リーチ格子のフレームとその応用

宗政昭弘 (Akihiro Munemasa)
東北大学情報科学研究科

2009 年 8 月 6 日

1　リーチ格子とは

$\mathbb{R}^{24}$ に通常の内積を入れたものを $\mathbb{Z}$-加群とみて、その階数 24 の部分加群 L の基底を行ベクトルとする行列 B が次の性質を満たすとき、L をリーチ格子と呼ぶ。ただし、$G = BB^T$ は L のグラム行列である。

(i) $\det G = 1$,

(ii) $G_{ij} \in \mathbb{Z}$,

(iii) $G_{ii} \in 2\mathbb{Z}$,

(iv) $\forall x \in L$, $\|x\|^2 \neq 2$.

条件 (i)–(iv) の下でリーチ格子は同型を除いて一意的である（[6, chap. 12]）。(i)–(iii) は even ユニモジュラー格子と一般に呼ばれる条件であり、(iv) はルートを持たない、という条件である。(iv) を外すと他に同型を除いてあと 23 個の格子が存在することが知られている（[6, chap. 16, chap. 18]）。

上の 24 を他の整数 n に変えると、条件 (i)–(iii) により n 次元 even ユニモジュラー格子が定義されるが、n が 8 の倍数の時に限って実例があり、例えば $n = 8$ の時は E_8 型ルート格子が同型を除いて唯一つの実例である。リーチ格子を具体的に構成するには、$X^{23} - 1$ の因数分解を用いる。それは

$$(X-1)(X^{22}+X^{21}+\cdots+X+1) \qquad \text{over } \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}&(X-1)(X^{11}+X^{10}+X^6+X^5+X^4+X^2+1)\\ &\qquad \times (X^{11}+X^9+X^7+X^6+X^5+X+1) \qquad \text{over } \mathbb{F}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(X-1)(X^{11}-X^{10}+2X^7+X^6+X^5+X^4+X^2+2X-1)\\ &\qquad \times (X^{11}+2X^{10}-X^9-X^7-X^6-X^5+2X^4+X-1) \qquad \text{over } \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\end{aligned}$$

となることがわかる。ここで $\mathbb{F}_2$ 上の分解を $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ に持ち上げることができるのは、Hensel の補題に基づいている。この因数分解を用いてリーチ格子が構成できるというのは、意外に新しい結果である（[4]）。

$$f(X) = X^{11} - X^{10} + 2X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^2 + 2X - 1$$

から、その係数を昇べきの順で並べて得られるベクトルも $f(X)$ で表すと、

$$f(X) = [-1, 2, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 0, 0, -1, 1]$$

このベクトルを以下のように 23 回シフトして得られた行列に 1/2 からなる列をつけて、さらに 24 次の単位行列の 2 倍を下に付け加えると、以下のような行列ができる。

$$\left[\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & \boxed{\tfrac{1}{2}f(X)} & & & \\ \frac{1}{2} & & \boxed{\tfrac{1}{2}f(X)} & & \\ \frac{1}{2} & & & \boxed{\tfrac{1}{2}f(X)} & \\ \vdots & & & & \ddots \\ \hline \multicolumn{5}{c}{2I_{24}} \end{array}\right] \tag{1}$$

この行ベクトルたちでリーチ格子が生成されるのである。

ちなみに、上の行列を 2 倍して modulo 2 すると、下のような行列になり、これは Golay 符号と呼ばれる $\mathbb{F}_2$ 上のベクトル空間を生成する。もともとは、リーチ格子は Golay 符号から構成されてきた（[6, chap. 4, sect. 11]）。

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & \boxed{\overline{f}(X)} & & & \\ 1 & & \boxed{\overline{f}(X)} & & \\ 1 & & & \boxed{\overline{f}(X)} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{array}\right] \text{ over } \mathbb{F}_2$$

ただし $\overline{f}(X) = f(X) \bmod 2$ を意味する。

リーチ格子の定義 (ii)–(iv) から、0 でない元 $x \in L$ に対して $\|x\|^2 \geq 4$ となることがわかる。そこで、リーチ格子のフレームを、$\{\pm f_1, \pm f_2, \ldots, \pm f_{24}\}$ で $(f_i, f_j) = 4\delta_{ij}$ を満たすものとして定義する。(1) には、L の元がいくつか行ベクトルとして書かれているが、下の 24 個がちょうどフレームの例になっている。しかし一般にはフレームは非常にたくさんある。まず、フレームを構成し得るベクトルの総数、すなわち $\|x\|^2 = 4$ を満たす $x \in L$ は 196,560 個あることが知られている。この中から互いに直交するように 24 個選んでくる方法も、相当たくさんあることが想像される。ただ、リーチ格子の自己同型群も非常に大きいので、フレームの総数も本当に巨大なのかは現時点ではわかっていない。フレームを分類することの意義をこれから説明していくことになる。

