トロピカル幾何の話

梶原 健

1 はじめに

本稿では，代数学シンポジウムでの講演に基づいて，トロピカル幾何の簡単な紹介をします.

標題に「トロピカル幾何」とあり,「トロピカル」という形容詞に興味をひかれる方もいらっしゃるかと思います.「トロピカル」の由来は，本講で説明する数学に注目したブラジル人の Imre Simon 氏にちなんで，同僚のフランス人の Jean-Eric Pin 氏らが「トロピカル」と呼んだ，と Speyer と Sturmfels [25] にあります．さらに,「ちなんで」というのは，フランス人からみたブラジルのことを表す形容詞だったから，と [25] にあります.

ところで，Simon 氏が実際に注目した数学は，(現在では) 実数の集合 $\mathbb{R}$ に，最小値をとる 2 項演算 min と，通常の和 $+$ をとる 2 項演算の 2 つの演算を考えた代数系 (**min-plus 代数**と呼ばれる) です．(最小値をとる演算のかわりに，最大値をとる演算を考えることもあります．) つまり，任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\oplus\colon (a,b) \mapsto \min(a,b) \text{ (トロピカル和)}, \quad \odot\colon (a,b) \mapsto a+b \text{ (トロピカル積)}$$

という 2 項演算 $\oplus, \odot$ と $\mathbb{R}$ を組にした $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ という代数系です．これを**トロピカル半体**といいます.

この代数系上で多項式を考察して得られる，(本講で説明するような) ある種の凸体の幾何のことを**トロピカル幾何**と呼んでいます.

本講では，トロピカル数学の代数的側面 (トロピカル半体やトロピカル多項式など) と，幾何的側面 (トロピカル多様体やその応用など) について紹介します.

なお，参考文献に，本文中で直接引用しない文献もあります．(多少の偏りはありますが，本講では説明できなかった内容 (入門的な内容，トロピカル幾何の応用の例など) についてふれた，解説記事等などを挙げておきました．)

2 代数に関する話

はじめに，トロピカル半体について説明します.

2.1 トロピカル半体

定義 実数全体の集合と $\{\infty\}$ (形式的なシンボル) の和集合 $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ と，次の 2 項演算 $\oplus, \odot$ を組にした $(\overline{\mathbb{R}}, \oplus, \odot)$ を**トロピカル半体**といい，$\overline{\mathbb{T}}$ と書く:

$$a \oplus b := \min(a, b), \quad a \odot b := a + b.$$

ここで，min や $+$ は，実数の通常の大小や和に関するものであり，∞ は，任意の実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して $\infty + a = \infty$，$a < \infty$ をみたすものとする．

このように定義すると，$\overline{\mathbb{T}}$ の $\oplus, \odot$ は，和と積の公理のうち，**和の逆元の存在**を除いて，すべてみたします．例えば，和に関する単位元は ∞ であり，積に関する単位元は 0 になります．

トロピカル半体では，任意の $a \in \overline{\mathbb{T}}$ に対して $a \oplus a = a$ が成り立っています．この性質のため，$\overline{\mathbb{T}}$ では和に関する逆元の存在が成り立たない (なぜならば実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して $a < \infty$ より，任意の $b \in \overline{\mathbb{T}}$ に対して $a \oplus b \leq a$ だから) だけでなく，$\overline{\mathbb{T}}$ の演算を拡張して逆元をつくることもできません．実際，仮に $a \in \overline{\mathbb{T}}$ に対してそのような元 b があったとすると

$$\infty = a \oplus b = (a \oplus a) \oplus b = a \oplus (a \oplus b) = a \oplus \infty = a$$

となってしまうからです．

2.2 トロピカル半体の 1 つの見方

このような事情から，トロピカル半体の「和，積」はかなり変わっています．一方で，次のように群環の部分半環と付値を利用して，トロピカル半体を考えることもできます．

$\overline{\mathbb{R}}$ に付随する半群環 $R := \mathbb{R}[t^{\overline{\mathbb{R}}}] := \{\sum_\alpha a_\alpha t^\alpha; a_\alpha$は有限個を除いて$0\}$ (ただし $t^\infty = 0$ とする) の部分半環 $R_0 := \{\sum_\alpha a_\alpha t^\alpha \in R; a_\alpha \geq 0\}$ と付値 $v\colon R \to \overline{\mathbb{T}}; \sum_\alpha a_\alpha t^\alpha \mapsto \min\{\alpha; a_\alpha \neq 0\}$ を考えます．このとき，R_0 は R の和と積に関して可換半環になっています．また，v が (非アルキメデス的) 加法付値であることから，次が成り立ちます．

