有限群上の調和解析

水川 裕司

防衛大学校 総合教育学群 数学教育室

mzh@nda.ac.jp

0　イントロダクション

このノートでは有限群 G とその部分群 H を考え，これらなのなす有限等質空間 $\mathbb{C}[G/H]$ の球関数について考える．これはリーマン対称空間の有限類似である．有限群の球関数は多くの例が計算され，ある程度の分類もされている．そこで前半では特殊関数論的な視点から有限群のゲルファントペアを紹介する．さらに後半では有限群のゲルファントペアの確率論への応用について考えたい．我々は有限群を考えるため，ここで現れる直交多項式達はいわゆる選点直交性を持つもの，つまり直交性が和で現されるものである．連続の直交多項式の場合は 2008 年度の代数学シンポジウムの報告集 [16] に詳しい解説あるのでそちらも併せて読むことをお勧めする．

1　ゲルファントペアと帯球関数

このノートで考える群は全て有限群とする．また，表現は全て複素数体上で考える．従って全ての表現はユニタリ化されているものと仮定する．

定義 1.1. G を有限群，H をその部分群とする．1 を H の恒等表現とした時，置換表現 $1\uparrow_H^G$ が G の表現として無重複な時 (G,H) をゲルファントペアという．

以下では (G,H) をゲルファントペアとして議論を進める．いま，置換表現が

$$1\uparrow_H^G = \bigoplus_{i=0}^{s} V_i$$

の様に分解したとしよう，ここで各 V_i は G の既約表現である．いま (G,H) がゲルファントペアであることより，フロベニウスの相互律より各既約成分には

$$hv(i) = v(i) \ \& \ |h(i)| = 1$$

を満たす元がただ一つ存在する事がわかる．

定義 1.2. 上の記号の元で G 上の関数を

$$\omega_i(g) = \langle v(i), gv(i) \rangle \quad (0 \le i \le s)$$

で定義し，これらを帯球関数と呼ぶ．

帯球関数はユニタリ表現の表現行列の成分なので，直交する事に注意する．

群 G に対して $\mathbb{C}G$ をその群環，また，$C[G]$ を G 上の（複素数値）関数全体とする．このとき，対応

$$\mathbb{C}G \ni \sum_{g \in G} a_g g \longmapsto (f : g \mapsto a_g) \in C[G]$$

は $\mathbb{C}G$ と $C[G]$ の間の代数の同型を与える．ただし，ここで $C[G]$ の積はたたみ込み積，つまり

$$f * f'(g) = \sum_{xy=g} f(x)f'(y) \quad (f, f' \in C[G])$$

を考えている．この同型により以下では $\mathbb{C}G$ と $C[G]$ を同一視をする．さて，帯球関数 ω_i は簡単な計算により両側 H-不変な関数である事がわかる．さらに，

$$C[H\backslash G/H] = \{f \in C[G] \mid f(hgh') = f(g) \ \ (\forall h, h' \in H)\}$$

とおくと次の事がわかる．

命題 1.3. 群環の標準的な内積

$$(f, f') = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)\overline{f'(g)}$$

を考えると，帯球関数は $C[H\backslash G/H]$ の直交基底である．また，直交関係は $(\omega_i, \omega_j) = (\dim V_i)^{-1}\delta_{ij}$ で与えられる．

定義 1.4. 冪等元 $e_H = \frac{1}{|H|}\sum_{h \in H} h$ に対して

$$\mathcal{H}(G, H) = e_H \mathbb{C}G e_H = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\langle e_H g e_H \mid g \in G \rangle$$

とおき，これを (G, H) のヘッケ環と呼ぶ．

ヘッケ環は明らかに両側 H-不変な G 上の関数全体であり，帯球関数はヘッケ環の基底である．また，両側剰余類 $H\backslash G/H$ の完全代表系を $\{g_0, g_1, \cdots g_t\}$ とすると $\{e_H g_i e_H \mid 0 \le i \le s\}$ をヘッケ環の自然な基底として取ってくる事が出来て，このことより $t = s$ も従う．