2　リーチ格子と有限単純群の歴史

ここでは、特に散在型有限単純群の歴史とリーチ格子の関わりについて簡単に述べる。有限単純群の歴史については例えば [20, 第4章] に概説されている。現在散在型有限単純群と呼ばれているものを初めて発見したのはE. Mathieu [15, 16] である。この2つの論文で合わせて5個の単純群が発見され、現在 Mathieu 群と呼ばれている。E. Witt [19] は例えば Mathieu 群のうちの一つ、M_{24} が自己同型群として作られる Steiner system と呼ばれる組合せ構造の一意性を示した。M.J.E. Golay [10] は、Golay 符号と呼ばれる2元体上のあるベクトル空間を構成した。この空間の自己同型群も M_{24} である。J. Leech [14] はリーチ格子を構成した。以後 L をリーチ格子とすると、J.H. Conway [5] は、L の自己同型群から、散在型単純群がいくつか得られることを発見した。E. Bannai and N.J.A. Sloane [1] は、リーチ格子の平方ノルム 4 のベクトル全体の作る configuration が一意的であることを示した。そして R.L, Griess [11] により、最大位数を持つ散在型有限単純群 Monster が発見された。Monster を自己同型群として持つ構造は、Griess による 196883 次元の代数をもとに I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman [9] によって moonshine module $V^\natural$ と呼ばれる vertex operator algebra として構成された。このように、散在型有限単純群は、群そのものだけでなく、その群を自己同型群として持つ何らかの構造と共に研究されてきた。実際、群の性質を調べるには、群そのものよりも、その群が作用している対象を調べた方が容易なことが多い。

Monster は、moonshine 現象 $1 + 196883 = 196884$ により数学の別の分野との関連が研究されるようになった。ここで、196883 は Monster の最小の非自明な通常表現の次元であり、196884 は楕円モジュラー関数の係数として知られている。まだわからない部分が多い Monster の解明のためには、Monster が作用する moonshine module $V^\natural$ を研究する必要があるが、これも容易なことではない。

3　2次形式から triply even code へ

リーチ格子はそれを生成する $\mathbb{R}^{24}$ のベクトルとして構成法を述べたが、そのグラム行列を考えれば、2次形式と見なすことができる。一方、リーチ格子のもとになっている Golay 符号もある意味で2次形式と関係している。$\mathbb{F}_2$ のベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して、$\mathrm{wt}(\boldsymbol{x})$ を $x_i = 1$ となる $i \in \{1, \ldots, n\}$ の数として定義する。$\mathbb{F}_2^n$ の部分空間 $\mathbf{E}_n$ を

$$\mathbf{E}_n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid \mathrm{wt}(\boldsymbol{x}) \text{ even}\}$$

で定義すると $\dim \mathbf{E}_n = n - 1$ となる。

$$Q : \mathbf{E}_n \to \mathbb{F}_2, \quad Q(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{wt}(\boldsymbol{x})}{2} \bmod 2 \tag{2}$$

とおくと、

$$Q(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = Q(\boldsymbol{x}) + Q(\boldsymbol{y}) + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

となり、Q は 2 次形式になる。Witt の定理により、直交群 $\mathrm{O}(\mathbf{E}_n, Q)$ の作用を除いて一意的な、$Q|_U = 0$ を満たす極大な部分空間が存在する。ただし、$\mathrm{O}(\mathbf{E}_n, Q)$ は $\mathrm{wt}(\boldsymbol{x})$ を不変にするわけではない（不変にするのは $\mathrm{wt}(\boldsymbol{x})/2 \bmod 2$ である）。$\mathrm{wt}(\boldsymbol{x})$ の不変性も要求すると、$\mathrm{O}(\mathbf{E}_n, Q)$ の部分群である n 次対称群 S_n を考えることになる。一般に、n 次対称群の作用によって $\mathbb{F}_2^n$ の部分空間を同値類に分けたとき、その同値類（または代表元）を長さ n の符号という。$C \subset \mathbf{E}_n$ なる符号を even な符号といい、even な符号がさらに上の 2 次形式 Q の零点のみからなっているとき、すなわち $Q|_C = 0$ となるとき C を doubly even な符号という。これは任意の $\boldsymbol{x} \in C$ に対して $4 | \mathrm{wt}(\boldsymbol{x})$ となることと同値である。例えば、$n = 24$ に対しては、極大な doubly even な符号は 12 次元となり、Golay 符号の他に、S_{24} による同値を除いてちょうど 8 個存在することが知られている。さらに 2 つ記号を準備しておく。

