正標数のガウス写像

楫　元

0. 序

代数幾何学においては, 基礎体の標数が零の場合には見られない正標数特有の様々な現象が知られている. 射影代数幾何, 特に射影接空間の振る舞いについては, ガウス写像の分離性を仮定することにより標数零の場合と同様の "直感通りの幾何" が期待される (術語については以下に詳述する). ここでは, これまでの正標数におけるガウス写像に関する研究の歴史と, 深澤知氏 (山形大学理学部) および古川勝久氏 (早稲田大学理工学部) との共同研究により得られた最近の結果について述べ, 最後に未解決問題に触れる. 以下, 基礎体 k は標数 $p \geq 0$ の代数閉体とする.

1980 年代半ば以降の正標数のガウス写像の研究テーマは, 次に凝縮される:

問題 0.1 (S. Kleiman [**29**, p. 342])**.** "*It would be good to have an example of a smooth curve X such that every tangent makes 2 or more contacts or to prove that such X do not exist.*"

1. 正標数特有の現象とガウス写像の定義

正標数における平面曲線の接線の振る舞いに関して, 標数零の場合と様相の異なる様々な奇妙な現象が知られている.

例 1.1 (A. Wallace [**46**, §7])**.** 基礎体の標数は $p > 0$ とし, $X \subseteq \mathbb{P}^2$ を

$$x^{p+1} + y^{p+1} + z^{p+1} = 0$$

により定まる平面曲線とする. 点 $P = (a : b : c) \in X$ における接線は, $T_P X = \{a^p x + b^p y + c^p z = 0\}$ となり一般の接点 $P \in X$ における接触重複度は $i(X, T_P X; P) = p$ となる. 実際, 任意の $P = (a : b : c) \in X$ に対して $Q := (a^{p^2} : b^{p^2} : c^{p^2})$ とするとき, $X \cap T_P X = pP + Q$ となっている. とくに標数が $p > 2$ ならば, 一般の接点での接触重複度が 2 よりも大きくなり, すべての点が変曲点という標数零の場合ではあり得ない状況である.

次に X の双対写像について見てみる. 一般に平面曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^2$ の**双対写像 (dual map)** とは, X の非特異点 $P \in X$ に対して, P での接線 $T_P X$ に対応する双対射影平面の点 $[T_P X] \in \check{\mathbb{P}}^2$ を対応させることにより得られる有理写像のことである. 我々の X の場合, 具体的には,

$$\gamma : X \to \check{\mathbb{P}}^2; P = (a : b : c) \mapsto [T_P X] = (a^p : b^p : c^p),$$

となる. ただし $\mathbb{P}^2$ の直線と双対射影平面 $\check{\mathbb{P}}^2$ との対応は $\mathbb{P}^2 \supseteq \{\xi x + \eta y + \zeta z = 0\} \leftrightarrow (\xi : \eta : \zeta) \in \check{\mathbb{P}}^2$ とする. すると簡単な計算から γ の像, すなわち**双対曲線 (dual curve)** $X^* := \gamma(X)$ は $\xi^{p+1} + \eta^{p+1} + \zeta^{p+1} = 0$ により定義される平面曲線となり, X と同型であることがわかる. ゆえに γ は X のフロベニウス写像である. 標数零の場合は, (次数 2 以上の) 任意の平面曲線 X に対して γ は双有理同値, すなわち $K(X) = K(X^*)$ となることが古典的に良く知られているが, この場合の $K(X)/K(X^*)$ は次数 p の純非分離拡大である. さらにこの X^* に対して双対曲線を考えれば, 標準的に $X \simeq X^{**} := (X^*)^*$ となることもわかる.

例 1.2. 標数は $p > 0$ とし, $X \subseteq \mathbb{P}^2$ を

$$X : y = x^p \subseteq \mathbb{A}^2$$

により定まる平面曲線とする. $\frac{dy}{dx} = px^{p-1} = 0$ なので, 点 $P = (a, a^p) \in X$ における接線は $T_P X = \{y - a^p = 0\}$ となり, すべて x-軸に平行である. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ で考えればすべての接線が無限遠にある点 $(1:0:0) \in \mathbb{P}^2$ を通ることになる. このように, 非特異点におけるすべての接線がある共通の一点をとおる射影曲線を **strange[1]曲線 (strange curve)** という. 標数零であれば strange 曲線は直線のみであるが, 正標数においては非自明な strange 曲線が存在するわけである. X の双対写像 γ を調べてみると,

$$\gamma : X \dashrightarrow X^*; P = (a, a^p) \mapsto [T_P X] = (0 : 1 : -a^p)$$

となっており, γ, すなわち, $K(X)/K(X^*)$ は純非分離的で次数 p となっている. 双対曲線は, $X^* = \{\xi = 0\}$ となり $\check{\mathbb{P}}^2$ の直線である. したがって X^{**} は一点に退化する.

strange 曲線に関しては次の結果が知られている:

定理 1.3 (E. Lluis [**33**], P. Samuel [**42**]). 非線形非特異 strange 曲線は, 標数 $p = 2$ の 2 次曲線に限る.