例 1.5. q 文字の上の対称群を S_q と書く事にして，その部分群のうち q の固定群を S_{q-1} と書く事にする．このとき置換表現は

$$1 \uparrow_{S_{q-1}}^{S_q} = S((q)) \oplus S((q-1, 1))$$

の様に分解する．ここで $S(\lambda)$ は分割 λ に対応する対称群の既約表現である． それぞれの次元は $n_0 = \dim S((q)) = 1,\ n_1 = \dim S((q-1,1)) = q-1$ である． この分解は無重複なので (S_q, S_{q-1}) はゲルファントペアである．$S_{q-1}\backslash S_q/S_{q-1} = \{1, (q-1,q)\}$ であり（(i,j) は互換を表す），$|S_{q-1}1S_{q-1}| = (q-1)!,\ |S_{q-1}(q-1,q)S_{q-1}| = (q-1)!(q-1)$ である, 直交性に注意すると帯球関数のテーブルは

$$\left(\begin{array}{c|cc} & 1 & (q-1,q) \\ \hline (q) & 1 & 1 \\ (q-1,1) & 1 & \frac{-1}{q-1} \end{array}\right)$$

で与えられることが確かめられる．

次章で解説する我々の問題は，この帯球関数を “よい関数” で表す事である．どのように良い関数を選んで来る事が出来るかは重要な問題であり，一変数の場合の問題は大変美しい結果が知られていることを見るだろう．また，多変数の関数で表される場合にもアプローチしたい．我々は有限群を扱っている，これのメリットはかなり具体的な形で表現空間や群そのものを扱う事が出来るため，多くの場合帯球関数を直接計算で与える事が出来ると言う事である．

2　ゲルファントペアと直交多項式

2.1　一変数の場合

まず，ここでは具体的な球関数の計算の例を見る事にしよう．

超八面体群

$$H_n = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n; \sigma) \mid \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, \sigma \in S_n\}$$

とその部分群

$$S'_n = \{(1, 1, \cdots, 1; \sigma) \mid \sigma \in S_n\}$$

の対を考える [19]．以下 S'_n を単に S_n と書く．

この H_n の n 変数多項式環 $P = \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 上の作用を

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n; \sigma) f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\varepsilon_{\sigma(1)} x_{\sigma(1)}, \varepsilon_{\sigma(2)} x_{\sigma(2)}, \cdots, \varepsilon_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)})$$

で定める．そして P の部分空間 $V(k)(0 \le k \le n)$ を

$$V(k) = \bigoplus_{I \subset \{1,2,\cdots,n\}, |I|=k} \mathbb{C} x_I$$

と定義する、ここで $I = \{i_1, \cdots, i_k\}$ に対して $x_I = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ としている．実は $V(k)$ は k ごとに互いに非同値な H_n の既約表現を与える．この $V(k)$ は基本対称式 $e_k(x_1, \cdots, x_n)$ を含んでい

るため，$V(k)$ は $1\uparrow_{S_n}^{H_n}$ の既約成分である．また $\dim 1\uparrow_{S_n}^{H_n}=2^n, \dim V(k)=\binom{n}{k}$ だから, 二項定理より

$$1\uparrow_{S_n}^{H_n}\sim \bigoplus_{i=0}^{n} V(k)$$

がわかる．この分解は H_n の表現として無重複である．以上より，(H_n,S_n) はゲルファントペアである．

$V(k)$ 上の内積を

$$[ax_I, bx_{I'}]=\frac{1}{\binom{n}{k}}a\bar{b}\delta_{I,I'}, \quad (a,b\in\mathbb{C})$$

で定義する。この内積は H_n-不変であることが簡単にわかる．さらに,

$$S_n\setminus H_n/S_n=\{(\underbrace{1,\cdots,1}_{n-\ell},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{\ell};1)|0\le\ell\le n)\}$$

なのに注意して帯球関数の両側剰余類上の値を求めてみよう．いま $V(k)$ に対応する帯球関数を ω_k と書く事にすると，$g=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n;\sigma)$ のとき、

$$\omega_k(g)=[e_k,ge_k]=\frac{1}{\binom{n}{k}}e_k(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$$