$$\min C = \{\mathrm{wt}(\boldsymbol{x}) \mid 0 \neq \boldsymbol{x} \in C\},$$

$$C^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \ \forall \boldsymbol{y} \in C\},$$

ただし $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ を表す。

さて、(2) と $\mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$, $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{wt}(\boldsymbol{x}) \bmod 2$ が 1 次形式であることの類似として 3 次形式が構成できる。これは、 doubly even な符号 C に対して、$C \to \mathbb{F}_2$, $T : u \mapsto \frac{\mathrm{wt}(u)}{4} \bmod 2$ とすれば良い。しかし、3 次形式については Witt の定理の類似は知られていないので、$T|_U = 0$ を満たす極大な部分空間については、その次元すら一般にはわからない。そこで、 doubly even な符号 C に対して、$T|_C = 0$ が成り立つとき、triply even と呼ぶことにする。言い換えれば、

$$\forall \boldsymbol{x} \in C,\ 8 | \mathrm{wt}(\boldsymbol{x}).$$

と同値である。

Triply even な符号の例は、moonshine module $V^{\natural}$ の構成に使われている（Dong–Griess–Höhn [7], 宮本 [17]）。この例は、リーチ格子の構成法をもとにして得られた、長さ 48 の 7 次元の符号 D_7 である。D_7 を構成するために、まず

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad H_3 = \begin{bmatrix} H & H & H \\ \mathbf{1}_8 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_8 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_8 \end{bmatrix}$$

とおくと、H_3 の行ベクトルで生成された符号は doubly even である。ここで、$\mathbf{1}_n$ は長さ n で成分がすべて 1 のベクトルを表す。D_7 を

$$\begin{bmatrix} H_3 & H_3 \\ \mathbf{1}_{24} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{24} \end{bmatrix}$$

の行ベクトルで生成された $\mathbb{F}_2^{48}$ の部分空間とすると、D_7 は triply even な符号になる。証明は簡単で、一般化もできる。もし行列 A の行ベクトルが長さ $n \equiv 0 \pmod 8$ の doubly even な符号を生成していれば、

$$\begin{bmatrix} A & A \\ \mathbf{1}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_n \end{bmatrix}$$

の行ベクトルは triply even な符号を生成する。この操作は、A で生成された符号から見ると長さが 2 倍になることから、doubling と呼ぶことにし、A で生成された符号を C とするとき、$\mathcal{D}(C)$ で表す。

4 Virasoro frame とリーチ格子

Dong–Griess–Höhn [7], 宮本 [17] は、リーチ格子をもとにして長さ 48 の triply even な符号 D_7 を作り、これを使って moonshine module $V^\natural$ を構成した。この作り方では、Virasoro VOA $L(1/2,0)$ と呼ばれるものの 48 個のテンソル積の加群の直和として $V^\natural$ ができている。一般に、$V^\natural$ に含まれる $L(1/2,0)^{\otimes 48}$ と同型な部分代数を Virasoro frame と呼ぶ。この名前はリーチ格子のフレームとの類似性から来ている。実際、リーチ格子のフレームからは部分格子が定義され、リーチ格子そのものは部分格子により剰余類分解される。

$$L \supset F = \bigoplus_{i=1}^{24} \mathbb{Z} f_i, \qquad (f_i, f_j) = 4\delta_{ij}, \tag{3}$$

$$L = \bigcup_{x \in L/F} (x + F). \tag{4}$$

この剰余類分解を記述しているのは L/F であり、それは $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{24}$ の部分加群と見なすことができる。前節では、符号とは $\mathbb{F}_2^n$ の部分空間である、と定義したが、ここではそれを拡大解釈して $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^n$ の部分加群を $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 上の長さ n の符号と呼ぶことにする。するとリーチ格子の性質から、$\mathcal{C} = L/F \subset (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{24}$ は次の性質を持つ。

(i) $|\mathcal{C}| = 2^{24}$,

(ii) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$, $\mathrm{wt}(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \pmod 8$,

(iii) $\min\{\mathrm{wt}(\boldsymbol{x}) \mid 0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}\} = 16$.

