Varieties of modules for finite groups and finite dimensional algebras

Akihiko Hida
Faculty of Education, Saitama University
(飛田明彦　埼玉大学教育学部)

1　はじめに

本稿は 2009 年度代数学シンポジウムにおける講演の報告です.

1980 年頃から始まった有限群の表現論におけるコホモロジー的な手法, 加群の variety の理論, は多くの成果を挙げてきましたが, これに触発されて他の設定での類似の理論が様々に展開されています ([4], [7], [8], [17], [18], [19], [20], [29], など).

本稿では, ここ数年特に盛んに研究されていると思われる finite dimensional algebra, 特に selfinjective algebra の場合について有限群の場合の状況と比較しながら概略を述べてみたいと思います. 同様のテーマにつきましては長瀬潤氏の講演でも扱われていましたのでそちらもご参照下さい.

以下, 2 章では有限群の場合の加群の variety の理論について, 3 章では finite dimensional algebra の場合について述べます. 後半では加群のテンサー積と variety の関係について考察を行います.

講演の機会を与えて頂きました眞田克典先生ならびに関係の方々に感謝いたします.

2　有限群のコホモロジーと加群の variety

ここで考える加群の variety は, support variety と, 基本可換 p-群あるいは特殊な algebra に対してのみ定義される rank variety である. support variety はコホモロジー環または Hochschild コホモロジー環の極大イデアルスペクトラムを用いて定義される.

R を可換ネーター環, $\max R$ を R の極大イデアルの全体とする. R のイデアル I に対して,

$$V(I) = \{m \in \max R \mid I \subseteq m\}$$

とおく. $V(I)$, (I は R のイデアル) を閉集合とすることにより (つまり Zariski 位相により) $\max R$ は位相空間となる. 有限生成 R-加群 M に対して, $\mathrm{ann}_R(M)$ を R における M の annihilator とし,

$$V(M) = V(\mathrm{ann}_R(M))$$

とする.

p を素数とし, k を標数 p の代数的閉体, G を有限群とする.

$$H^n(G,k)=\mathrm{Ext}^n_{kG}(k,k)$$

$$H^*(G,k)=\oplus_{n\geq 0}H^n(G,k)$$

とおく. $H^*(G,k)$ には積が定義され次数付き環の構造を持っており更に次数付き環として可換, つまり, 斉次元 ζ,η に対して,

$$\eta\zeta=(-1)^{(\deg\zeta)(\deg\eta)}\zeta\eta$$

となっている. 左 kG-加群 M, N に対して,

$$\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,N)=\oplus_{n\geq 0}\mathrm{Ext}_{kG}(M,N)$$

とする. $m\in M$, $n\in N$ に対して $g\in G$ の作用を

$$g(m\otimes n)=gm\otimes gn$$

と定義して $M\otimes_k N$ は kG-加群となる. 特に, $k\otimes_k M\simeq M$ でありこれより, $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,N)$ は $H^*(G,k)$-加群となる.

Theorem (Venkov, Evens) $H^*(G,k)$ はネーター環であり, 有限生成 kG-加群 M,N に対して, $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,N)$ は有限生成 $H^*(G,k)$ 加群である.

位数 p の巡回群の直積となる有限群を基本可換 p-群という. Quillen [27] [28] はコホモロジー環 $H^*(G,k)$, あるいは $V_G(k)=\max H^*(G,k)$ と G の基本可換 p-部分群との関係を示している.

$$V_G(k)=\bigcup_E \mathrm{res}^*(V_E(k))$$

(E は基本可換 p-部分群の全体を動く) であり, $H^*(G,k)$ の Krull 次元は G の p-rank つまり 基本可換 p-部分群の rank の最大値となっている. $V_G(k)$ についてはさらに詳しく基本可換 p-部分群とその正規化群を用いて記述される.

また, 加群の射影性と基本可換 p-部分群の関係について, kG-加群が射影的であるための必要十分条件は全ての基本可換 p-部分群に制限して射影的となることである, という結果が Chouinard [15] により得られている.

