ヤコビアン予想の位相的側面

浅沼　照雄
富山大学理学部

1. 序

次の問題または予想はヤコビヤン予想といわれちょうど７０年前に O.H.Keller により明確に提出されたものであるが、複素数体上 n 変数関数のヤコビヤンの概念がヤコビにより導入されて以来の未解決問題となっている。

「代数的ヤコビヤン予想」複素数体 $\mathbf{C}$ 上の n 個の n 変数多項式 $f_i = f_i(x_1, ..., x_n)(i = 1, ..., n)$ のヤコビヤン $J(f) =: J(f_1, ..., f_n) = |\partial(f_1, ..., f_n)/\partial(x_1, ..., x_n)|$ がゼロでない定数ならば $\mathbf{C}[f_1, ..., f_n] = \mathbf{C}[x_1, ..., x_n]$ が成り立つ。

与えられた複素数体 $\mathbf{C}$ 上の n 個の n 変数多項式 $f_i = f_i(x_1, ..., x_n)(i = 1, ..., n)$ の組 $f = (f_1, ..., f_n)$ は $\mathbf{C}$ の通常の位相に関して連続写像 $\phi : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ を定義する。この写像の定義域を $\mathbf{C}^n = A$、値域を $\mathbf{C}^n = B$ で表すことにすると f のヤコビヤンがゼロでない定数という条件、以降ヤコビアン条件ということにする、は ϕ は A の任意の点において局所的に同相写像になるということと同値である。さらにこの写像が同相であれば $\phi^{-1} : B \to A$ は well-defined で再び多項式であらわされることは比較的簡単に示されるからヤコビヤン予想は次のようにも定式化できる。

「幾何学的ヤコビヤン予想」n 個の多項式で定義された連続写像 $\phi : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ が $\mathbf{C}^n$ 上すべての点で局所同相ならば同相である。

以下ヤコビヤン予想とは「幾何学的ヤコビヤン予想」を意味する。便宜のため写像 $\phi : A \to B$、 および A の部分集合 $D \subset A$ について ϕ の D への制限 $\phi|_D : D \to B$ について $\phi|_D$ をしばしば同じ記号 ϕ で表すことにする。ゆえ必要に応じて ϕ の定義域、および地域を拡張して考える。

一般的にヤコビアン条件を満たす多項式写像 $\phi : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ は局所的に同相写像であり多項式による連続写像であることを用いると大域的に有限分岐被覆となることが証明できる。すなわち S を $B = \mathbf{C}^n$ の分枝集合とすると S は B の余次元が１の部分代数多様体になる。上記予想が正しいことと分岐集合が空集合であることは同値であるから、そのような S の存在の可能性を調べることがの予想の解決にむけてのひとつのアプローチになりうる。すなわち S が存在するとしてそのみたすべき代数的、位相的性質にから予想を肯定的に証明するか、反例を構成することである。とくに S の $\mathbf{C}^n$ 内での位置の問題すなわち高次元絡み (link) の様子が本質的に関わっているようである。

しかし直接にこの方針で研究を進めるには $n=2$ の場合でにすらきわめて困難でほとんど不可能に近いと思われる。このような状況の下で本稿では上記 $\phi : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ により引き起こされる具体的な代数的および位相幾何学的性質について考えていきたい。紙数の関係より $n=2$ のとき、すなわち 2 変数の場合のみに限定するが、本校で述べた命題等は一般変数へ拡張可能である。

この予想についての文献は多数あるので [1] を参照してください。また位相幾何学的用語等は主に [2] に準じています。

2. 標準的多項式写像

与えられた多項式 $f = f(x,y) \in \mathbf{C}[x,y] := \mathbf{C}^{[2]}$ について $f^{(i)} = f^{(i)}(x,y)$ で f 内の i 次の斉次多項式 (homogeneous form) を表す。とくに最高次の斉次多項式を f^+ と表すこともある。すなわち $f^+ = f^{(\lambda)}$ $(\lambda = \deg f)$ である。

$\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus 0$ とする。

定義 2.1. 多項式の対 $(f,g) \in \mathbf{C}[x,y] := \mathbf{C}^{[2]}$ が次の 2 つの条件 (1), (2) をみたすとき標準的 (*standard*) という。

(1) f^+ には x が現れない。すなわち $f = cy^\lambda + \{\text{lower degree terms}\}$ $(c \in \mathbf{C}^*,\ \lambda = \deg f)$ と表される。
(2) $\mathbf{C}(y/x, f, g) = \mathbf{C}(x,y)$.