ただし、(ii), (iii) における $\mathrm{wt}(\boldsymbol{x})$ は、$x_i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{0,1,2,3\}$ を $\{0,1,2,-1\} \in \mathbb{Z}$ と見なして $\sum_{i=1}^{24} x_i^2$ を計算したものとする。上記 (i)–(ii) を満たす長さ 24 の $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 上の符号を Type II といい、さらに (iii) を満たすとき extremal と呼ぶ。逆に長さ 24 の Type II extremal な $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 上の符号から、それらを (4) における代表系とすることによりリーチ格子が作られることが容易にわかる。

リーチ格子のフレームによる剰余類分解と同様に、$V^\natural$ の Virasoro frame から $V^\natural$ の分解が得られる。

$$V^\natural \supset L(1/2,0)^{\otimes 48}, \tag{5}$$

$$V^\natural = \bigoplus_{\beta\in D} V^\beta \tag{6}$$

ただし、(6) は $L(1/2,0)^{\otimes 48}$ 加群としての分解であり、分解を添字付けているのは structure 符号と呼ばれる、長さ 48 の triply even な符号である。リーチ格子のフレームも、$V^\natural$ の Virasoro frame も一意的ではなく、たくさんあることがわかっている。リーチ格子のフレームからいろいろな長さ 24 の extremal な $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 上の符号が得られ、これらの符号の同値類がちょうどリーチ格子の自己同型群によるフレームの同値類に対応している。しかし $V^\natural$ のいろいろな Virasoro frame から、いろいろな長さ 48 の triply even な符号が得られるが、これらの符号の同値類がちょうど $V^\natural$ の自己同型群による Virasoro frame の同値類に対応しているわけではない。一方リーチ格子のフレームから $V^\natural$ の Virasoro frame が得られる、ということを Dong–Mason–Zhu [8] は示した。すなわち、(3) をリーチ格子のフレームとすると、F から自然に $V^\natural$ の Virasoro frame $\mathcal{T} \cong L(1/2,0)^{\otimes 48}$ が得られて、しかもその structure 符号 D ((6) 参照) は F が定義する $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 符号を modulo 2 reduction したものの doubling になっているのである。要約すると次の可換図式で表される。

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}\{\text{Virasoro frames of } V^\natural\}\\ \text{(most difficult)}\end{array} & \overset{\text{str}}{\to} & \left\{\begin{array}{l}\text{triply even } D\\ 長さ = 48,\ \mathbf{1}_{48}\in D\\ \min D^\perp \geq 4\end{array}\right\} \\
\\
\uparrow \text{DMZ} & & \uparrow \mathcal{D}\ \text{(doubling)} \\
\\
\{L\ のフレーム\} & \overset{F\mapsto L/F \bmod 2}{\to} & \left\{\begin{array}{l}\text{doubly even } C\\ 長さ = 24,\ \mathbf{1}_{24}\in C\\ \min C^\perp \geq 4\\ \text{(easily enumerated)}\end{array}\right\}
\end{array} \tag{7}$$

実際には上記図式に現れる 4 つの集合は、いずれも適当な同値関係による商集合を表している。また、右側の符号の集合には、triply even, doubly even の他にいろいろな条件をつけてあるが、これらは写像 str, $F \mapsto L/F \bmod 2$ の値域がそこに含まれているからである。このように制限された集合を考えることで、写像 str は全射になることがわかっている（Lam–山内 [13]）。また、Virasoro frame のうち、その structure 符号が doubling になっているものは、リーチ格子のフレームから Dong–Mason–Zhu の方法で得られる、ということがわかっている。すなわち、

$$\text{DMZ}(\{\text{frames of } L\}) = \text{str}^{-1}(\mathcal{D}(\{\text{doubly even}\})).$$