これら, Quillen, Chouinard の結果を表現論の世界に一般化する形で加群の variety の理論が始まった [1] [2]. 以下加群の variety に関する結果をごく一部ではあるが述べる. 詳しくは [5] などを参照して下さい. (特に, 有限生成ではない加群の variety [6] については触れることができませんでした.)

$V_G(k)=\max H^*(G,k)$ とし

$$I_G(M)=\mathrm{ann}_{H^*(G,k)}\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M)$$

を $H^*(G,k)$ における $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M)$ の annihilator とし,

$$V_G(M) = V(I_G(M))$$

を $I_G(M)$ で定義される $V_G(k)$ の閉集合とする. $I_G(M)$ は $H^*(G,k)$ の斉次イデアルであり, $V_G(M)$ は斉次閉集合, homogeneous affine subvariety などと呼ばれる.

(2.1) M を有限生成 kG-加群,

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

を M の極小射影分解とする. $\dim_k P_n \leq a \cdot n^{c-1}$ $(n > 0)$ となる定数 a が存在するような最小の整数 c を M の complexity という.

有限生成 kG-加群 M の complexity は $V_G(M)$ の次元に等しい. 特に,
(a) M が射影的 $\Longleftrightarrow V_G(M) = \{0\}$.
(b) M が周期的 $\Longleftrightarrow \dim V_G(M) = 1$.

(2.2) G の部分群 E への制限写像 $\mathrm{res} : H^*(G,k) \longrightarrow H^*(E,k)$ により引き起こされる写像を

$$\mathrm{res}^* : V_G(E) \longrightarrow V_G(k)$$

とすると,

$$V_G(M) = \bigcup_E \mathrm{res}^*(V_E(M))$$

である [2]. ただし E は基本可換 p-部分全体を動く. これは前述の Quillen の結果および Chouinard の結果の共通の一般化となっている.

(2.3)(テンサー積定理 [3]) 加群のテンサー積の variety は各々の variety の共通部分となる. つまり, 有限生成 kG-加群 M, N に対して,

$$V_G(M \otimes_k N) = V_G(M) \cap V_G(N).$$

(2.4)(Carlson 加群 [14]) 斉次元 $\zeta (\neq 0) \in H^*(G,k)$ は同型

$$H^n(G,k) \simeq \mathrm{Ext}^1_{kG}(\Omega^{n-1}, k)$$

により完全列

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow L_\zeta \longrightarrow \Omega^{n-1}(k) \longrightarrow 0$$

と対応する. 中間項に現れる加群 L_ζ (Carlson 加群と呼ばれる) の variety は ζ により定まる超平面つまり,

$$V_G(L_\zeta) = \{\mathbf{m} \in V_G(k) \mid \zeta \in \mathbf{m}\}$$

である. (2.3) とあわせることにより, $V_G(k)$ の任意の斉次閉集合 V に対して, $V_G(M) = V$ となる kG-加群 M が存在することがわかる.

(2.5)(連結性定理 [14]) V を $V_G(k)$ の斉次閉集合とする. $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, $V_1 \neq \{0\}$, $V_2 \neq \{0\}$ となる斉次閉集合 V_1, V_2 が存在しないとき V は連結であるという. 直既約 kG-加群の variety は連結である.

(2.6) 逆に, $V_G(k)$ の連結な斉次閉集合 V に対しては, $V_G(M) = V$ となる直既約 kG-加群 M が存在することがわかる.

(2.7)(Rank variety [13]) $E = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ を基本可換 p-群とする. $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in k^n$ に対して,

$$u_\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (g_i - 1)$$

とおく. 有限生成 kE-加群 M に対して,

$$V^r(M) = \{\lambda \in k^n \mid \dim_k u_\lambda M < \frac{p-1}{p} \dim_k M\}$$

を M の rank variety という. 以前から, M が射影的 $\iff V^r(M) = \{0\}$ であることが知られており [16], これは Dade の補題と呼ばれている.

(2.8)(Support variety と rank variety) E を基本可換 p-群とすると,

$$H^*(E,k)/\sqrt{0} \simeq k[t_1, \ldots, t_n]$$

は多項式環であり $V_E(k) \simeq k^n$ である. kE-加群 M に対して, $V_E(M)$, $V^r(M)$ はともに k^n の部分集合となるが, これらの間に自然な全単射,

$$V^r(M) \longrightarrow V_E(M)$$

が存在する [3].