定義 1.4. 射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ の**ガウス写像 (Gauss map)** とは, X の次元を n とし $\mathbb{P}^N$ 内の n 次元線型空間全体のなすグラスマン多様体を $\mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N)$ とするとき, X の非特異点 P に対して P における射影接空間 $T_P X$ を対応させることにより得られる有理写像, $\gamma : X \dashrightarrow \mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N)$ のことと定義する ([**13**, §1 (e)], [**47**, I, §2]):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, dashed, "\gamma"] & & \mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N) \\
\rotatebox{90}{$\subseteq$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
X_{\mathrm{sm}} \arrow[rru, bend left=10] & & T_P X \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \\
P \arrow[rruu, mapsto, bend left=10] & &
\end{tikzcd}$$

以下, 自明な例外を除くために X は <u>線型ではない</u> と仮定する. また, $\gamma(X)$ により X の非特異部分 X_{sm} の γ による像の閉包を表すことにしよう: $\gamma(X) := \gamma(X_{\mathrm{sm}})^-$. ガウス写像 γ が**分離的 (separable)** とは γ により引き起こされる関数体の拡大 $K(X)/K(\gamma(X))$ が分離的であることと定める. $N = 2, n = 1$ の場合のガウス写像は上の例で見た平面曲線の双対写像に他ならない.

ここで注意すべきは, 一般有限なガウス写像 γ に対しては, 一般の射影接空間 $T_x X$ の X への接触点の個数は γ の分離次数 $[K(X) : K(\gamma(X))]_s$ と一致することである. したがって問題 0.1 は, ガウス写像の言葉を用いて次のように言換えられる:

問題 1.5. ガウス写像が非自明な分離次数をもつ非特異射影曲線は存在するか? または, そのような射影曲線の存在しないことを証明せよ.

2. 射影曲線のガウス写像

射影曲線 X に対しては, 古典的に標数が $p = 0$ ならば γ は像への双有理写像となることが良く知られている.

代数多様体の間の有理写像 $f : X \dashrightarrow Y$ に対して, X と $f(X)$ とが双有理同値となるとき f を**双有理埋め込み (birational embedding)** とよび, X と $f(X)$ とが同型となるとき f を**双正則埋め込み (biregular embedding)** とよぶことにする.

次は, 平面曲線に対しては, 知られていた事実である.

命題 2.1 (K [**21**, §2]). 標数 $p \geq 0$ の射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して以下が成り立つ:

(1) γ が分離的ならば γ は像への双有理写像となる.

(2) $p \neq 2 \Leftrightarrow \gamma$ が像への双有理写像となる射影双正則埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^M$ が存在する.

[1] “strange” のよい邦訳は?

2.1. **非特異射影曲線の双有理埋め込み (射影モデルに特異点を許す場合).** Wallace の定理を改良して Kleiman は次の形の結果を得ている.

定理 2.2 (Wallace [**46**, §7], Kleiman [**28**, I-3]). 標数 $p>0$ の平面曲線 $X' \subseteq \check{\mathbb{P}}^2$ と整数 $s \geq 1$, $r \geq 1$ に対して以下をみたす平面曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^2$ が存在する:

$$\gamma(X) = X' \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} [K(X):K(X')]_s = s, \\ [K(X):K(X')]_i = p^r. \end{cases}$$

この結果をふまえて最初に掲げた問題においては, あえて非特異性を仮定したと推測される.

全く別の証明方法であるが次の形の結果もある.

定理 2.3 (K [**21**, Corollary 3.4]). 基礎体 k 上 1 次元の代数関数体の有限次非分離拡大 K/K' に対して, 以下をみたす K の射影モデル $X \subseteq \mathbb{P}^N$ が存在する:

$$K/K' = K(X)/K(\gamma(X)).$$

注意 2.4. 上記の 2 定理に現れる X は, ほとんどの場合, 特異点をもつ.

系 2.5 (K). 標数 $p>0$ の基礎体 k 上の任意の 1 次元代数関数体 K に対して, strange な射影モデル $X \subseteq \mathbb{P}^N$ が存在する:

証明. これは定理 2.3 の証明から直ちに示される. 実際, 与えられた有限次非分離拡大 K/K' に対して X_0, X' をそれぞれ K, K' の射影モデルとするとき, 定理 2.3 の証明により $K(\psi(X_0))/K(X') = K/K'$ となる双有理埋め込み $\psi : X_0 \to \mathbb{P}^1 \times X'$ が存在する. たとえば $K' := K^p$ としよう (1 次元の場合は非分離的となっていればなんでも構わない). このとき射影空間への適当な双有理埋め込み $\theta : \mathbb{P}^1 \times X' \to \mathbb{P}^N$ で, 像は X' 上のファイバーを母線にもつ錐となるものを取る. すると合成 $\theta \circ \psi$ は X_0 の双有理埋め込みを与えることがわかる. その像を $X := \theta(\psi(X_0)) \subseteq \mathbb{P}^N$ とおくと, K/K' の非分離性から $\theta(\mathbb{P}^1 \times X')$ の母線は X の接線となることがわかる. とくに X の非特異点における接線はすべて錐の頂点を通り, X は strange である. □

2.2. **有理曲線.** この場合は簡単に, 定理 2.3 を双有理埋め込みの場合に拡張できる.

命題 2.6 (K [**20**, Example 4.1], J. Rathmann [**40**, Example 2.13]). 代数関数体の有限次非分離拡大 $K(\mathbb{P}^1)/K'$ に対して, 以下をみたす非特異有理曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ が存在する:

$$K(\mathbb{P}^1)/K' = K(X)/K(\gamma(X)).$$

2.3. **非特異射影曲線の双正則埋め込み (射影モデルに特異点を許さない場合).** 以上を踏まえて次の問題を考える.