である．これで帯球関数の表示が一つ得られた．さらに，$g=(\underbrace{1,\cdots,1}_{n-\ell},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{\ell};1)$ に対して

$$\omega_{k,\ell}=\omega_k(g)$$

と置く．この記号の元で，ガウスの超幾何関数

$${}_2F_1(a,b,c|x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}$$

を用いて次の定理が得られる．

定理 2.1 ([19])**.**

$$\omega_{k,\ell}={}_2F_1(-k,-\ell;-n|2).$$

また，直交性を書き下してやれば,

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}{}_2F_1(-k,-\ell;-n|2){}_2F_1(-k',-\ell;-n|2)=\binom{n}{k}^{-1}\delta_{k,k'}$$

となる．

注意 2.2. この結果は直接計算により導くか，または三項間漸化式に持ち込む事で計算する事も出来る．一変数の場合は三項間漸化式でやるのがスマートだが，次節で述べる多変数の場合では上手く行かない．

このようにして計算して見た結果，選点型の直交多項式が得られた．この直交多項式には名前がついており，クラウチャック多項式という．クラウチャック多項式は直交多項式の退化の様子を表すアスキースキームにおいて，ラカー多項式からハーン多項式に退化し，その下に来るものである．さらに，個々のゲルファントペアの帯球関数がどのようになるかはその例を見つけたり，計算することは重要であるが，1980 年代前半までの進展については Stanton による解説 [18] が詳しい．この Stanton 文献にあるような例は全て q-超幾何関数 ${}_3\varphi_2$ で書く事が出来る．これらはいずれもアスキースキームに収まる直交多項式であるのだが，これは偶然ではなく次のような定理が知られている．

定理 2.3 ([9, 3])**.** 上に述べた q-超幾何関数 ${}_3\varphi_2$ に収まる事は説明出来て，これを含む代数的な対象（P-*and* Q-アソシエーションスキーム）が存在する．

もちろん上の言い方は大変大雑把である．詳しくは Bannai-Ito の本 [3] を見て欲しい．さらにこの方針での直交多項式の研究は最近の Ito-Terwiilliger によって精力的に進められていることを注意しておく．

2.2　多変数の場合

前節で一変数の直交多項式とゲルファントペアの関係について述べたが，それでは多変数の場合にはどうなっているのか？という疑問は自然であろう．

これに関しては次の定理が知られている．

定理 2.4 ([4])**.** ゲルファントペア $(\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F}_q), \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q))$ の帯球関数はマクドナルド多項式（達の変換行列）を用いて書ける．

この定理に現れるマクドナルド多項式はそのパラメータを $t = q^2$ に取ったものである．これは Noumi による量子群版の結果 [15] と比較しても大変興味深いものである．また，近年では Henderson によって [6, 7] のように Lusztig の指標層の理論を駆使する事で，高いランクのシュバレー群のゲルファントペアの帯球関数が一気に計算された．指標層の理論を使いこなすことで，帯球関数達は一気に整備されてしまった感があるが，素朴な計算によって多変数の直交多項式が出て来る例として筆者達による結果も存在する：

定理 2.5 ([1, 10, 14])**.** (G, H) がゲルファントペアのとき，$(G \wr S_n, H \wr S_n)$ もゲルファントペアであり，その帯球関数は青本-ゲルファントの超幾何関数を用いて書ける．

上で出てきた青本-ゲルファントの超幾何関数とは，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_{m-n-1}) \in \mathbb{C}^{m-n-1}$ そして $X = (x_{ij})_{\substack{1 \le i \le n,\\ 1 \le j \le m-n-1}}$ に対して，

$$F(\alpha, \beta; \gamma; X) = \sum_{(a_{ij}) \in M_{n,m-n-1}(\mathbb{N}_0)} \frac{\prod_{i=1}^{n} (\alpha_i)_{\sum_{j=1}^{m-n-1} a_{ij}} \prod_{i=1}^{m-n-1} (\beta_i)_{\sum_{j=1}^{n} a_{ji}}}{(\gamma)_{\sum_{i,j} a_{ij}}} \frac{\prod x_{ij}^{a_{ij}}}{\prod a_{ij}!}.$$