(2.9)(ブロックコホモロジー) kG の algebra としての直既約因子をブロックという. Linckelmann [22], [23] によりブロック B のコホモロジーが定義され研究されている. ブロックの不足群のコホモロジー環を利用してブロックコホモロジー環が定義され, 有限生成 B-加群 M に対してその variety $V_B(M)$ が定義される. B が主ブロック (自明な加群の属するブロック) の場合にはこれは $V_G(M)$ と一致する.

(2.10)(コホモロジーと fusion) $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ とすると制限写像,

$$\mathrm{res} : H^*(G,k) \longrightarrow H^*(P,k)$$

は単射である. その像の元は安定元と呼ばれその決定には p-部分群の G での共役による融合状況すなわち fusion が深く関係してくる. コホモロジーと fusion の関係については次の Mislin の定理が知られている.

$P \leq H \leq G$ とすると次は同値である.

(a) 制限写像 $\mathrm{res} : H^*(G,k) \longrightarrow H^*(H,k)$ は同型.

(b) $Q \leq P$, $g \in G$, $gQg^{-1} \leq P$ ならば $g \in HC_G(Q)$.

(b) ならば (a) であることは古くから知られているが, 注目すべきは, (a) が (b) を導くことでありこれはコホモロジーが G の内部構造に非常に深く関わっている事を示している. Mislin [25] による証明はコンパクトリー群に対するもので, 位相幾何学的な手法に拠っている. 有限群に限定した場合の代数的・表現論的な証明 [21] では加群の variety の理論, 特に Carlson 加群 L_ζ の性質が用いられる. なお代数的な証明は [26] でも得られている.

3 Hochschild コホモロジーと加群の variety

k を代数的閉体, Λ を finite dimensional selfinjective k-algebra とする. さらに Λ は algebra として直既約であると仮定する. $\Lambda^e = \Lambda \otimes_k \Lambda^{op}$, $HH^n(\Lambda) = \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, \Lambda)$, $HH^*(\Lambda) = \oplus_{n \geq 0} HH^n(\Lambda)$ とする. $HH^*(\Lambda)$ は次数付き可換環となり, Λ-加群 M, N に対して, $\mathrm{Ext}^*_\Lambda(M, N)$ は $HH^*(\Lambda)$-加群となる.

次を仮定する.

(**F1**) R はネーター的な $HH^*(\Lambda)$ の斉次部分環.

(**F2**) 任意の有限生成 Λ-加群 M, N に対して, $\mathrm{Ext}^*_\Lambda(M, N)$ は有限生成 R-加群となる.

$V_R = \max R$ とおき, 有限生成 Λ-加群 M に対して, $V_R(M) = V(\mathrm{ann}_R \mathrm{Ext}^*_\Lambda(M, M))$ とする. 以下 [17], [29] 等に従い Λ-加群の variety について前節と並行する形で述べてみたい.

(3.1) 有限生成 Λ-加群 M の complexity は $V_R(M)$ の次元と一致し,
(a) M が射影的 $\Longleftrightarrow V_R(M) = \{0\}$.
(b) M が周期的 $\Longleftrightarrow \dim V_R(M) = 1$.

(3.2) 一般の algebra に対しては基本可換 p-部分群に相当するものが考えられるとは限らないため, (2.2) に相当する結果についてはここでは触れないでおくことにする.

(3.3) 左 Λ-加群 M, N に対して $M \otimes_k N$ は必ずしも適切な Λ-加群の構造を持たず variety のテンサー積について, (2.3) に対応する性質を持つとは限らない. これについては次節で考察する.