命題 v を R_0 に制限した写像 $\varphi := v|_{R_0}\colon R_0 \to \overline{\mathbb{T}}$ は，半環の全射準同型である．つまり，$\varphi(0) = \infty, \varphi(1) = 0$ であり，任意の $f, g \in R_0$ に対して $\varphi(f + g) = \varphi(f) \oplus \varphi(g)$, $\varphi(fg) = \varphi(f) \odot \varphi(g)$, をみたす．

証明 どれも容易である．例えば，$f = \sum_\alpha a_\alpha t^\alpha \neq 0$, $g = \sum_\beta b_\beta t^\beta \neq 0$ とすると，

$$\begin{aligned}\varphi(f+g) =& \varphi(\sum_\alpha (a_\alpha + b_\alpha) t^\alpha) = \min\{\alpha; a_\alpha + b_\alpha \neq 0\} = \min\left\{\{\alpha; a_\alpha \neq 0\} \cup \{\alpha; b_\alpha \neq 0\}\right\} \\ =& \min(\min\{\alpha; a_\alpha \neq 0\}, \min\{\alpha; b_\alpha \neq 0\}) = \varphi(f) \oplus \varphi(g)\end{aligned}$$

である．ここで，$a_\alpha, b_\alpha \geq 0$ より，「$a_\alpha + b_\alpha \neq 0$」と「$a_\alpha \neq 0$ または $b_\alpha \neq 0$」が同値であることに注意せよ．$f = 0$ あるいは $g = 0$ のときも容易である．また，積についても同様に

$$\begin{aligned}\varphi(fg) =& \varphi\left(\sum_\gamma \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} (a_\alpha b_\alpha)\right) t^\gamma\right) = \min\left\{\gamma; \sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta \neq 0\right\} = \min\{\alpha + \beta; a_\alpha b_\beta \neq 0\} \\ =& \min\{\alpha; a_\alpha \neq 0\} + \min\{\beta; b_\beta \neq 0\} = \varphi(f) \odot \varphi(g)\end{aligned}$$

とわかる．ここでも，係数が非負実数であることより，「$\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta \neq 0$」と「ある α, β であって，$\alpha+\beta=\gamma$ と $a_\alpha, b_\beta \neq 0$ をみたすものが存在する」ことが同値であることに注意せよ． $\square$

上の命題より φ は全射準同型ですから，$\overline{\mathbb{T}}$ は R_0 を同値関係で割った集合と考えることができます．さらに，$\overline{\mathbb{T}}$ への単射となるように φ による各元の逆像 $\varphi^{-1}(\alpha)$ から，t^α をとれば，

$$R_1 := \{t^\alpha \in R; \alpha \in \overline{\mathbb{R}}\} \to \overline{\mathbb{T}}$$

は全単射になります．そこで，R_1 に新たに $t^\alpha + t^\beta := t^{\min(\alpha,\beta)}, t^\alpha t^\beta := t^{\alpha+\beta}$ と加法と乗法を定義すれば (同じ記号で書く)，R_1 と $\overline{\mathbb{T}}$ は半環として同型になります．そこで本講では，場合によっては $\overline{\mathbb{T}}$ を R_1 のように t^α を用いて書くことにします．ただし，この表記は，文献をみると，あまり標準的ではないようです．

2.3 トロピカル多項式とトロピカル多項式関数

次に，トロピカル半体を係数とする多項式やそれから定まる多項式関数を説明します．まず，トロピカル多項式を多項式環の定義と同様に次のように定義します．

定義 $x_1, \ldots, x_n$ を変数とするトロピカル多項式を $\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} a_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ (形式的有限和) と定義し，和や積を

$$\text{和}(\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha) + (\sum_\alpha b_\alpha x^\alpha) := \sum_\alpha (a_\alpha \oplus b_\alpha) x^\alpha$$

$$\text{積}(\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha)(\sum_\alpha b_\alpha x^\alpha) := \sum_\gamma \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta \right) x^\gamma$$

ここで $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ に対して $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ と書く．

上の定義により，トロピカル半環を係数とする多項式全体 ($\overline{\mathbb{T}}[x_1, \ldots, x_n]$ と書く) も再び半環になります．また，$ax_1^0 \cdots x_n^0$ の元と $\overline{\mathbb{T}}$ の元 a を同一視することにより，$\overline{\mathbb{T}}$ は $\overline{\mathbb{T}}[x_1, \ldots, x_n]$ の部分半環となります．