問題 2.7 (K [**21**]). 非特異射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ をひとつ固定する. X のある射影空間への双正則埋め込み $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^M$ に対するガウス写像 $\gamma_\iota : X \to \mathbb{G}(1, \mathbb{P}^M)$ により定義される $K(\gamma(X)) \subseteq K(X)$ としてどのような $K(X)$ の部分体が現れるか？すなわち, 関数体 $K(X)$ の部分体からなる集合,

$$\mathcal{K}' := \left\{ K(\gamma_\iota(X)) \subseteq K(X) \,\middle|\, \iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^M : \text{双正則埋め込み} \right\}$$

を決定せよ.

注意 2.8. これまでに述べた事実のいくつかをこの記法で書き表すと

(1) 標数 $p=0$ の射影曲線 X に対しては $\mathcal{K}' = \{K(X)\}$.
(2) $K' \in \mathcal{K}'$ かつ $K(X)/K'$ が分離的ならば $K(X) = K'$.
(3) $p \neq 2 \Leftrightarrow$ 任意の X について $K(X) \in \mathcal{K}'$.
(4) $\mathcal{K}' \setminus \{K(\mathbb{P}^1)\} = \{K' \subseteq K(\mathbb{P}^1) | K(\mathbb{P}^1)/K' : \text{有限次非分離的}\}$.

2.4. **楕円曲線.** 標数 $p>0$ の楕円曲線 X に対して, その **p-階数 (p-rank)** r を, p-捩じれ部分の位数を用いて

$$\#\ker(p_X : X \to X; x \mapsto p\cdot x) = p^r,$$

により定義する. 実際には, $r = 0, 1$ の値を取る. $r = 0$ のとき X は**超特異的 (supersingular)** という.

定理 2.9 (K [**21**, Theorem 5.1], [**22**, Theorem 0.1])**.** 標数 $p>0$ の楕円曲線 X が超特異的ではない場合は,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}' \setminus \{K(X)\} &= \left\{ K(X') \subseteq K(X) \,\middle|\, \begin{matrix} X \to X' : \text{非分離的同種写像, かつ} \\ \hat{X} \leftarrow \hat{X}' : \text{分離的巡回被覆.} \end{matrix} \right\} \\ &= \left\{ K' \subseteq K(X) \,\middle|\, \begin{matrix} K(X)/K' : \text{有限次非分離的, かつ} \\ K'_s/K' : \text{次数} \not\equiv 0 \bmod p \text{ の巡回拡大.} \end{matrix} \right\},\end{aligned}$$

ただし, $\hat{X}$ は X の双対, K'_s は K' の $K(X)$ における分離閉包.

定理 2.10 (K [**21**, Theorem 5.2])**.** 標数 $p>0$ の超特異的楕円曲線 X に対しては,

$$\mathcal{K}' = \begin{cases} \{K(X)^2, K(X)^{2^2}\}, & \text{if } p = 2, \\ \{K(X), K(X)^p\}, & \text{if } p > 2. \end{cases}$$

定理 2.11 (K [**21**, Theorem 3.1])**.** 非特異射影曲線 X の関数体 $K(X)$ の部分体 K' で $K(X)/K'$ が有限次非分離拡大となるものに対して, 以下は同値:

(1) $K' \in \mathcal{K}'$;
(2) K' の非特異射影モデルを X' とするとき, 以下をみたす X' 上の階数 2 のベクトル束 $\mathcal{E}$ と双正則埋め込み $\varphi : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ が存在する:

$$K(X)/K' = K(\varphi(X))/K(X').$$

2.5. **種数 2 以上の代数曲線.** ガウス写像が非分離的となる双正則埋め込みをもつための十分条件に関する結果について紹介する.

定理 2.12 (K [**21**, Theorem 6.1])**.** 種数 $g \geq 2$ の非特異射影曲線 X に対して, $F : X \to X'$ をフロベニウス射とするとき, 以下は同値:

(1) $K(X)^p \in \mathcal{K}'$;
(2) 以下をみたす X' 上の安定ベクトル束 $\mathcal{E}$ と直線束 $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} X$ が存在する:

$$F^*\mathcal{E} \simeq \mathcal{P}^1_X(\mathcal{L}).$$

ただし $\mathcal{P}^1_X(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ の第 1 位主要部分の束.

定義 2.13 (H. Tango [**45**])**.** 非特異射影曲線 X が **丹後-レイノー曲線 (Tango-Raynaud curve)** であるとは, 以下をみたす直線束 $\mathcal{N} \in \operatorname{Pic} X'$ が存在することをいう:

(1) $F^*\mathcal{N} \simeq \Omega^1_X$
(2) 自然に誘導される射 $F^* : H^1(X', \mathcal{N}^\vee) \to H^1(X, F^*\mathcal{N}^\vee)$ は単射ではない.

ただし, $F : X \to X'$ はフロベニウス射.

例 2.14 (K [**21**, Corollary 6.5])**.** 種数 $g \geq 2$ の丹後-レイノー曲線 X は, 定理 2.12 (2) をみたす. 実際, $0 \neq \xi \in \ker F^* \subseteq \operatorname{Ext}^1_{X'}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{X'})$ に対応する $\mathcal{O}_{X'}$ による $\mathcal{N}$ の拡大を

$$0 \to \mathcal{O}_{X'} \to \mathcal{E} \to \mathcal{N} \to 0$$

とする. $\xi \neq 0$ より $\mathcal{E}$ が安定的であること, そして, $F^*\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X \oplus \Omega^1_X = \mathcal{P}^1_X(\mathcal{O}_X)$ となることがわかる ([**20**, Corollary 1.18]). さらに $\xi \neq 0$ より自然な射 $X \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_X) \to \mathbb{P}(F^*\mathcal{E}) \to \mathbb{P}(\mathcal{E})$ の合成 $\varphi : X \to \mathbb{P}(\mathcal{E})$ が像への双有理写像となることが解るが, さらに, $\varphi(X)$ の数値的種数を計算すると $F^*\mathcal{N} \simeq \Omega^1_X$ により $\varphi(X)$ は非特異, したがって φ が双正則埋め込みとなることがわかる.

