われる道具は前節での長完全列であり，これを使って，より小さな中山代数に帰着させることで証明される．先ずは，中山代数の定義と証明に必要な補題と命題を紹介する.

定義 5.1. 有限次元代数 A が次の条件を満たすとき，**中山代数** と呼ぶ.

(1) 任意の直既約射影左 A-加群は uiserial である.

(2) 任意の直既約射影右 A-加群は uiserial である.

ここで、加群が uniserial であるとは、その加群の部分加群からなる集合が包含関係に関して全順序集合になっているときをいう。

中山代数の直既約加群はよく知られており，直既約射影加群の組成列から様々な性質を調べることができる．このことから，例えば，中山代数の全ての直既約射影加群の長さが等しければその中山代数は自己入射的であることが示される（[1] 参照）．特に，中山代数が局所代数のときは自己入射的である．

補題 5.2. A を有限次元代数とする．もし A の A^e 上の極小射影分解が周期的であれば，A は二つの有限性条件を満たす．

この補題は Schulz（[17]） の考え方を使って証明される。

命題 5.3. A を有限次元代数で階層化イデアル AeA をもつものとする．また $\mathrm{pd}_{A^e} A/AeA < \infty$ と仮定する．このとき eAe が二つの有限性条件を満たせば，A も二つの有限性条件を満たす．

この命題の証明に前節での長完全列が使われるので，証明の粗筋を紹介しておく．

Proof. $\mathrm{pd}_{A^e} A/AeA < \infty$ より，定理 4.5 の長完全列を使うと，$\mathrm{HH}^{>N}(A) \cong \mathrm{HH}^{>N}(eAe)$ が成り立つ．ここで $N = \mathrm{pd}_{A^e} A/AeA$．よって，$\mathrm{HH}(A)$ が有限生成代数であることと $\mathrm{HH}(eAe)$ が有限生成代数であることは同値である．また，次の可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{HH}(A) & \xrightarrow{eA\otimes_A - \otimes_A Ae} & \mathrm{HH}(eAe) \\
{\scriptstyle -\otimes_A A/J}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -\otimes_{eAe} eA/eJ} \\
\mathrm{Ext}^*_A(A/J, A/J) & \xrightarrow{eA\otimes_A -} & \mathrm{Ext}^*_{eAe}(eA/eJ, eA/eJ),
\end{array}$$

の下側の写像において,

$$\mathrm{Ext}^{>N}_A(A/J, A/J) \cong \mathrm{Ext}^{>N}_{eAe}(eA/eJ, eA/eJ)$$

が成立する．このことから $\mathrm{Ext}^*_{eAe}(eA/eJ, eA/eJ)$ が有限生成 $\mathrm{HH}(eAe)$-加群であれば，$\mathrm{Ext}^*(A/J, A/J)$ が有限生成 $\mathrm{HH}(A)$-加群となる． □

定理 5.4 ([14]). A を中山代数とする．A が *Gorenstein* であることと A が二つの有限性条件を満たすことは同値である．

以下に，この定理の証明の粗筋を紹介する．

Proof. [6] において，有限次元代数が二つの有限性条件を満たせばそれは Gorenstein になることが示されている．

有限次元代数 A を Gorenstein とする．もし A が自己入射代数ならば，A の A^e 上の極小射影分解が周期的になる（[4], [5] を参照）．よって，補題 5.2 より，A は二つの有限性条件を満たす．次に，A が自己入射代数でなければ，A の原始べき等元 f で Jf が射影左 A-加群になるものが存在する．$e = 1 - f$ とおくと，次が成り立つ．

(1) AeA は階層化イデアルとなる．
(2) $\mathrm{pd}_{A^e} A/AeA < \infty$.
(3) eAe は Gorenstein 中山代数である．

よって，命題 5.3 より，二つの有限性条件に関する問題が eAe に帰着される．また，eAe の単純加群の個数は A の単純加群の個数よりも少なく，単純加群を一つしかもたない中山代数は自己入射代数であることから，この定理が示された． □

参考文献

[1] I. Assem, D. Simson and A. Skowronski: *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, London Math. Soc. Student Texts **65** (2006).

[2] C. Cibils, E. Marcos, M. J. Redondo and A. Solotar: *Cohomology of split algebras and of trivial extensions*, Glasgow Math. J. **45** (2003), no. 1, 21-40.

[3] E. Cline, B. Parshall and L. Scott: *Stratifying endomorphism algebras*, Memoir AMS **591** (1996), i-vi, 1-119.

[4] K. Erdmann and T. Holm: *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n*, Forum Math. **11** (1999), no. 2, 177-201.

[5] K. Erdmann, T. Holm and N. Snashall: *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n II*, Algebra Represent. Theory **5** (2002), no. 5, 457-482.

[6] K. Erdmann, M. Holloway, N. Snashall, Ø. Solberg and R.Taillefer: *Support varieties for self-injective algebras*, K-theory. **33** (2004), no. 1, 67-87.

[7] L. Evens: *The cohomology rong of finite group*, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 224-239.

[8] E. M. Friedlander and A. Suslin: *Cohomology of finite group schemes over a field*, Invent. Math. **127** (1997), no. 2, 209-270.

[9] E. L. Green, N. Snashall and Ø. Solberg: *The Hochschild cohomology ring modulo nilpotence of a monomial algebra*, J. Algebra Appl. **5** (2006), no. 2, 153–192.

[10] E. L. Green and Ø. Solberg: *Hochschild cohomology rings and triangular rings*, Proceedings of the Ninth International Conference, Beijing, 2000, eds. D. Happel and Y. B. Zhang, Beijing Normal University Press, vol. II, (2002), 192-200.

[11] D. Happel: *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, Lecture Notes in Math., **1404**, Springer, Berlin (1989), 108-126

[12] S. Koenig and H. Nagase: *Hochschild cohomology and stratifying ideals*, J. Pure Appl. Algebra. **213** (2009), no. 5, 886–891.

[13] S. Michelena and M. I. Platzeck: *Hochschild cohomology of triangular matrix algebras*, J. Algebra, **233** (2000), 502-525.

[14] H. Nagase: *Hochschild cohomology and Nakayama algebras*, (preprint) .

[15] J. A. de la Peña and C. C. Xi: *Hochschild cohomology of algebras with homological ideals*, Tsukuba J. Math. **30** (2006), no. 1, 61-79.

[16] M. Suarez-Alvarez: *Applications of the change-of-rings spectral sequence to the computation of Hochschild cohomology*, arXiv:0707.3210.

[17] R. Schulz: *Finite generation of the extension algebra* $\mathrm{Ext}_R^*(M, M)$, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **59** (1995), no. 3, 366-374.

[18] N. Snashall and Ø. Solberg: *Support varieties and Hochschild cohomology rings*, Proc. London Math. Soc. (3) **88** (2004), no. 3, 705-732.

[19] Ø. Solberg: *Support varieties for modules and complexes*, Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics, Contemporary Math. Amer. **406** Math. Soc. (2006), 239-270.

[20] C. Weibel : *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **38** (1994).

[21] F. Xu: *Hochschild and ordinary cohomology rings of small categories*, Adv. Math. **219** (2008), 1872-1893.