具体的に 1 変数トロピカル多項式を書いてみると，$0 + (-1)x + 1x^2 + 0x^3 + \infty x^4$ のようになります．ここで，$a \in \overline{\mathbb{T}}$ を，上で説明したように，t^a と書くと，この式は

$$1 + (-1)x + 1x^2 + 0x^3 + \infty x^4 = 1 + t^{-1}x + tx^2 + x^3$$

となります．したがって，上の式の左辺の表記では，0 は省略できず，$1x^2 \neq x^2$ であり，∞x^4 は書かなくても同じことになります．さらにトロピカル多項式の和，積を手で計算しようとすると，ますます混乱してくるので，先程説明したように適宜，形式的な不定元 t を使って表記することにします．例えば

$$(0 + 1x)(-1 + 0x) = (-1) + 0x + 0x + 1x^2 = (-1) + 0x + 1x^2$$

とするかわりに

$$(1 + tx)(t^{-1} + x) = t^{-1} + x + x + tx^2 = t^{-1} + x + tx^2$$

とします．$x+x=(1+1)x=x$ に注意してください．

一方，トロピカル多項式から $\overline{\mathbb{T}}$ の元を代入することにより，$\overline{\mathbb{T}}$ 上の関数が定義されます．

定義 $f=\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \in \overline{\mathbb{T}}[x_1,\dots,x_n]$ に対して，

$$f^{\mathrm{trop}}\colon \overline{\mathbb{T}}^n \to \overline{\mathbb{T}}; \xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\mapsto f(\xi):=\min\{a_\alpha+\langle\alpha,\xi\rangle;\alpha\in\mathbb{N}^n\}$$

(ここで $\langle\alpha,\xi\rangle:=\sum_i \alpha_i\xi_i$ とする) と定義し，f^{trop} を f **が定義するトロピカル多項式関数**という．また，写像 $\varphi\colon \overline{\mathbb{T}}^n\to\overline{\mathbb{T}}$ が，あるトロピカル多項式が定義するトロピカル多項式関数に等しいとき，φ を**トロピカル多項式関数**という．

$f,g\in\overline{\mathbb{T}}[x_1,\dots,x_n]$ に対して，$(f+g)^{\mathrm{trop}}(\xi)\geq f^{\mathrm{trop}}(\xi)\oplus g^{\mathrm{trop}}(\xi)=\min(f^{\mathrm{trop}}(\xi),g^{\mathrm{trop}}(\xi))$, $(fg)^{\mathrm{trop}}(\xi)=f^{\mathrm{trop}}(\xi)\odot g^{\mathrm{trop}}(\xi)$ が成り立ちます．

無限体を係数とする多項式の場合と大きく違い，異なるトロピカル多項式が同じトロピカル多項式関数を表すことがあります．いつ同じになるかは，次のように判定できます．

命題 $f,g\in\overline{\mathbb{T}}[x_1,\dots,x_n]$ に対して，$f^{\mathrm{trop}}=g^{\mathrm{trop}}$ は，f,g の拡張されたニュートン多面体 $\widetilde{\mathbf{New}}(f)$，$\widetilde{\mathbf{New}}(g)$ が等しいことと同値である．ここで，$\widetilde{\mathbf{New}}(\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha)$ は

$$\widetilde{\mathbf{New}}\Big(\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha\Big):=\{(s,0)+\sum_{a_\alpha\neq\infty}u_\alpha(a_\alpha,\alpha)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n; s\geq 0,\ u_\alpha\geq 0,\ \sum_{a_\alpha\neq\infty}u_\alpha=1\}$$

と定義する．

例えば，(上に述べた t を使って表すと)$1+x^2$，$1+tx+x^2$ が定義するトロピカル関数は，

$$(1+x^2)^{\mathrm{trop}}(\xi)=\min(0,2\xi)=\min(0,1+\xi,2\xi)=(1+tx+x^2)^{\mathrm{trop}}$$

となります．(グラフを書いて容易に確かめられます．) 一方，$\widetilde{\mathbf{New}}(1+x^2)$, $\widetilde{\mathbf{New}}(1+tx+x^2)$ は図 1 のようになります．(図において, $t=(1,0)$ が上向き，$x=(0,1)$ が右向きを表す)

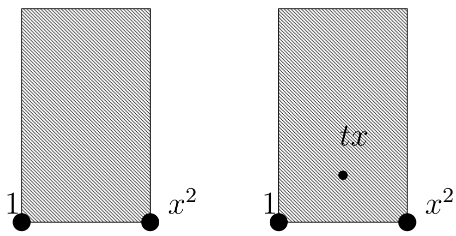

図 1: ニュートン多面体 (左が $\widetilde{\mathbf{New}}(1+x^2)$，右が $\widetilde{\mathbf{New}}(1+tx+x^2)$)