注意 2.15. M. Raynaud [**41**] により, 丹後-レイノー曲線は小平消滅定理が一般標数では成り立たないことを示す反例の構成に用いられた.

問題 2.16 ([**24**])**.** 標数 $p > 0$, 種数 $g \geq 2$ の完備代数曲線のモジュライ空間 $\mathcal{M}_g$ における丹後-レイノー曲線の跡について調べよ.

これについては次の結果がある.

定理 2.17 (Y. Takeda [**43**], [**44**])**.** 種数 g が $p|2g-2$ をみたすとする. $\mathcal{M}_g$ における丹後-レイノー曲線の跡は, $p \equiv 3 \bmod 4$ ならば $g-1$ 以上の次元をもつ構成可能集合を含む.

2.6. **ガウス写像の一般単射性.**

定理 2.18 (K [**21**, Theorem 4.1], [**30**])**.** 射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ の幾何種数を g, ガウス写像による像 $\gamma(X)$ の幾何種数を g' とする.

(1) X が特異点として高々結節点しかもたないならば $g = g'$ となる.
(2) 特に, $g \geq 2$ ならば $\mathcal{K}' \subseteq \{K(X)^{p^e} | e \geq 0\}$ が成り立つ. すなわち γ は双有理写像かまたは純非分離的となり, γ の一般単射性が成り立つ.

下記の通りある程度の特異点を許しても, ガウス写像の一般単射性, および, g と g' の差の評価が知られている .

定理 2.19 (K [**22**, Theorem 0.2], Kleiman-R. Piene [**31**, Theorem 8])**.** 射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ の幾何種数を g とし, X の尖点の個数を $\nu := \deg \Omega^1_{\widetilde{X}/\mathbb{P}^N}$ とする. ただし $\widetilde{X}$ は X の正規化である. このとき, $2g-2 > \nu$ ならば γ の一般単射性が成り立つ.

定理 2.20 (Kleiman-Piene [**31**, Theorem 8])**.** 上記定理においてさらに s を γ の分離次数とするとき, $2s(g-g') \leq (s-1)\nu$.

3. 射影多様体のガウス写像

標数零の非特異射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対しては γ は有限かつ像への双有理写像となることが知られている. 詳しくは, P. Griffiths-J. Harris [**13**] により, 標数 $p = 0$ ならば γ の一般ファイバーは線型多様体となること, また, F. Zak [**47**] により, 任意の標数において X が非特異ならば γ は有限射となることが知られている.

3.1. **ガウス写像の一般単射性.** 射影曲線の場合の定理 2.18 の一般化として以下の結果がある.

定理 3.1 (Kleiman-Piene [**31**])**.** 非特異完全交叉多様体 X に対してガウス写像の像 $\gamma(X)$ が非特異ならば, $c_n(X) = c_n(\gamma(X))$ となる. ただし $n = \dim X$ である.

定理 3.2. 以下の射影多様体についてガウス写像の一般単射性が成り立つ:

(1) Kleiman-Piene [**31**, Theorem 7]: 非特異完全交叉射影曲面.
(2) K-A. Noma [**25**, Corollary]: 一般豊富な余接束をもつ非特異射影多様体.
(3) Noma [**36**, Theorem 1.1]: 次元 3 以上の一般型重み付き完全交叉多様体
(4) Noma [**36**, Theorem 1.2]: 接束が μ-安定な次元 2 および 3 の非特異射影多様体.

3.2. **非自明分離次数のガウス写像をもつ射影多様体.** 命題 2.6 および定理 2.9 の一般化として次の結果がある.

定理 3.3 (Noma [**37**, §1])**.** 以下の射影多様体で, 分離次数 1 より大きいガウス写像をもつ双正則埋め込みをもつものが存在する.

(1) 一般型ではない非特異射影多様体.
(2) 高々孤立特異点のみをもつ一般型正規射影多様体.

また, 射影空間 $\mathbb{P}^n$ $(n \geq 2)$ に対して, ガウス写像が非自明分離次数をもちその像が一般型正規多様体となる双正則埋め込みが存在する.

3.3. **新しい方向性: ガウス写像の一般ファイバー.** 上記は1次元の場合の研究の高次元への一般化と考えられるが, 全く違う新しいガウス写像研究として, 深澤知氏 (山形大学) による以下の研究成果がある.

例 3.4 (S. Fukasawa [**7**, Example 7.2])**.** 標数を $p = 3$ とし, 曲面

$$X : wy^6 - (x^6 + y^6 + z^6)z = 0 \subseteq \mathbb{P}^3$$

を考える. すると直接計算から, そのガウス写像の一般ファイバーは重複度3をもち, その被約化は2次曲線となることがわかる.

注意 3.5. これは, ガウス写像が既約かつ非線形な一般ファイバーをもつ射影多様体の最初に発見された例である.