で定義されるガウスの超幾何関数の多変数化である．また，James による結果として

定理 2.6 ([8])**.** ゲルファントペア (S_{2n}, H_n) の帯球関数は *zonal* 多項式（と冪和対称式の変換行列）で書ける．

また，これの環積版も存在する [11]．これについては次章で確率モデルとの関係を述べる際に解説する．

以上幾つかの場合を見てきたが，多変数のケースはまだ一変数の時の様な統一的な結果を得てはいない．従い，これを発見するのは重要な問題であると思われる．その際帯球関数が収まるべき "箱" が何になるのか考えるべきであるが，例えばマクドナルド多項式の理論はこの 20 年で大きな発展を遂げたことやゲルファントらによる超幾何関数の理論などを考えると，希望的観測であるが，ふさわしい箱がすでに準備されていると思いたい．

3　ゲルファントペアと確率モデル

3.1　確率空間として有限等質空間

この章では有限群のゲルファントペアの確率モデルへの応用を考えたい．今まで述べた幾つかの例では帯球関数がかなり扱いやすい形で得られており，応用の際の計算がスムーズに進む事がある．ここで述べられるような応用はおそらく Diaconis により始められたと思われる．参考文献として Diaconis 自身による解説 [5] と [17] を挙げておく，文献 [17] の方が表現論になじんだものにとってはずっと読みやすい事も注意しておく．

さて，確率行列の定義から始めよう．

定義 3.1. X を集合とする．行列 $P = (p(x,y))_{x,y\in X}$ が確率行列であるとは

(1) $p(x,y) > 0$

(2) $\sum_{y\in X} p(x,y) = 1$

を満たす事である．さらに群 G が X に推移的に作用しているとする．この時，任意の $g \in G$ と $x, y \in X$ に対し，

(3) $p(gx, gy) = p(x,y)$

が成り立つ時 P は G-不変確率行列という．

定義の補足だが，ここでは X 上でのランダムウォークを考えていると思う事にして，その際点 $x \in X$ から点 $y \in X$ に移る確率が $p(x,y)$ であると考えよう．
いま P を X 上の確率行列，そして群 G は集合 X に推移的に作用するとする．また $x_0 \in X$ の固定群を H と置く．さらに (G,H) はゲルファントペアであるとしよう．また，記号は第 1 節で用いたものを使う事にする．いま X 上の関数 $\nu(x) = p(x_0, x)$ に対して，G 上の関数 $\tilde{\nu}$ を

$$\tilde{\nu}(g) = \frac{1}{|H|}\nu(gx_0)$$

で定義する．この様にすると次の事がわかる．

命題 3.2. $\tilde{\nu}$ は両側 H-不変である．

従って $\tilde{\nu}$ は帯球関数で展開出来る．いま，x_0 を始点とした X 上のランダムウオークを考える．つまり，一回のステップで $x \in X$ にいる点は確率 $p(x, y)$ で y に移るとする．N ステップ後の点が x_N にいる確率は次のようになる：

$$\begin{aligned}
&\sum_{x_1,\cdots,x_{N-1}} p(x_0, x_1)p(x_1, x_2)\cdots p(x_{N-1}, x_N) \\
&\qquad = \frac{1}{|H|^N} \sum_{g_i \in G \ s.t. \ x_i = g_i x_0} p(x_0, g_1x_0)p(g_1x_0, g_2x_0)\cdots p(g_{N-1}x_0, g_Nx_0) \\
&\qquad = \frac{1}{|H|^N} \sum_{g_i \in G \ s.t. \ x_i = g_i x_0} p(x_0, g_1x_0)p(x_0, g_1^{-1}g_2x_0)\cdots p(x_0, g_{N-1}^{-1}g_Nx_0) \\
&\qquad = \sum_{g_i \in G} \tilde{\nu}(g_1)\tilde{\nu}(g_1^{-1}g_2)\cdots\tilde{\nu}(g_{N-1}^{-1}g_N) = \tilde{\nu}^{*N}(g_N),
\end{aligned}$$

ここで，f^{*N} はたたみ込み積の N 乗を表す事にする．いま $\tilde{\nu}$ が帯球関数により

$$\nu = \sum_{i=0}^{s} a_i \omega_i$$

と展開されたとしたら，$v_i = \frac{|G|}{\dim V_i}$ とおくと，

$$\tilde{\nu}^{*N} = \sum_{i=0}^{s} a_i^N v_i^{N-1} \omega_i$$

となる．このように G-不変という性質があると，確率行列の N 乗が計算しやすくなることが，便利なところである．また係数 a_i も直交性を使って反転してやれば求める事が出来て（フーリエ係数），

$$a_i = \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \tilde{\nu}(g)\overline{\omega_i(g)}$$