(3.4) R の斉次元 $\eta \in HH^n(\Lambda)$ は, (Λ, Λ)-加群の短完全列,

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow M_\eta \longrightarrow \Omega^{n-1}_{\Lambda^e} \longrightarrow 0$$

に対応している. M_η は左 Λ-加群としては射影的であり, $V_R(M_\eta)$ は自明となってしまうが, 有限生成左 Λ-加群 M に対して,

$$V_R(M_\eta \otimes_\Lambda M) = V_R(\eta) \cap V_R(M)$$

が成立する [17]. $J(\Lambda)$ を Λ の Jacobson 根基, $S = \Lambda/J(\Lambda)$ とすると, $V_R(S) = V_R$ であり $V_R(M_\eta \otimes_\Lambda S) = V_R(\eta)$ となる. 特に, V_R の任意の斉次閉集合 V に対して $V_R(M) = V$ となる Λ-加群 M が存在する.

(3.5) 有限生成 Λ-加群 M が直既約ならば $V_R(M)$ は連結である [17].

(3.6) 逆に, V が連結な斉次閉集合ならば, $V = V_R(M)$ となる Λ-加群として直既約なものがとれるか, という問題は R に依存する. つまり, 有限生成直既約 Λ-加群の variety とはなり得ない連結な斉次閉集合 V が存在するような Λ, R の例がある.

一方, (2.9) のブロックコホモロジーについては, (2.6) と同様の性質が期待されるがまだ未解決である.

Question.([9]) B を kG のブロックとする. V_B の連結な斉次閉集合 V に対して $V_B(M) = V$ となる直既約 B-加群 M が存在するか ?

(3.7)(3.8) [7] ではある種の finite dimensional algebra に対して加群の rank variety $V^r(M)$ を定義し Dade の補題が成立することを示している. また, [10] では, $HH^*(\Lambda)$ の適当な subalgebra H をとることにより, (2.8) と同様の対応,

$$V^r(M) \longrightarrow V_H(M)$$

が存在することを示している.

(3.9) kG のブロック B は selfinjective algebra であり, $HH^*(B)$ は有限生成性に関する条件 (**F1**)(**F2**) を満たすので, ここで見てきた加群の variety が考えられるが, 他方 (2.9) で見たように Linckelmann によるブロックコホモロジーもある. 両者の関係について [24] では,

$$V_B(M) \simeq V_{HH^*(B)}(M)$$

であることが証明されている. ブロックコホモロジーはブロックの不足群やそれに関連した G の p-局所構造, すなわち不足群上の fusion system ((3.10) 参照) が関係しているが, 一方 $HH^*(B)$ を用いた support variety は algebra としての構造のみから決まるものであり, これらが一致するということは非常に興味深い結果である.

(3.10) (2.10) の Mislin の定理, あるいは上記のブロックコホモロジーなどにおいては, G の p-部分群の融合状況が重要となってくるがこれを公理化したものが fusion system [12] である. 有限 p-群 P 上の saturated fusion system とは, P の部分群を対象とする圏でありいくつかの公理を満たすものである. saturated fusion system $\mathcal{F}$ に対してそのコホモロジー環 $H^*(\mathcal{F}, k)$ が $H^*(P, k)$ の $\mathcal{F}$-安定元からなる部分環として定義される.

(2.10) は fusion system の場合に一般化される. つまり, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ を P 上の saturated fusion system, $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ とする. このとき次は同値となる.

(a) $H^*(\mathcal{F}_1, k) = H^*(\mathcal{F}_2, k)$.
(b) $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

P を有限群 G の Sylow p-部分群とし G の元の共役により定まる fusion system を考えた場合が (2.10) に相当する．

この一般の fusion system に対する命題の証明は, 代数的位相幾何学からの深い結果が必要でありいまだ代数的な証明は得られていない．

Question. 表現論を用いた証明は可能だろうか？特に有限群のブロックコホモロジーの場合はどうであろうか？

4 加群のテンサー積と variety

Λ は前節と同様とする．$J = J(\Lambda)$ を Λ の Jacobson 根基とする．左 Λ-加群 M, N に対して $M \otimes_k N$ は必ずしも適切な Λ-加群の構造を持たないので variety のテンサー積性質を考えることはできないが, [30] では両側加群を利用したテンサー積を調べることを提案している．X を有限生成 (Λ, Λ)-加群, M を 有限生成左 Λ-加群として, $V_R(X \otimes_\Lambda M)$ と $V_R(X/XJ) \cap V_R(M)$ を考える．X/XJ は左 Λ-加群とみている．