定理 3.6 (Fukasawa [**8**, Theorem 1])**.** 標数 $p > 0$ の射影多様体 $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ に対してガウス写像の一般ファイバーが Y と射影同値となる n 次元射影多様体 X が存在する.

4. 最近の結果

以下は, 次の問題について取り組んだ, 深澤知氏 (山形大学), 古川勝久氏 (早稲田大学) との共同研究の成果である (FK:=Fukasawa-Kaji, FFK:=Fukasawa-Furukawa-Kaji と略記する).

問題 4.1. どの射影多様体がガウス写像 (の引き起こす関数体の拡大 $K(X)/K(\gamma(X))$) が非分離的となる (双有理ないし双正則) 埋め込みをもつか？さらに, そのようなガウス写像をもつ射影多様体を分類せよ.

4.1. **射影多様体の双有理埋め込み.**

定理 4.2 (FK [**11**, Theorem 1.2])**.** 標数 $p > 0$ の射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して以下が成り立つ.

(1) $0 \le r \le n = \dim X$ をみたす整数 r に対して以下は同値:
  (a) ガウス写像 γ が一般有限かつ階数が $\mathrm{rk}\,\gamma = r$ となる双有理埋め込み $X \dashrightarrow \mathbb{P}^M$ が存在する;
  (b) $(p, r) \neq (2, 1)$.

(2) さらに上記 (1b) をみたす r に対しては, $K(X)/K(\gamma(X))$ が非分離次数 p^{n-r} の純非分離拡大となる双有理埋め込み $X \dashrightarrow \mathbb{P}^M$ が存在する.

(3) とくに, 標数 $p > 0$ の任意の代数関数体 K に対してガウス写像 γ がフロベニウス写像と双有理同値となる K の射影モデル $X \subseteq \mathbb{P}^N$ が存在する.

ただし, 有理写像 γ の階数 $\mathrm{rk}\,\gamma$ は, 一般点 $x \in X$ における微分 $d_x\gamma : t_xX \to t_{\gamma(x)}\mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N)$ (すなわち γ が誘導するザリスキー接空間の間の k-線型写像) の階数により定義する.

定義 4.3. 射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ が **strange** であるとは, すべての非特異点 $x \in X$ の射影接空間がある共通の点 $P \in \mathbb{P}^N$ を含むことをいう.

定理 4.2 の証明においては実は次も示されている.

系 4.4 (FK [**11**, Proof of Theorem 1.2])**.** 標数 $p > 0$ の基礎体 k 上の任意の代数関数体 K に対して, strange な射影モデル $X \subseteq \mathbb{P}^N$ が存在する:

つまり正標数の場合, 特異点を許せばどんな射影多様体も strange となるように射影空間に埋め込める.

4.2. **射影多様体の双正則埋め込み.** 射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ の内在的性質として以下を導入する (FFK [**12**]):

(GMRZ) ガウス写像 γ が $\mathrm{rk}\,d\gamma = 0$ をみたす双正則埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^M$ が存在する.

注意 4.5. 射影多様体 X が (GMRZ) を満たすのは正標数の場合に限る．さらに詳しく，標数 $p>0$ のとき，$\operatorname{rk}\gamma=0$ となるためには，$K(X)$ において $K(\gamma(X))\subseteq K(X)^p$ となることが必要十分である．

例 4.6. 標数 $p>0$ における次数 d のフェルマー超曲面 F_d は，$d\equiv 1 \bmod p$ ならば (GMRZ) をみたす．

我々の研究 [**12**] において鍵となる結果は次である．

定理 4.7 (FFK [**12**, Theorem 0.2]]). 射影多様体 X と不分岐射 $f:\mathbb{P}^1\to X$ に対してその法束を $N_f:=\ker(f^*:f^*\Omega^1_X\to\Omega^1_{\mathbb{P}^1})^\vee$ により定義する．X は $f(\mathbb{P}^1)$ の各点で非特異であり，$N_f^\vee\simeq\bigoplus_{i\geq -1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i)^{r_i}$ $(r_i\geq 0)$ とする．

(1) X が (GMRZ) をみたすならば $r_{i-1}=0$ または $r_i=0$ $(\forall i\geq 0)$ が成り立つ．
(2) さらに $r_i>0$ $(i\geq 0)$ ならば $p=2$ または $p|i+1$ となり，$r_{-1}>0$ ならば $d\gamma_\iota\equiv 0$ となる任意の $\iota:X\hookrightarrow\mathbb{P}^M$ に対して $p|\deg f^*\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(1)-1$ となる．

基本的な射影多様体に対して定理 4.7 を用いると直ちに次を得る．

定理 4.8 (FFK [**12**, Theorem 0.3]).
(1) セグレ多様体 $\prod_{1\leq i\leq r}\mathbb{P}^{n_i}$ $(r\geq 2, n_i\geq 1)$ が (GMRZ) をみたす $\Leftrightarrow$ $p=2$ かつ $n_i=1$ $(\forall i)$.
(2) グラスマン多様体 $\mathbb{G}(l,\mathbb{P}^m)$ $(0\leq l<m)$ が (GMRZ) をみたす $\Leftrightarrow$ $l=0$ または $l=m-1$.
(3) 2 次超曲面 X in $\mathbb{P}^N$ $(N\geq 3)$ が (GMRZ) をみたす $\Leftrightarrow$ $p=2$ かつ $N=3$.
(4) 3 次超曲面 X in $\mathbb{P}^N$ $(N\geq 3)$ が (GMRZ) をみたす $\Rightarrow$ $p=2$.