命題の証明はここでは書きませんが,「$\widetilde{\mathbf{New}}(f)$ の頂点 (a_α,x^α) に対応する 1 次関数 $\xi\mapsto a_\alpha+\langle\alpha,\xi\rangle$ が，f^{trop} のグラフに現れる超平面 (の一部) を定義する」ことがポイントです．

2.4 トロピカル多項式関数に関する代数学の基本定理

トロピカル多項式関数について，因数分解を考えます．例えば，$f(x)=x^2+1$ が定義するトロピカル多項式関数 f^{trop} では,

$$f^{\mathrm{trop}}=(x^2+1)^{\mathrm{trop}}=(x^2+x+1)^{\mathrm{trop}}=\{(x+1)(x+1)\}^{\mathrm{trop}}=(x+1)^{\mathrm{trop}}(x+1)^{\mathrm{trop}}$$

です．(ちなみに f はトロピカル多項式としては1次式の積には分解できません．) 一般に次の定理が成り立ちます．

定理 定数でないトロピカル多項式関数は $t^a(x+tb_1)\cdots(x+t^{b_n})$ の形のトロピカル多項式が定義するトロピカル多項式関数に等しい．

定理で述べた因数分解は $\widetilde{\mathbf{New}}$ により具体的に与えることができます．実際，トロピカル多項式関数 f^{trop} に対して，$\widetilde{\mathbf{New}}(f)$ の "下側" の辺が $(a_0,0),(a_1,1),\ldots,(a_i,i),\ldots,(a_n,n)$ を結んだ (下に凸な) 折れ線であるとき (つまり $f^{\mathrm{trop}}=(t^{a_n}x^n+t^{a_{n-1}}x^{n-1}+\cdots+t^{a_0})^{\mathrm{trop}}$ のとき)，

$$f^{\mathrm{trop}}=(t^{a_n}(x+t^{a_0-a_1})(x+t^{a_1-a_2})\cdots(x+t^{a_{n-1}-a_n}))^{\mathrm{trop}}$$

となります．このことは，例えば，$a_n=0$ (すなわち $t^{a_n}=1$) のときに，次の式を k に関する帰納法で証明すればわかります;

$$\begin{aligned}&(x^k+t^{a_{n-1}}x^{k-1}+\cdots+t^{a_{n-k}})(x+t^{a_{n-k-1}-a_{n-k}})\\=&x^{k+1}+t^{a_{n-1}}x^k+\cdots+t^{a_{n-k}}x+t^{a_{n-k-1}}.\end{aligned}$$

証明のポイントは $\widetilde{\mathbf{New}}$ の下側の凸性を利用して，$n-k\leq i$ のときに $a_i\leq a_{i+1}+a_{n-k-1}-a_{n-k}$ (これは $(a_i+a_{n-k})/2\leq(a_{i+1}+a_{n-k-1})/2$ と同値です) を示すことです．

3 幾何に関する話

今度は，トロピカル幾何に関して簡単に紹介します．はじめに，ここで紹介する内容は，トロピカル幾何の1つの側面であって，ほかのアプローチや説明などいろいろある (用語の意味が違うことさえある) ことをお断りしておきます．

3.1 トロピカル多様体

ここでは形式 Puiseux 級数体 $K:=\bigcup_{n\geq1}\mathbb{C}((t^{1/n}))$ とその付値 $v_K=v\colon K\to\overline{\mathbb{R}}$ を用いた，トロピカル多様体の定義を述べます．ここで K の付値 v は，

$$v\colon f=\sum_j a_jt^j\mapsto v(f):=\min\{j;a_j\neq0\}$$

と定義されています．

トロピカル多様体とは，K 上の代数多様体の "K 値点の付値をとって"，$\overline{\mathbb{R}}$ の位相に関して閉包をとった集合のことです．「K 値点の付値をとって」という意味がはっきりしないかと思います．以下で説明する例から，その意味を察していただけると幸いです．(実際のところ，現在は個々の場合に，もっともな理由がつけばそれをトロピカル多様体と呼ぶ，という場合もあり，すべての場合を網羅するような定義が与えられるほど，十分に理論的に完成してはいないように思います．)

3.2 トロピカル多様体の例

例 1. 代数的トーラス $(K^\times)^r$ $(K^\times := K \setminus \{0\})$ の点の付値 (各成分ごとの付値) をとって，すなわち，

$$(K^\times)^r \xrightarrow{v^r} \mathbb{R}^r; (x_i) \mapsto (v(x_i))$$

による $(K^\times)^r$ の像 $\mathbb{Q}^r$ の閉包をとった $\mathbb{R}^r$ を**トロピカル代数的トーラス**といいます．