条件 (**F1**), (**F2**) をみたす R に対して次の性質を考える:

($\mathbf{T}_R$) 任意の有限生成 Λ-加群 M に対して,

$$V_R(X \otimes_\Lambda M) = V_R(X/XJ) \cap V_R(M).$$

Question. ($\mathbf{T}_R$) をみたす X, R はどのようなものであろうか？

Example 4.1. $k(G\times G)$-加群は作用を $g{\cdot}y{\cdot}h = (g, h^{-1})y$ と定義することにより (kG, kG)-両側加群となる．kG-加群 N に対して,

$$X = k(G \times G) \otimes_{k\Delta(G)} N$$

とする．$\Delta(G) = \{(g, g) \mid g \in G\} \simeq G$ である．このとき $V_G(X \otimes_{kG} M) = V_G(X/XJ) \cap V_G(M)$ となる．これは kG の場合のテンサー積性質 (2.3) に対応している．

G が有限 p-群であるとする．このとき, kG は局所環であり, N の composition factor は k のみである．よって, $X = k(G \times G) \otimes_{k\Delta(G)} N$ は (kG, kG)-部分加群の列

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_s = X$$

で $X_i/X_{i-1} \simeq kG$ となるものを持つ．次節でこのような状況について考察する．

Example 4.2. (3.4) の Hochschild コホモロジー環の斉次元 η から構成される (Λ, Λ)-両側加群 M_η を考える．(3.4) より,

$$V_R(M_\eta \otimes_\Lambda M) = V_R(\eta) \cap V_R(M) = V_R(M_\eta/M_\eta J) \cap V_R(M)$$

となり M_η は任意の R に対して条件 ($\mathbf{T}_R$) を満たしている．

Remark 4.3. 一般には X が条件 ($\mathbf{T}_R$) をみたすかどうかは X だけではなく R にも依存する．

5　外積代数とテンサー積性質

$1 \leq i < j \leq m$ に対して $q_{ij} \in k$ を 1 のべき根とする.

$$\Lambda = k\langle x_1, \ldots, x_m \rangle / \langle x_i^{n_i}, x_j x_i - q_{ij} x_i x_j \ (i < j) \rangle$$

とすると Λ は finite dimensional selfinjective algebra であり $HH^*(\Lambda)$ は条件 (**F1**), (**F2**) を満たしている [11]. また Λ-加群に対して rank variety も定義される ((3.7) 参照) など注目すべき対象となっている. またこの Λ は $\mathbf{Z}^m$-次数付き Hopf-algebra の構造を持っており $\mathbf{Z}^m$-次数付き Λ-加群の k 上のテンサー積を考えることができる. このことからも, Λ-加群に対して, variety のテンサー積性質を考えることは意味があると思われる.

以下では, 制約が強すぎるかもしれないが, $n_i = 2$, $q_{ij} = -1$ として外積代数

$$\Lambda = k\langle x_1, \ldots, x_m \rangle / \langle x_i^2, x_j x_i + x_i x_j \ (i \neq j) \rangle$$

について考察する.

$\sigma \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$ とする. $x, y \in \Lambda$ の $\lambda \in \Lambda$ への作用を

$$x \cdot \lambda \cdot y = \sigma(x)\lambda y$$

として定義した (Λ, Λ)-両側加群を ${}_\sigma\Lambda$ とする. $\alpha \in k^\times$, $\sigma : \Lambda \longrightarrow \Lambda$, $\sigma(x_i) = \alpha x_i$ のときは ${}_\sigma\Lambda = {}_\alpha\Lambda$ と表すことにする. Λ-加群 M に対して $\lambda \in \Lambda$ の $m \in M$ への作用を $\lambda \cdot m = \sigma(\lambda)m$ として定義される Λ-加群を ${}_\sigma M$ とおく. また, $J = J(\Lambda)$ とおく.