定理 4.8 (4) の主張の逆，$\Leftarrow$ については次が示される:

定理 4.9 (FFK [**12**, Theorem 0.4]). 非特異 3 次超曲面 $X\subseteq\mathbb{P}^N$ $(N\geq 5)$ が (GMRZ) をみたすのは標数 $p=2$ のフェルマー超曲面と射影同値となる場合に限る．

この定理 4.9 は標数 $p=2$ におけるフェルマー 3 次超曲面の特徴付けから従う:

定理 4.10 (FFK [**12**, Theorem 4.4]; Cf. A. Hefez [**14**, §9], [**15**, I (14)], R. Pardini [**39**, (2.1)]). 標数 $p=2$ の非特異 3 次超曲面 $X\subseteq\mathbb{P}^N$ $(N\geq 3)$ のガウス写像 γ_0 が階数零となるのはフェルマー超曲面と射影同値となる場合に限る．

注意 4.11. 定理 4.9 を示す上でのネックは，非特異 3 次超曲面 X に対して，(GMRZ) の仮定の下 $\operatorname{rk} d\gamma_0=0$ となることを示す点にある．現在のところ，それを示すために $N\geq 5$ の仮定が必要．

定理 4.12 (FFK [**12**, Theorem 0.5]). 次数 $3\leq d\leq 2N-3$ の一般の超曲面 $X\subseteq\mathbb{P}^N$ が (GMRZ) をみたすならば，標数 $p=2$ かつ $d=2N-3$ となる．

注意 4.13. 一般の超曲面 $X\subseteq\mathbb{P}^N$ が (GMRZ) をみたし次数 d が $3\leq d\leq 2N-3$ となるとき，X に含まれる射影直線に対して定理 4.7 を適用することにより $d=N-1$ または $d=2N-3$ となることはただちに導かれる．したがって，定理 4.12 の証明においては $d\neq N-1$ を示すことがポイントとなる．証明では，さらに X に含まれる 2 次曲線に着目し，その法束を詳しく調べて定理 4.7 を適用する．

注意 4.14. 次数 d の一般超曲面 $X\subseteq\mathbb{P}^N$ に対して，X に含まれる $\mathbb{P}^N$ の直線 L の族の期待次元は $2N-3-d=\chi(N_{L/X})$，X に含まれる $\mathbb{P}^N$ の 2 次曲線 C の族の期待次元は $3N-2-2d=\chi(N_{C/X})$ により与えられる．

4.3. 応用: 射影多様体上の有理曲線の幾何.

定義 4.15. 射影多様体 X において有理曲線 $f:\mathbb{P}^1\to X$ が**自由 (free)** であるとは接束の引き戻し f^*T_X が大域切断で生成されることをいう．自由な有理曲線 f が**極小 (minimal)**[2] であるとは，$f^*T_X\simeq\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{a-2}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{n-a+1}$，と分解することをいう．ただし，$a=\deg(-f^*K_X)$，$n=\dim X$.

[2][**16**] においては "標準的 (standard)" とよばれている．

注意 4.16. 極小有理曲線族は, 射影空間や 2 次超曲面の特徴付け ([**1**], [**4**], [**5**], [**6**], [**34**], [**35**]), ファノ多様体の研究 ([**2**], [**3**], [**38**]), VMRT (:= variety of minimal rational tangents) の理論 ([**16**], [**17**], [**18**], [**19**], [**26**]) において, 重要な役割を果たしている.

標数 $p = 0$ において極小自由有理曲線の存在を保証する最も基本的な結果のひとつは次であろう:

定理 4.17 ([**32**, (IV.2.10)])**.** 標数 $p = 0$ の射影多様体 X においては, 自由有理曲線が存在すれば, 極小自由有理曲線が存在する.

正標数においてはこの基本的定理の結論は成り立たない:

定理 4.18 (FFK [**12**, Theorem 3.2])**.** 標数 $p > 0$ における次数 $ep + 1$ ($p > 0$, $e \in \mathbb{N}$) のフェルマー超曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して, $N \geq 2ep + 1$ ならば, X 上に自由有理曲線は存在するが, 極小自由有理曲線は存在しない.

これは基本的には次の結果から従う:

定理 4.19 (FFK [**12**, Theorem 0.1])**.** 標数 $p > 0$ の射影多様体 X が極小自由有理曲線に対して $f(\mathbb{P}^1)$ の各点において非特異であるとする. X が (GMRZ) をみたし $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^M$ のガウス写像の階数が零であるとする. このとき, 以下のいずれかが成り立つ:

(1) $\deg(-f^*K_X) = n + 1$, $a > p$ かつ $p|a - 1$;
(2) $\deg(-f^*K_X) = p = 2$ かつ $2|a$,

ただし, $a = \deg f^*\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(1)$, $n = \dim X$ である.

なお, 定理 4.19 における両方の場合が確かに起きる:

例 4.20 (FFK [**12**, Example 3.1])**.** (1) 標数 $p > 0$ における射影空間 $\mathbb{P}^n$ は (GMRZ) をみたし, 直線 $L \subseteq \mathbb{P}^n$ は極小自由で $\deg(-K_{\mathbb{P}^n}|_L) = n + 1$ となる.
(2) 標数 $p = 2$ におけるセグレ多様体 $(\mathbb{P}^1)^n$ は (GMRZ) をみたし, ファイバー $L := \mathbb{P}^1 \times \{\text{ 一点 }\} \subseteq (\mathbb{P}^1)^n$ は極小自由で $\deg(-K_{(\mathbb{P}^1)^n}|_L) = 2 = p$ となる.