例 2. r 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^r_K = K^r$ に対して，上の例 1 と同様に，各成分ごとの付値をとり，さらにその像の閉包をとって得られる $\overline{\mathbb{R}}^r$ が**トロピカルアフィン空間** $\mathbb{A}^{r,\mathrm{trop}}$ です．$\overline{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ と同相ですから，r 次元トロピカルアフィン空間は r 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^r$ の部分空間 $\{(\xi_1, \ldots, \xi_r); \xi_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, r\}$ と同相です．

例 3. r 次元射影空間 $\mathbb{P}^r_K = (\mathbb{A}^{r+1}_K \setminus \{(0, \ldots, 0)\})/K^\times$ に対して，付値をとって商を考えた，$(\overline{\mathbb{R}}^{r+1} \setminus \{(\infty, \ldots, \infty)\})/\mathbb{R}$ を**トロピカル射影空間**といいます．$\overline{\mathbb{R}}$ を同相な $\mathbb{R}_{\geq 0}$ で置き換えて考えると，r 次元トロピカル射影空間は，r 次元単体 $\{\sum_i u_i e_i \in \mathbb{R}^{r+1}; u_0, \ldots, u_r \geq 0,\ \sum_i u_i = 1\}$ $(e_0, \ldots, e_r$ は $\mathbb{R}^{r+1}$ の標準基底) と同相になります．

ほかの例として，上記の 3 つの例を組み合わせたようなものがあります．

例 4. $N = \mathbb{Z}^r$ とする．$N_\mathbb{R} := N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R} = \mathbb{R}^r$ の有理強凸多面錐 σ に伴うアフィントーリック多様体 U_σ の K 値点の集合を

$$\mathrm{Hom}_{K\ \text{代数}}(K[\sigma^\vee \cap M], K) = \mathrm{Hom}_{\text{半群}}(\sigma^\vee \cap M, K)$$

(ここで $M := \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$ とし，$\sigma^\vee$ は σ の双対錐を表す．また右辺において，K は積に関して半群とみなす) と考えて，$v\colon K \to \overline{\mathbb{R}}$ を合成した，$U^{\mathrm{trop}}_\sigma := \mathrm{Hom}(\sigma^\vee \cap M, \overline{\mathbb{R}})$ を，σ に伴う**トロピカルアフィントーリック多様体**といいます．一般に扇で定めるトーリック多様体の場合と同様に，N の扇 Σ に対して，Σ の各錐に伴うトロピカルアフィントーリック多様体を貼り合せたものを，Σ に伴う**トロピカルトーリック多様体**といいます．これらは，上のアフィン空間や射影空間の例をさらに一般化した，トロピカル多様体の例になります．

例 5. $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線は $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + Z\tau)$ $(\mathrm{Im}\,\tau > 0)$ のように表せます．この表示を $z \mapsto \exp(2\pi i z)$ $(z \in \mathbb{C})$ によって写すと $\mathbb{C}^\times/q^\mathbb{Z}$ $(q = \exp(2\pi\tau)$，$|q| < 1)$ となります．そこで，一般のアーベル多様体について，このような乗法的な表示を，付値体 K のときに考えて，付値をとることにより，**トロピカルアーベル多様体** $\mathbb{R}^r/\Lambda$ (Λ は $\mathbb{R}^r$ の部分 $\mathbb{Z}$ 加群で，階数 r の自由 $\mathbb{Z}$ 加群) を得ます．正確には，偏極を考える必要があるので，正定値対称形式 $\langle\ ,\ \rangle\colon \Lambda \times \Lambda' \to \mathbb{Z}$ によって，$\mathrm{Hom}(\Lambda', \mathbb{R})/\Lambda$ (ここでは $\Lambda \to \mathrm{Hom}(\Lambda', \mathbb{R})$; $\lambda \mapsto (\lambda' \mapsto \langle \lambda, \lambda' \rangle)$ により商を考える) と表される実トーラスをトロピカルアーベル多様体といいます ([2, Definition 4.1.1])．

ここで，代数的トーラス $(K^\times)^r$ の閉部分多様体から定まるトロピカル多様体について紹介します．

定義 $(K^\times)^r$ の閉部分多様体 V に対して，$v^r\colon (K^\times)^r \to \mathbb{R}^r$; $(x_i) \mapsto (v(x_i))$ による V の像の ($\mathbb{R}^r$ の通常の位相に関して) 閉包 V^{trop} を，V に伴う**トロピカル多様体**という．

この定義では，V の点の座標の付値で与えているため，V^{trop} があまり見えてきません．実は，V の定義イデアルに含まれる多項式を，係数の付値をとったトロピカル多項式が定義するトロピカル多項式関数から，V^{trop} を計算することができます．この方法を説明します．