となる．

定義 3.3. X 上の確率分布 μ_1 と μ_2 に対して

$$||\mu_1 - \mu_2||_{TV} = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} |\mu_1(x) - \mu_2(x)|$$

と置いて，これを μ_1 と μ_2 の全変動距離と呼ぶ．

次節ではある確率モデルを考えて，一様分布との全変動距離の評価を考える．この際に有用な評価式を与えておこう．

命題 3.4 ([17])**.** P を X 上の G-不変な確率行列，π を X 上の一様分布とする．このとき，

$$||\tilde{\nu}^{*N} - \mu||_{TV} \le \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{t} \dim V_i | \sum_{g \in G} \tilde{\nu}(g)\overline{\omega_i(g)}|^{2N}.$$

3.2 パーティのモデル

始めに Diaconis によるパーティのモデルの紹介をしよう.

モデル 3.5. このパーティの招待客は必ず二人で会場にやって来る．しかもやってきた客は一緒に来た相手としか会話をしない．だからホストはこれではいけないと任意の二組を指定してその中で相手を交換する.

さて，このシャッフルを繰返した時の確率分布を調べたい.

これを次のように有限群の言葉に翻訳しよう．ただし，少し一般化してホストは組み替えを行う時，各組にビール (1 と書こう) またはジュース (-1 と書こう) をあげる事にする．まず，このパーティの各状態は，いま $[2n] = \{1, 2, 3, \cdots, 2n\}$ と置いて,

$$Par(n) = \{\{(\{i_1 i_2\}\,; x_1), (\{i_3 i_4\}\,; x_2), \cdots, (\{i_{2n-1} i_{2n}\}\,; x_n)\} \mid \{i_1, i_2, \cdots, i_{2n}\} = [2n],\ x_i = -1\ or\ 1\}$$

の元と見なす事が出来る（$(\{i,j\}; x)$ は i と j が飲み物 x を貰ってお話し中と思う）. $|Par(n)| = 2^n(2n-1)!!$ である．$m \in M(n)$ に対して，行列 $M(m) = (m_{ij})$ を

$$m_{ij} = \begin{cases} x_i & (\{ij\}; x) \in m \\ 0 & (\{ij\}; x) \notin m \end{cases}$$

で定め

$$MP(n) = \{M(m) \mid m \in M(n)\}$$

と置くと $m \mapsto M(m)$ は全単射である．いま置換 $\sigma \in S_{2n}$ にたいして $P_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})$（置換行列）とおく，そして群 SG_{2n} を

$$SG_{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_{2n} \end{pmatrix} P_\sigma \mid \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, \sigma \in S_{2n} \right\}$$

と定義する．これは H_{2n} と同型な群である事に注意しておく．この SG_{2n} の $MP(n)$ への作用を

$$x.M = xMx^{-1}\ (x \in SG_{2n}, M \in MP(n))$$

で定義すると

命題 3.6. この作用は推移的である.

を得る．また

$$m_0 = \{(1, 2; 1), (3, 4; 1), \cdots, (2n-1, 2n; 1)\}$$

と置き, $M(m_0)$ の固定群を HG_n と書く事にする．この時次が成り立つ

定理 3.7 ([11])**.** (SG_{2n}, HG_n) はゲルファントペア.

いま $MP(n)$（すなわち $M(n)$）上の確率行列 P を

$$p(m,n) = \begin{cases} \frac{1}{4}\frac{1}{n(n-1)} & \text{（ホストによる一回の組換えで移りあう）} \\ 0 & \text{（それ以外）} \end{cases}$$

で定義してやると P は SG_{2n}-不変である．初期分布を $\nu(m) = \begin{cases} 1 & (m = m_0) \\ 0 & (m \neq m_0) \end{cases}$ として，命題 3.4 を使って評価を計算すると次を得る.

定理 3.8. I_n を S_{2n} の位数 2 の元の個数とする．ある定数 A を使って

$$||\nu^{*N} - \pi||_{TV} < AI_n e^{-2(\frac{2N}{n} - \log n)}$$

という評価が成立する.