Example 5.1. ${}_\sigma\Lambda \otimes_\Lambda M \simeq {}_\sigma M$ である. 一方,

$$V_R({}_\sigma\Lambda/{}_\sigma\Lambda J) \cap V_R(M) = V_R(k) \cap V_R(M) = V_R(M)$$

より $V_R(M) \neq V_R({}_\sigma M)$ のときには $V_R({}_\sigma\Lambda \otimes_\Lambda M) \neq V_R({}_\sigma\Lambda/{}_\sigma\Lambda J) \cap V_R(M)$ である. $\alpha \in k^\times$ に対して, $V_R({}_\alpha M) = V_R(M)$ であり ${}_\alpha\Lambda$ はテンサー積性質を満たしている.

X を (Λ, Λ)-両側加群とする. 以下では, (Λ, Λ)-部分加群の列

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_s = X$$

で $X_i/X_{i-1} \simeq {}_{\alpha_i}\Lambda$, $\alpha_i \in k^\times$ となるものが存在すると仮定する. このとき, 有限生成 Λ-加群 M に対して, $V_R(X \otimes_\Lambda M) \subseteq V_R(X/XJ) \cap V_R(M)$ である.

一方, (3.7) で述べたように有限生成 Λ-加群に対しても基本可換 p-群の場合と同様にして rank variety が定義される. $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in k^m$ に対して, $u_\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in \Lambda$,

$$V^r(M) = \{\lambda \in k^m \mid \dim_k u_\lambda M < \frac{1}{2}\dim_k M\}$$

である. rank variety についてもテンサー積性質

$(\mathbf{T}^r)$ 任意の有限生成 Λ-加群 M に対して,

$$V^r(X \otimes_\Lambda M) = V^r(X/XJ) \cap V^r(M).$$

を考えることができる.

Proposition 5.2. 任意の $1 \leq i, j \leq s,\ i \neq j$ に対して, $\alpha_i + \alpha_j \neq 0$ と仮定する. このとき次が成立する.
(a) X/XJ は 左 Λ-加群として semisimple である.
(b) 任意の R に対して X は $(\mathbf{T}_R)$ を満たす.
(c) X は $(\mathbf{T}^r)$ を満たす.

一般の α_i について, $s = 2$ の場合は次が成立する.

Proposition 5.3. $s = 2$ のとき, つまり (Λ, Λ)-両側加群の拡大

$$0 \longrightarrow {}_{\alpha_1}\Lambda \longrightarrow X \longrightarrow {}_{\alpha_2}\Lambda \longrightarrow 0$$

に対して, X は条件 $(\mathbf{T}_{HH^*(\Lambda)})$ および $(\mathbf{T}^r)$ を満たす. また, $(\mathbf{T}_R)$ の成立しない X, R が存在する.

一般の s に対しては状況は良くわかっていない.

Question. 両側加群 X について

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_s = X$$

$X_i/X_{i-1} \simeq {}_{\alpha_i}\Lambda$, $\alpha_i \in k^\times$ とし, $\alpha_i + \alpha_j = 0$ となる $i \neq j$ がある場合, X が $(\mathbf{T}_{HH^*(\Lambda)})$ あるいは $(\mathbf{T}^r)$ をみたすのはどのようなときか ?

Λ は次数付き Hopf algebra の構造を持っており次数付き加群のテンサー積を考えることができる. これに対しては rank variety のテンサー積性質が成り立つが, これを利用して次がわかる. X はこれまでと同様とする. 次の命題の条件の前半は X/JX が次数付き右 Λ-加群となるということである.

Proposition 5.4. 左 Λ-加群として $X = \oplus_{d \in \mathbf{Z}} Y_d$ であり, 任意の i と d に対して,

$$Y_d x_i \subseteq Y_{d+1} + JX$$

と仮定する. さらに

$$V^r(D(X/JX)) = V^r(X/XJ)$$

と仮定すると, X は $(\mathbf{T}^r)$ を満たしている. ただし, $D(X/JX) = \mathrm{Hom}_k(X/JX, k)$ であり, X/JX は右 Λ-加群, $D(X/JX)$ は左 Λ-加群とみている.

参考文献

[1] J. L. Alperin and L. Evens, Representations, resolutions and Quillen's dimension theorem, J. Pure Appl. Algebra 22 (1981), 1-9.

[2] J. L .Alperin and L. Evens, Varieties and elementary abelian groups, J. Pure Appl. Algebra 26 (1982), 221-227.