0 でない多項式 $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \in K[x_1^{\pm}, \ldots, x_r^{\pm}]$ に対して，

$$\mathbf{V}^{\mathrm{trop}}(f) := \{(\xi_i) \in \mathbb{R}^r; (\sum_{a_\alpha \neq 0} v(a_\alpha)x^\alpha)^{\mathrm{trop}} \colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R} \text{ が微分可能でない } \}$$

と定義します．$\xi \in \mathbb{R}^r$ に対して，$(\sum_\alpha v(a_\alpha)x^\alpha)^{\mathrm{trop}}$ が微分可能でないことは，言い換えると，$\{v(a_\alpha) + \langle \alpha, \xi \rangle; a_\alpha \neq 0\}$ のうち最小値となるものが 2 つ以上存在することです．この記号のもと，V の定義イデアルを I とするとき，

$$V^{\mathrm{trop}} = \bigcap_{f \in I \setminus \{0\}} \mathbf{V}^{\mathrm{trop}}(f)$$

が成り立ちます ([10, Proposition 1.4],[21, Theorem 4.1])．右辺の f として，有限個の多項式が選べる (これらの多項式を I の**トロピカル基底**という) ことが知られています．したがって V^{trop} は，有限個の $\mathbf{V}^{\mathrm{trop}}(f)$ の形の集合の共通部分 (凸多面体の和集合) になります．

ここでは I が単項イデアルの場合の例を説明します．(単項でない場合は，例えば [11, 1.6] に少しだけ説明があります．)

例 6. $x+y+1=0$ で定義される平面直線 L に対して，L^{trop} は関数 $(\xi, \eta) \mapsto \min(\xi, \eta, 0)$ の微分可能でない点の集合です．L^{trop} は**トロピカル直線**とよばれます．そこで，φ が微分できない点を実際に求めると，ちょうど $\xi, \eta, 0$ のうち最小のものが 2 つ以上あるような点のことです．したがって次の不等式

$$\xi \leq \eta, 0, \qquad \eta \leq \xi, 0, \qquad 0 \leq \xi, \eta.$$

のうち，2 つ以上の不等式をみたす点 (ξ, η) が L^{trop} の点になります．よって L^{trop} は，それぞれの不等式が表す領域の境界に一致します．以上により L^{trop} は図 2 のようになります．

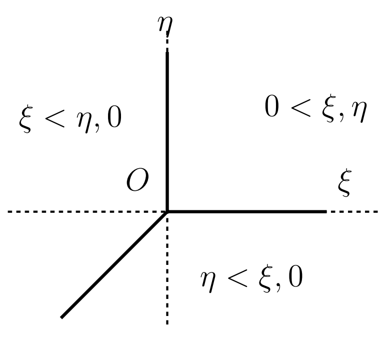

図 2: トロピカル直線 L^{trop}

次はトロピカル2次曲線の例です．

例 7. $tx^2 + xy + ty^2 + x + y + t = 0$ で定義される2次曲線 C に対して C^{trop} を求めます．C^{trop} は，$\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$\varphi\colon (\xi, \eta) \mapsto \min(2\xi + 1, \xi + \eta, 2\eta + 1, \xi, \eta, 1)$$

の微分できない点全体になります．上のトロピカル直線の例と同様に，6個の不等式から，C^{trop} が求められます (図3参照)．各領域に書いたアフィン線形関数が，最小値を与える関数になっています．

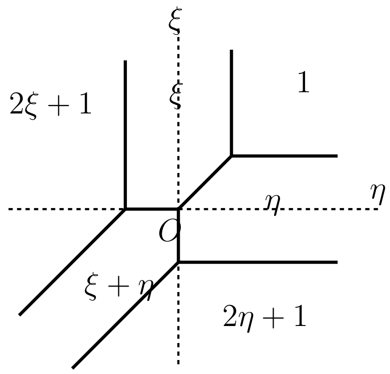

図 3: トロピカル2次曲線 C^{trop}

一般に，トーリック多様体の閉部分多様体について同様の構成ができます ([9]).

3.3 トロピカル多様体とグレブナー扇

簡単のため，K の付値が自明な場合を考えます．$\xi \in \mathbb{R}$ に対して，単項式 x^α に $\langle \alpha, \xi \rangle = \sum_j \alpha_j \xi_j$ を対応させる写像 $x^\alpha \mapsto \langle \alpha, x^\alpha \rangle$ は，単項式全体上の全順序へ拡張できます．つまり，ある全順序 $<$ であって，x^α, x^β に対して $\langle \alpha, \xi \rangle < \langle \beta, \xi \rangle$ ならば $x^\alpha < x^\beta$ をみたすものが存在します．