さて、我々の究極の目標は、moonshine module $V^\natural$ およびその自己同型群である Monster を理解することであるが、そのひとつのアプローチとして、$V^\natural$ の Virasoro frame にどのようなものがあるかを知りたいと考えている。Dong–Mason–Zhu [8] によれば、Virasoro frame のうちある部分はリーチ格子のフレームから得られ、しかもそのような Virasoro frame は structure 符号がリーチ格子のフレームから計算できる、ということを意味している。リーチ格子のフレーム F に対し、$C = L/F \bmod 2$ とおくと、C は長さ 24 の doubly even な符号で、$\mathbf{1}_{24} \in C$, $\min C^\perp \geq 4$ をみたす。このような符号はコンピュータを使って容易に列挙することができ、全部で 179 個あることがわかっている。写像 $F \mapsto L/F \bmod 2$ は全射ではなく、単射でもないが、像や逆像を調べることは工夫すれば出来そうである。したがって、図 (7) の写像 $\mathcal{D}$ が全射であれば好都合なのだが、残念ながらそれは正しくない。ごく最近まで、$\mathcal{D}$ の像が図 (7) の右上の集合とどれくらい異なるのかわかっていなかった。しかしこれが原理的には決定できることを示したのが次の定理（[2]）である。

Theorem 1. 長さ 48 の 符号の集合

$$\{\mathcal{D} \mid \mathcal{D} \text{ は triply even}, \mathbf{1}_{48} \in D\} \tag{8}$$

の極大元は次のいずれかである。

(i) 長さ 24 の直既約かつ極大な doubly even 符号 C に対して $\mathcal{D}(C)$ となっている（同型を除いて 7 個）。

(ii) 長さ 8 の直既約かつ極大な doubly even 符号 C_8 に対して $\mathcal{D}(C_8)^{\oplus 3}$ となっている（同型を除いて 1 個）。

(iii) 長さ 8 の直既約かつ極大な doubly even 符号 C_8 と長さ 16 の直既約かつ極大な doubly even 符号 C_{16} に対して $\mathcal{D}(C_8) \oplus \mathcal{D}(C_{16})$ となっている（同型を除いて 1 個）。

(iv) 10 次対称群の 45 次置換表現から得られる長さ 45 の triply even な符号に $\mathbf{1}_{48}$ を加えたもの（同型を除いて 1 個）。

Theorem 1 では、$\min D^\perp \geq 4$ という条件は仮定していないが、これを仮定すると (i)–(iii) のみが現れる。Theorem 1 では、極大元のみにしか言及していないが、極大元さえわかれば、コンピュータを用いて集合 (8) を決定することができる。Doubling になっている triply even な符号に含まれている triply even 符号はまた doubling になっていることが容易にわかるので、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{triply even } D \\ \text{長さ} = 48,\ \mathbf{1}_{48} \in D \\ \min D^\perp \geq 4 \end{array} \right\} = \mathcal{D}\left(\left\{ \begin{array}{l} \text{doubly even } C \\ \text{長さ} = 24,\ \mathbf{1}_{24} \in C \\ \min C^\perp \geq 4 \end{array} \right\} \right)$$
$$\cup \{ \mathcal{D}(C_8)^{\oplus 3}, \mathcal{D}(C_8) \oplus \mathcal{D}(C_{16}) \text{ に含まれる符号} \}$$

となっていることがわかった。

5 今後の課題

図 (7) において未解明の部分は次の 2 つである。

(i) $\mathrm{str}^{-1}(\{\mathcal{D}(C_8)^{\oplus 3}, \mathcal{D}(C_8) \oplus \mathcal{D}(C_{16})$ に含まれる符号 $\})$ の決定,

(ii) リーチ格子のフレームの分類.

これらのうち、(ii) については、図 (7) の写像 $F \mapsto L/F \bmod 2$ を用いてできるのではないかと考えている。実際、与えられた doubly even 符号 $C \subset \mathbb{F}_2^{24}$ に対して、$\mathcal{C} \bmod 2 = C$ となる $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 上の符号を分類する方法が Rains [18] によって与えられている。リーチ格子のフレームから得られる符号 L/F は Type II と呼ばれるクラスに属しているので、Rains の方法を Type II の場合に合わせて修正を加える必要があり、その方法は論文 [18] には詳しく書かれてはいない。ここで、Type II とは、$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\perp}$ かつ任意の $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$ に対して $\mathrm{wt}(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \pmod 8$ となるような符号 $\mathcal{C} \subset (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^n$ のことをいう。Rains の方法を Type II の場合に述べると次のようになる。