例 4.21 (FFK [**12**, Example 3.5])**.** 標数 $p = 2$ のフェルマー 3 次曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^3$ in $p = 2$ は (GMRZ) をみたし,

(1) 捩じれ 3 次曲線 $C_3 \subseteq X$ は極小自由で $\deg(-K_X|_{C_3}) = 3 = 2 + 1$ となる.
(2) 2 次曲線 $C_2 \subseteq X$ は極小自由で $\deg(-K_X|_{C_2}) = 2 = p$ となる.

5. 未解決問題

正標数のガウス写像研究ついて, (とくに射影曲線に対する) 先行研究の一般化はさまざま考えられるが, ここでは最も基本的と考えられる未解決問題について述べる.
まず射影代数幾何学における基本的概念のいくつかを復習する.

定義 5.1 ([**15**], [**27**])**.** 射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して,

$$C(X) := \{(x, H)|T_xX \subseteq H, x \in X_{\mathrm{sm}}\}^- \subseteq \mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}}^N$$

を X の**余法線多様体 (conormal variety)** という. そしてその第 2 射影の像

$$X^* := \{H|T_xX \subseteq H, \exists x \in X_{\mathrm{sm}}\}^- \subseteq \check{\mathbb{P}}^N$$

を X の**(射影) 双対多様体 (dual variety)** という. $X^* \subseteq \check{\mathbb{P}}^N$ に対してさらに余法線多様体 $C(X^*) \subseteq \check{\mathbb{P}}^N \times \check{\check{\mathbb{P}}}^N$ を考える. 自然な同一視 $\mathbb{P}^N = \check{\check{\mathbb{P}}}^N$ をもちいて $C(X) = C(X^*)$ が成り立つとき X は**再帰的 (reflexive)** であるという.

標数 $p > 0$ の射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して, 射影接空間の振る舞いに関して正標数特有の現象を制御するために有効と思われる以下の 3 条件を考える:

(1) ガウス写像 γ (の定義する関数体の拡大 $K(X)/K(\gamma(X))$) は分離的;

(2) ガウス写像 γ の一般ファイバーは線型多様体 (X が非特異のときは γ は像への双有理写像);
(3) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ は再帰的.

注意 5.2. 線型多様体は被約なので主張 (2) $\Rightarrow$ (1) は成り立つ. 他に以下の成り立つことが知られている:

- Kleiman-Piene [**31**, §1]: (3) $\Rightarrow$ (2).
- K [**23**, Theorem], Fukasawa [**9**, §2]: $\dim X \geq 3$ のときは, (2) $\not\Rightarrow$ (3).
- FK [**10**, Theorem]: $\dim X < 3$ のときは, (1) $\Rightarrow$ (3).

問題 5.3. 主張 (1) $\Rightarrow$ (2) は成り立つか? すなわち, 「分離的ガウス写像 γ の一般ファイバーは線形多様体」は成り立つか? 特に X が非特異の場合「分離的ガウス写像 γ は像への双有理写像」は成り立つか?

謝辞. 講演の機会を下さった第 54 回代数学シンポジウム世話人の方々に感謝します. また, 報告集原稿執筆中, 数多くの貴重なコメントを下さった深澤知氏と古川勝久氏に感謝します.

参考文献

1. M. Andreatta, J. A. Wiśniewski: *On manifolds whose tangent bundle contains an ample subbundle*, Invent. Math. **146** (2001), 209–217.
2. M. Andreatta, E. Chierici, G. Occhetta: *Generalized Mukai conjecture for special Fano varieties*, Cent. Eur. J. Math. **2** (2004), 272–293
3. C. Araujo: *Rational curves of minimal degree and characterizations of projective spaces*, Math. Ann. **335** (2006), 937–951.
4. C. Araujo, S. Druel, S. Kovács: *Cohomological characterizations of projective spaces and hyperquadrics*, Invent. Math. **174** (2008), 233–253.
5. K. Cho, Y. Miyaoka, N. I. Shepherd-Barron: *Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds*, "Higher dimensional birational geometry (Kyoto, 1997)," Adv. Stud. Pure Math., **35**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, pp. 1–88.
6. K. Cho, E. Sato: *Smooth projective varieties with the ample vector bundle $\bigwedge^2 T_X$ in any characteristic*, J. Math. Kyoto Univ. **35** (1995), 1–33.
7. S. Fukasawa: *Developable varieties in positive characteristic*, Hiroshima Math. J. **35** (2005), 167–182.
8. ______: *Varieties with non-linear Gauss fibers*, Math. Ann. **334** (2006), 235–239.
9. ______: *On Kleiman-Piene's question for Gauss maps*, Compos. Math. **142** (2006), 1305–1307.
10. S. Fukasawa, H. Kaji: *The separability of the Gauss map and the reflexivity for a projective surface*, Math. Z. **256** (2007), 699–703.
11. ______: *Any algebraic variety in positive characteristic admits a projective model with an inseparable Gauss map*, J. Pure and Applied Algebra **214** (2010), 297–300.
12. S. Fukasawa, K. Furukawa, H. Kaji: *Projective varieties admitting an embedding with Gauss map of rank zero*, preprint (2009).
13. P. Griffiths, J. Harris: *Algebraic geometry and local differential geometry*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **12** (1979), 355–432.
14. A. Hefez: *Duality for projective varieties*, Ph. D. Thesis, M.I.T., 1984.
15. A. Hefez, S. L. Kleiman: *Notes on the duality of projective varieties*, "Geometry Today," Progr. Math. **60**, Birkhäuser, Boston, 1985, pp. 143–183.
16. J.-M. Hwang: *Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds*, "School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste, 2000)," ICTP Lect. Notes, **6**, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2001, 335–393.
17. J.-M. Hwang, S. Kebekus: *Geometry of chains of minimal rational curves*, J. Reine Angew. Math. **584** (2005), 173–194.
18. J.-M. Hwang, N. Mok: *Uniruled projective manifolds with irreducible reductive G-structures*, J. Reine Angew. Math. **490** (1997), 55-64.
19. J.-M. Hwang, N. Mok: *Rigidity of irreducible Hermitian symmetric spaces of the compact type under Kähler deformation*, Invent. Math. **131** (1998), 393-418.
20. H. Kaji: *On the tangentially degenerate curves*, J. London Math. Soc. (2) **33** (1986), 430–440.
21. ______: *On the Gauss maps of space curves in characteristic p*, Compos. Math. **70** (1989), 177–197.