したがって，トロピカル多項式関数において，どの単項式が最小値を決めるか，という問題は，単項式の**項順序**に関する先頭項の話と結びついてきます．[1] によれば，$\mathbb{R}^n$ のトロピカル多様体 $\mathbf{V}^{\mathrm{trop}}(I) := \bigcap_{f \in I \setminus \{0\}} \mathbf{V}^{\mathrm{trop}}(f)$ は，I のグレブナー扇の部分扇として構成することが可能です．

一方，イデアルのグレブナー扇については，計算代数的な側面だけでなく，代数多様体の退化とも関係があります．実際，大雑把にいうと，グレブナー扇に伴うトーリック多様体が，変数のスカラー倍によって (すなわち代数的トーラスの作用とその極限によって) 定義イデアルを変形して得られる多様体の族を parametrize していることが知られています ([3], [4], [19], [24])．(より正確には，斉次化したイデアルの変形をヒルベルトスキームの中で閉包をとって考えます．)

3.4 剛解析幾何とトロピカル幾何 (S. Payne [22])

K を p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包の完備化とし，その付値を $v\colon K \to \overline{\mathbb{R}}$ とします．アフィン多様体 V に対して，Berkovich の剛解析化 V^{an} を，v と両立する $K[V]$ (V の座標環) の

seminorm 全体と定義します．

$$V^{\mathrm{an}} := \{v \text{ と両立する } K[V] \text{ の seminorm}\}.$$

ここで v と両立する $K[V]$ の seminorm $|\cdot|\colon K[V] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (乗法的) とは，(1) $|0| = 0$，(2) $|f+g| \leq |f| + |g|$， (3) $a \in K$ に対して $|a| = \exp(-v(a))$，をみたす写像のことです．また，V^{an} の位相を，すべての $f \in K[V]$ に対して，$V^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}; |\cdot| \mapsto |f|$ が連続になるような最も粗い位相と定義します．

V はアフィン多様体なので，全射準同型 $f_n\colon K[x_1, \ldots, x_n] \to K[V]$ をとることができます．この f_n を用いて，$K[V]$ の seminorm $|\cdot|$ に対して，

$$\{x^\alpha; \alpha \in \mathbb{N}^n\} \to \overline{\mathbb{R}};\ x^\alpha \mapsto -\log|f_n(x^\alpha)|$$

により，連続写像 $V^{\mathrm{an}} \to \mathbb{A}^{n,\mathrm{trop}}$ を得ます．n と f_n を走らせ，seminorm の単項式近似の精度をよくしていくことで，V^{an} が得られる，というのが Payne の定理です．

定理 (S. Payne [22]) 次の自然な写像は同相である:

$$V^{\mathrm{an}} \to \varprojlim_{V \xrightarrow{\subset} \mathbb{A}^n} (V^{\mathrm{an}} \to \mathbb{A}^{n,\mathrm{trop}} \text{ の像}).$$

ここで射影系の推移射は，トーリック射 $\varphi\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ で，$\varphi \circ (V \to \mathbb{A}^n) = (V \to \mathbb{A}^m)$ をみたすものとする．

3.5 応用例

最後に，トロピカル幾何的なアプローチの応用例 (Gubler [5]) を 1 つ紹介します．この例では，関数体上の完全退化をもつアーベル多様体に関する Bogomolov 予想の証明にトロピカルアーベル多様体が登場しています．実際，複素解析的なアプローチで証明した Zhang [29] の方法の非アルキメデス的類似として，トロピカル的な見方が現れています．

Gubler [5] は次の関数体上の Bogomolov 予想の特別な場合を証明しました．

定理 (W. Gubler [5, Theorem 1.1]) B は代数的閉体上の integral 射影多様体で，余次元 1 において regular とする．A を B の関数体 K 上の d 次元アーベル多様体で，K のある place v (K の階数 1 の付値) において完全退化をもつ (すなわち，K の v での完備化 K_v の代数的閉包を完備化した体 $\mathbb{K}_v$ に base change した $A \otimes_K \mathbb{K}_v$ は，剛解析的に $(\mathbb{K}_v^\times)^d/\Lambda$ (Λ は $(\mathbb{K}_v^\times)^d$ の格子) と表される) とする．A の閉部分多様体 X は，部分アーベル多様体をねじれ点で平行移動したものでないとする．このとき，A 上の任意の ample symmetric line bundle $\mathcal{L}$ に対して，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，

$$X(\varepsilon) := \{\mathcal{L} \text{ で定まる Neron-Tate height が } \varepsilon \text{ 以下の点} \in X(\overline{K})\}$$

は X において Zariski dense でない．

関数体上，完全退化をもつ場合のアーベル多様体の表示から，例 5 で考えたトロピカルアーベル多様体を得ます．Gubler は，このトロピカルアーベル多様体に対して，Zhang の