命題 2.2. $f, g \in \mathbf{C}[x,y]$ が $\mathbf{C}$ 上で代数的独立ならば自己同型写像 $\sigma \in \operatorname{Aut}_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x,y]$ が存在して $(\sigma(f), \sigma(g))$ は標準的対となる。

Proof. $\mathbf{C}(f,g,x,y) = \mathbf{C}(f,g,x/y + ay^{n-1})$ なる $a \in \mathbf{C}^*$ および正の整数がそれぞれ無限個あるからその中の一組 (a,n) $(1 < n)$ を選んで

$$\sigma = (x - ay^n, y) \in \operatorname{Aut}_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x,y]$$

とすればよい。 □

注意 2.3. (f,g) を標準的対、$t = y/x$ とおく。t は $K := \mathbf{C}(f,g)$ 上代数的であるから、既約な多項式

$$F(T,X,Y) \in \mathbf{C}[T,X,Y] := \mathbf{C}^{[3]}$$

が同伴を含めてただひとつ存在して $F(t,f,g) = 0$ をみたす。$F(T,X,Y)$ は K 上 t の最小多項式と考えられるから

$$\deg_T(F(T,X,Y) = [\mathbf{C}(x,y) : \mathbf{C}(f,g)] = n$$

が成り立つ。 ゆえ

$$F(T,X,Y) = F_0 + TF_1 + \cdots + T^n F_n,\ F_i = F_i(X,Y) \in \mathbf{C}[X,Y]\ (i = 0, ..., n)$$

と表せる。ここで

$$F_0 = G_0^{\lambda_0} G_1^{\lambda_1} \cdots G_\alpha^{\lambda_m}$$

を F_0 の $\mathbf{C}[X,Y]$ における既約分解とする。すると

$$F_0(f(x,0), g(x,0)) = F(0, f(x,0), g(x,0)) = 0$$

であるから $G_0, ..., G_m$ の中の一つ、G_0 とする、は $G_0(f(x,0), g(x,0)) = 0$ をみたす。$C = V(F_0), C_i = V(G_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3, ..., m)$ とおくと $C = C_1 \cup \cdots \cup C_m$ は (X, Y) を座標とする平面 $E := \mathbf{C}^2$ 内の平面カーブである。また $E := \mathbf{C}^2$ は中への単射 $(X.Y) \to (T, X, Y)$ により (T, X, Y) を座標とする 3 次元空間 $\mathbf{C}^3$ の自然な平面とみなす事が出来る。すなわち $\mathbf{C}^3 = \mathbf{C} \times E$ となる。それゆえ $F(T, X, Y)$ で定義された $\mathbf{C}^3$ の超曲面を $V(F)$ とおくと $C = V(F) \cap E$ となる。

命題 2.4. $R = \mathbf{C}[x, y, F_0(f,g)^{-1}]$ および $S = \mathbf{C}[f, g, F_0(f,g)^{-1}]$ とおく。このとき次がなりたつ。
(1) $y^{-1} \in R,$
(2) R/S は整拡大である。

Proof. (1)

$$\mathbf{C}[x, y, F_0(f,g)^{-1}] = \mathbf{C}[x, y, G_0(f,g)^{-1}, ..., G_m(f,g)^{-1}]$$