22. ______: *On the Gauss maps of space curves in characteristic p, II*, Compos. Math. **78** (1991), 261–269.
23. ______: *On the duals of Segre varieties*, Geom. Dedicata **99** (2003), 221–229.
24. H. Kaji: 武田好史との研究連絡, 2005 年 3 月 6 日.
25. H. Kaji, A. Noma: *On the generic injectivity of the Gauss map in positive characteristic*, J. Reine Angew. Math. **482** (1997), 215–224.
26. S. Kebekus, L. Solá Conde: *Existence of rational curves on algebraic varieties, minimal rational tangents, and applications*, "Global aspects of complex geometry," Springer, Berlin, 2006, pp. 359–416.
27. S. L. Kleiman: *About the conormal scheme*, "Complete intersections (Acireale, 1983)," Lecture Notes in Math. **1092**, Springer, Berlin, 1984, pp. 161–197.
28. S. L. Kleiman: *Tangency and duality*, "Proceedings of the 1984 Vancouver conference in algebraic geometry," CMS Conference Proceedings **6**, Amer. Math. Soc., Providence, 1986, pp.163–226.
29. S. L. Kleiman (with A. Thorup): *Intersection theory and enumerative geometry: A decade in review*, in "Algbraic Geometry — Bowdoin 1985," S.J.Bloch (ed.) Proc. Symposia Pure Math. **46**–Part 2 (1987), pp. 321–370.
30. S. L. Kleiman: *Multiple tangents of smooth plane curves (after Kaji)*, "Algebraic Geometry: Sundance 1988," Contemp. Math. **116**, Amer. Math. Soc., Providence, 1991, pp. 71–84.
31. S. L. Kleiman, R. Piene: *On the inseparability of the Gauss map*, "Enumerative Algebraic Geometry (Proceedings of the 1989 Zeuthen Symposium)," Contemp. Math. **123**, Amer. Math. Soc., Providence, 1991, pp. 107–129.
32. J. Kollár: *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. **32**, Springer, Berlin, 1996.
33. E. Lluis: *Variedades algebraicas con ciertas condiciones en sus tangentes*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) **7** (1962), 47–56.
34. Y. Miyaoka: *Numerical characterisations of hyperquadrics*, "Complex analysis in several variables—Memorial Conference of Kiyoshi Oka's Centennial Birthday," Adv. Stud. Pure Math., **42**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004, pp. 209–235
35. S. Mori: *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. Math. (2) **110** (1979), 593-606
36. A. Noma: *Stability of Frobenius pull-backs of tangent bundles and generic injectivity of Gauss map in positive characteristic*, Compos. math. **106** (1997), 61–70.
37. A. Noma: *Gauss maps with nontrivial separable degree in positive characterisitic*, J. Pure Appl. Algebra **156** (2001), 81–93.
38. G. Occhetta: *A note on the classification of Fano manifolds of middle index*, Manuscripta Math. **117** (2005), 43–49.
39. R. Pardini: *Some remarks on plane curves over fields of finite characteristic*, Compos. Math. **60** (1986), 3–17.
40. J. Rathmann: *The uniform position principle for curves in characteristic p*, Math. Ann. **276** (1987), 565–579.
41. M. Raynaud: *Contre-exemple au "vanishing theorem" en caractŕistique* $p > 0$. "C. P. Ramanujam—a tribute," pp. 273–278, Tata Inst. Fund. Res. Studies in Math., **8**, Springer, Berlin-New York, 1978.
42. P. Samuel: "Lectures on old and new results on algebraic curves (notes by S. Anantharaman)," Tata Inst. Fund. Res. Lectures on Math. **36**, Tata Inst. Fund. Res., Bombay 1966.
43. Y. Takeda: 楫元との研究連絡, 2005 年 3 月 8 日.
44. Y. Takeda: *Groups of Russel type and Tango structures*, preprint, 2009.
45. H. Tango: *On the behavior of extensions of vector bundles under the Frobenius map*, Nagoya Math. J. **48** (1972), 73–89.
46. A. H. Wallace: *Tangency and duality over arbitrary fields*, Proc. London Math. Soc. (3) **6** (1956), 321–342.
47. F. L. Zak: "Tangents and Secants of Algebraic Varieties," Transl. Math. Monogr. **127**, Amer. Math. Soc., Providence, 1993.

早稲田大学理工学術院基幹理工学部数学科
kaji@waseda.jp