注意 3.9. ここで飲み物の数を 2 種類から増やす事も可能である．その場合は

$$SG_{2n} = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_{2n} \end{pmatrix} P_\sigma \mid \varepsilon_i \in \{\exp \frac{2\pi\sqrt{-1}k}{r} \mid k \in [r]\}, \sigma \in S_{2n} \right\}$$

を考える．この群から出来るゲルファントペアについては [11] を参照.

3.3 壺とボールのモデル

モデル 3.10. いま r 個の壺 $\{U_0, U_1, \cdots, U_{r-1}\}$ と n 個のボール $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ を用意する．始め，壺 U_0 に全てのボールが入っているとする．そして，一回のステップで番号を指定し，その番号が書かれたボールをとり出して別の壺に入れる.

これは $r = 2$ の時 Ehrenfest の拡散モデルと呼ばれる古典的な確率モデルである．$r = 2$ なら第２節で紹介したゲルファントペア (H_n, S_n) の等質空間とこのモデルの各状態が一対一に対応し，この節の始めに述べた理論が適用出来る．そして $r > 3$ の場合においてもやはり，この確率モデルの有限群のゲルファントペア ([10] で与えられたもの) による解釈が可能である．これについてはここではこれ以上詳しくは述べないが，文献 [12, 13] を参照して欲しい.

参考文献

[1] H. Akazawa and H. Mizukawa, Orthogonal polynomials arising from the wreath products of dihedral group, J. Combin. Theory Ser. A 104 (2003), pp. 371-380.

[2] 青本-喜多, **超幾何関数論**, シュプリンガージャパン, 1994.

[3] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I. Association Schemes,* The Benjamin/Cummings Publishing Co. CA, 1984.

[4] E. Bannai, N. Kawanaka and S.-Y. Song, The character table of the Hecke algebra $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_{2n}(F_q), \mathrm{Sp}_{2n}(F_q))$, J. Algebra 129 (1990), no. 2, 320–366.

[5] P. Diaconis, *Group Representation in Probability and Statistics*, IMS Lecture Notes-Monograph Series (1988).

[6] A. Henderson, Spherical functions of the symmetric space $G(\mathbb{F}_{q^2})/G(\mathbb{F}_q)$, Represent. Theory 5 (2001), 581–614 (electronic).

[7] A. Henderson, Symmetric subgroup invariants in irreducible representations of G^F, when $G = \mathrm{GL}_n$, J. Algebra 261 (2003), no. 1, 102–144.

[8] A.T.James, Zonal polynomials of the real positive definite symmetric matrices", Annals of Math. vol.74 (1961), pp. 475-501.

[9] D. Leonard, *Orthogonal polynomials, duality and association schemes,* SIAM J. Math. Anal. 13 (1982), no. 4, 656-663.

[10] H. Mizukawa, Zonal spherical functions on the complex reflection groups and $(m+1, n+1)$-hypergeometric functions, Advances in Math. 184 (2004) pp. 1-17.

[11] H. Mizukawa, Zonal polynomials for wreath products, J. Alg. Comb. 25, pp. 189-215, 2007.

[12] 水川裕司, 有限群上の調和解析と統計に関する話題, 数理解析研究所講究録「表現論と組合せ論」2010 年発刊予定.

[13] H. Mizukawa, Finite Gelfand pair approaches for Ehrenfest diffusion model, in progress.

[14] H. Mizukawa and H. Tanaka, $(n+1, m+1)$-hypergeometric functions associated to character algebras, Proc. AMS. 132 no. 9 (2004), pp. 2613-2618.

[15] M. Noumi, Macdonald's symmetric polynomials as zonal spherical functions on some quantum homogeneous spaces, Adv. Math. 123 (1996), no. 1, 16–77.

[16] 齋藤義久, Hecke 代数の多項式表現について, 第 53 回代数学シンポジウム報告集, pp. 220–235, 2009.

[17] T. Ceccherini-Silberstein, F. Scarabotti amd F. Tolli, *Harmonic Analysis on Finite Groups,* Oxford Science Pub, 1995.

[18] D. Stanton, Orthogonal Polynomials and Chevalley Groups, Askey et. al. (eds.) Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications (1984), 87-128.

[19] D. Vere-Jones, *D. Finite bivariate distributions and semigroups of non-negative matrices.* Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 22 (1971), pp. 247-270.