解析的方法の類似(雑に言うと，$\mathbb{R}^d/\Lambda_0$ 上の (従来の) 測度の収束性に関する議論) を考えて，Bogomolov 予想を証明しました．詳細は [5] を参照してください．

以上でトロピカル幾何の話を終わります．トロピカルな数学に関する話題は，他にも可積分系の超離散化，Gromov-Witten 不変量 (曲線の数え上げ)，生物の系統樹など，多分野にわたります．読者の皆さんが，本稿のいたらなかった部分を補足していただけると大変幸いです．

参考文献

[1] T. Bogart, A. Jensen, D. Speyer, B. Sturmfels and R. Thomas, Computing Tropical Varieties, math.AG/0507563.

[2] S. Brannetti, M. Melo, and F. Viviani, On the trioical Torelli map, math.AG/0907.3324, 2009.

[3] A. Claw, D. Maclagan, R.R. Thomas, Moduli of MacKay quiver representation I: The coherent component, Proc. London Math. Soc. 95 (1) (2007), 179–198.

[4] A. Claw, D. Maclagan, R.R. Thomas, Moduli of MacKay quiver representation II: Gröbner basis techniques, to appear in J. Algebra.

[5] W. Gubler, The Bogomolov conjecture for totally degenerate abelian varieties, Invent. math. 169, 377–400 (2007).

[6] 石川 剛郎，トロピカル幾何学入門，東北大学「春の学校」，2007 年 1 月 (`http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/tropical/ishikawa-tropical07.pdf`).

[7] I. Itenberg, G. Mikhalkin, E. I. Shustin, Tropical Algebraic Geometry (Overwolfach Seminars), Birkhauser (Architectural) (2007).

[8] 梶原 健 (木村杏子 記) トロピカル幾何入門，名古屋大学多元数理講義録，vol 6 (2007) 5—20 .

[9] T. Kajiwara, Toric tropical geometry, in Proceeding of Toric Topology, 197–207, Contemp. Math. 460, American Mathematical Society, Providence R.I., 2008.

[10] T. Kajiwara, Tropical toric varieties, preprint (2007).

[11] 梶原 健，Tropical toric geometry, 城崎代数幾何学シンポジウム報告集，2007 年．

[12] 梶原 健，コラム「トロピカル幾何」，数理科学 2009 年 4 月号，サイエンス社，2009 年,

[13] 梶原 健，トロピカル代数とトロピカル幾何,『代数学の魅力』，別冊 数理科学 2009 年 4 月号，サイエンス社，170–178，2009 年．

[14] A. N. Kirillov，前野 俊昭，素晴らしいアメーバたち，雑誌『数学』，58，日本数学会編集，岩波書店，151–164，2006 年.

[15] G. Mikhalkin, Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$, math.AG/0312530.

[16] G. Mikhalkin, Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry, math.AG/0403015.

[17] G. Mikhalkin, Tropical geometry and its applications, math.AG/0601041.

[18] G. Mikhalkin and I. Zharkov, Tropical curves, their Jacobians and Theta functions. math.AG/0612267.

[19] T. Morita, Hilbert schemes of finite abelian group orbits and Gr'́obner fans, Hokkaido Math. J., 38 (2009), 249–265.

[20] T. Oda, Convex bodies and algebraic geometry, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3.Folge ·Band 15, Springer-Verlag, Berlin. and Heidelberg, 1988.

[21] S. Payne, Fibers of tropicalization, math.AG/0705.1732.

[22] S. Payne, Analitification is the limit of all tropicalizations, math.AG/0805.1916.

[23] J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, and T. Theobald, First steps in tropical geometry, Idempotent mathematics and mathematical physics, 289–317, Contemp. Math., 377, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[24] Y. Sekiya, Irreducibility of G-Hilbert schemes, preprint, Nagoya Univ., 2008.

[25] D. Speyer and B. Sturmfels, Tropical Mathematics, math.CO/0408099.

[26] D. Speyer and B. Sturmfels, The tropical Grassmannian, Adv. Geom. 4 (2004), no. 3, 389–411.

[27] B. Sturmfels, Gröbner bases and covex polytopes, University Lecture Series vol. 8, Amer. Math. Soc. (1996).

[28] B. Sturmfels, Solving systems of polynomial equations, CBMS Regional Conference Series in Mathematics 97, AMS (2002).

[29] S. Zhang, Equidistribution of small points on abelian varieties, Ann. Math. (2) 147(1), 159–165 (1998).

kajiwara@ynu.ac.jp
Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering,
Yokohama National University, Yokohama, 240–8501, JAPAN