[3] G. S. Avrunin and L. L. Scott, Quillen Stratification for modules, Invent. math. 66 (1982), 277-286.

[4] L. L. Avramov and R.-O. Buchweitz, Support varieties and cohomology over complete intersections, Invent. math. 142 (2000), 285-318.

[5] D. J. Benson, Representations and cohomology II: Cohomology of groups and modules, Cambridge studies in advanced mathematics 31, Cambridge University Press, 1991.

[6] D. J. Benson, J. F. Carlson and J. Rickard, Complexity and varieties for infinitely generated modules, II, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 120 (1996), 597-615.

[7] D. J. Benson, K. Erdmann and M. Holloway, Rank varieties for a class of finite-dimensional local algebras, J. Pure Appl. Algebra 211 (2007), 497-510.

[8] D. J. Benson, S. B. Iyengar and H. Krause, Local cohomology and support for triangulated categories, Annales Scientifiques de l'ENS, série 4, 41 (2008), 575-621.

[9] D. J. Benson and M. Linckelmann, Vertex and source determine the block variety of an indecomposable module, J. Pure Appl. Algebra 197 (2005), 11-17.

[10] P. A. Bergh and K. Erdmann, The Avrunin-Scott theorem for quantum complete intersections, J. Algebra 322 (2009), 479-488.

[11] P. A. Bergh and S. Oppermann, Cohomology of twisted tensor products, J. Algebra 320 (2008), 3327-3338.

[12] C. Broto, R. Levi and B. Oliver, The homotopy theory of fusion systems, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), 779-856 (electronic).

[13] J. F. Carlson, The varieties and the cohomology ring of a module, J. Algebra 85 (1983), 104-143.

[14] J. F. Carlson, The variety of an indecomposable module is connected, Invent. math. 77 (1984), 291-299.

[15] L. G. Chouinard, Projectivity and relative projectivity over group rings, J. Pure and Appl. Algebra 7 (1976), 287-302.

[16] E. C. Dade, Endo-permutation modules over p-groups II, Annals of Math. 108 (1978), 317-346.

[17] K. Erdmann, M. Holloway, N. Snashall, Ø. Solberg and R. Taillefer, Support varieties for selfinjective algebras, K-Theory 33 (2004), 67-87.

[18] E. M. Friedlander and B. J. Parshall, Support varieties for restricted Lie algebras, Invent. math. 86 (1986), 553-562.

[19] E. M. Friedlander and B. J. Parshall, Geometry of p-unipotent Lie algebras, J. Algebra 109 (1987), 25-45.

[20] E. M. Friedlander and A. Suslin, Cohomology of finite group schemes over a field, Invent. math. 127 (1997), 209-270.

[21] A. Hida, Control of fusion and cohomology of trivial source modules, J. Algebra 317 (2007), 462-470.

[22] M. Linckelmann, Varieties in block theory, J. Algebra 215 (1999), 460-480.

[23] M. Linckelmann, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebras and Representation Theory 2 (1999), 107-135.

[24] M. Linckelmann, Hochschild and block cohomology varieties are isomorphic, preprint (2009).

[25] G. Mislin, On group homomorphisms inducing mod-p cohomology isomorphisms, Comment. Math. Helvetici 65 (1990), 454-461.

[26] T. Okuyama, On a theorem of Mislin on cohomology isomorphism and control of fusion, 有限群のコホモロジー論とその周辺, 数理解析研究所講究録 1466 (2006), 86-92.

[27] D. Quillen, The spectrum of an equivariant cohomology ring, I, II, Ann. of Math. (2) 94 (1971), 549-572; ibid. (2) 94 (1971), 573-602.

[28] D. Quillen, A cohomological criterion for p-nilpotence, J. Pure Appl. Algebra 1 (1971), 361-372.

[29] N. Snashall and Ø. Solberg, Support varieties and Hochschild cohomology rings, Proc. London Math. Soc. (3) 88 (2004), 705-732.

[30] Ø. Solberg, Support varieties for modules and complexes, Trends in representation theory of algebras and related topics, Contemp. Math. 406, Amer. Math. Soc. (2006), 239-270.