Theorem 2. C を長さ n, 次元 k の doubly even 符号で、行列 $A \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{F}_2)$ の行ベクトルで生成されているものとする。

$$U_0 = \{M \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{F}_2) \mid MA^T + AM^T = 0,\ \mathrm{Diag}(AM^T) + \mathrm{Diag}(\mathbf{1}M^T) = 0\},$$
$$W_0 = \langle \{M \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{F}_2) \mid MA^T = 0\}, \{AE_{ii} \mid 1 \le i \le n\}\rangle.$$

とおくと、ある準同型 $\mathrm{Aut}(C) \to \mathrm{AGL}(U_0/W_0)$ が存在して $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 上の符号の同値類の集合

$$\{\mathcal{C} \subset (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^n \mid \mathcal{C} \text{ は Type II, } \mathcal{C} \bmod 2 = C\}/\sim$$

は U_0/W_0 上の $\mathrm{Aut}(C)$ 軌道の集合と 1 対 1 に対応する。

具体的な $\mathrm{Aut}(C)$ の作用の定義は長くなるので詳細は [3] に譲る。$n = 24$ については、$\min C^{\perp} \ge 4$ という条件の下で Theorem 2 の仮定をみたす C は同型を除いて 179 個であり、これらそれぞれについて Theorem 2 に沿って $\mathrm{Aut}(C)$ の U_0/W_0 への作用を計算すれば、長さ 24 の Type II 符号が分類できるはずである。その中から extremal なものを抜き出せば、リーチ格子のフレームの分類が完成することになる。

参考文献

[1] E. Bannai and N.J.A. Sloane, Uniqueness of certain spherical codes, Canad. J. Math. **33** (1981), 437–449.

[2] K. Betsumiya and A. Munemasa, On triply even codes, in preparation.

[3] R.A.L. Betty, Mass formula for self-orthogonal codes over the ring of integers modulo a prime power, Ph.D Thesis, Graduate School of Information Sciences, Tohoku University, 2010.

[4] A. Bonnecaze, P. Solé and A.R. Calderbank, Quaternary quadratic residue codes and unimodular lattices, IEEE Trans. Inform. Theory **41** (1995), 366–377.

[5] J.H. Conway, A perfect group of order 8,315,553,613,086,720,000 and the sporadic simple groups, Proc. Nat. Acad. Sci. **61** (1968), 398–400.

[6] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, Sphere Packing, Lattices and Groups (3rd ed.), Springer-Verlag, New York, 1999.

[7] C. Dong, R.L. Griess, Jr., and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and the moonshine module, Commun. Math. Phys. **193** (1998), 407–448.

[8] C. Dong, G. Mason and Y. Zhu, Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module, Proc. Symp. Pure. Math. **56** II (1994), 295–316.

[9] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, Academic Press, New York, 1988.

[10] M.J.E. Golay, Notes on digital coding, Proc. IEEE **37** (1949), 657.

[11] R.L. Griess, Jr., A construction of F_1 as automorphisms of a 196,883-dimensional algebra, Proc. Nat. Acad. Sci. **78** (1981), 689–691.

[12] M. Harada, C.H. Lam, and A. Munemasa, On the structure codes of the moonshine vertex operator algebra, preprint.

[13] C.H. Lam and H. Yamauchi, On the structure of framed vertex operator algebras and their pointwise frame stabilizers, Comm. Math. Phys. **277** (2008), 237–285.

[14] J. Leech, Notes on sphere packings, Canad. J. Math. **19** (1967), 251–267.

[15] E. Mathieu, Mémoire sur l'etude des fonctions de plusieurs quantités, J. Math. Pures Appl. **6** (1861), 241–243.

[16] E. Mathieu, Sur la fonctions cinq fois transitive de 24 quantités, J. Math. Pures Appl. **18** (1873), 25–46.

[17] M. Miyamoto, A new construction of the moonshine vertex operator algebra over the real number field, Ann. Math. **159** (2004), 535–596.

[18] E. Rains, Optimal self-dual codes over $\mathbb{Z}_4$, Discrete Math. **203** (1999), 215–228.

[19] E. Witt, Über Steinersche systeme, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **12** (1938), 265–275.

[20] 寺田至・原田耕一郎, 「群論」, 岩波講座現代数学の基礎, 岩波書店, 1997.