であるから特に

$$G_0(f,g) \in k[x, F_0(f,g)^{-1}]$$

がなりたつ。それゆえ

$$\mathbf{C}[x, y, F_0(f,g)^{-1}]$$

は $F_0(f)$ を $\mathbf{C}[x,y]$ の多項式と考えて、その全ての既約因子の逆元をふくむ。一方、仮定 $G_0(f(x,0), g(x,0)) = 0$ より $y | G_0(f(x,y), g(x,y))$ がなりたつ。つまり y は上記の既約因子のひとつである。ゆえ (1) はなりたつ。
(2) U を変数として

$$H(U) := U^n F(U^{-1}, f, g) F_0(f,g)^{-1}$$

とおくと、$H(U)$ は U に関して S 上モニックな多項式で、$u := t^{-1}$ が方程式 $H(U) = 0$ の根であるから u は S 上整となる。ここで $\mathbf{C}[f,u]$ 上の 1 変数 Y の多項式

$$G(Y) := f(uy, y) - g(uY, Y)$$

を考える。$G(Y)$ の最高次の項は cY^λ $(c \in \mathbf{C}^*)$、であって $G(y) = 0$ がなりたつから、y は $\mathbf{C}[f,u]$ 上整であり、それゆえ $S[y]/S$ も整拡大となる。ゆえ $R = S[y,u]$ は S 上整となる。 □

定義 2.5. ヤコビアン条件をみたす標準的対 (f,g) を標準的ヤコビアン対 (*standard Jacobian pair* または *SJP*) という。

注意 2.6. (f,g) をヤコビアン対で $\deg f = \lambda$ および $\deg = g\nu$ とする。すると f^+, g^+ が $\mathbf{C}$ 上代数的独立になるための必要十分条件は

$$\deg f + \deg g = \lambda + \nu > 2$$

なることであるから、(f,g) が SJP であれば次のどちらか一方がなりたつ：
(1) $\lambda = \nu = 1$ および

$$(f,g) = (a_0 + a_1 y, b_0 + b_1 x + b_2 y)$$

ここで $a_0, a_1, b_0, b_2 \in \mathbf{C},\ a_1, b_1 \in \mathbf{C}^\times$。
(2) $\lambda \geq 1, \nu \geq 1, \lambda + \nu > 2$ および

$$(f^+, g^+) = (ay^\lambda, by^\nu)$$

ここで $a, b \in \mathbf{C}^*$ である。

補題 2.7. (f, g) がヤコビアン条件をみたすとき、$\mathbf{C}(t)$ の任意の元 α について

$$R = \mathbf{C}(\alpha)[f(x, \alpha x), g(x, \alpha x)]$$

とし、その商体における整閉包を $\bar{R}$ とすれば、$\bar{R} = \mathbf{C}(\alpha)[x]$ がなりたつ。

Proof. $\bar{R}$ は 1 変数多項式環 $\mathbf{C}(\alpha)[x]$ の正規部分環であるからそれ自身多項式環となる。ゆえに $h := h(x) \in \mathbf{C}(\alpha)[x]$ が存在して $\bar{R} = \mathbf{C}(\alpha)[h]$ と表せる。まず

$$f(x, \alpha x) = F(h), g(x, \alpha x) = G(h)$$

とおく。ここで M をヤコビアン行列 $\partial(f, g)/\partial(x, y)$ の変数 y に αx を代入して得られる 2×2 行列とする。すると

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(h)_x \\ G(h)_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_x F_h(h) \\ h_x G_h(h) \end{pmatrix}.$$

ここでヤコビアン条件より $(\partial(f, g)/\partial(x, y))^{-1}$ は再び $\mathbf{C}(\alpha)[x, y]$ 内の行列になるから M^{-1} は $\mathbf{C}(\alpha)[x, \alpha x]$ 内の行列となる。それゆえ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \equiv M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \pmod{h_x}.$$

特に $1 \equiv 0 \pmod{h_x}$ であるから $1 \in h_x \mathbf{C}(\alpha)[x]$ がなりたつ。それゆえ h は

$$h = ax + b \ (a \in \mathbf{C}(\alpha)^*, \ b \in \mathbf{C}(\alpha))$$

とあらわせる。ゆえ

$$\bar{R} = \mathbf{C}(\alpha)[h] = \mathbf{C}(\alpha)[x]$$

で示された。 □

次の命題は基本的である。

命題 2.8. (f, g) を SJP とし、α を $\mathbf{C}(t)$ 任意の元とすると $F(\alpha, X, Y)$ は $\mathbf{C}(t)$ 上 2 変数 X, Y の多項式として既約である。

上の補題を用いる代数的な証明と、位相幾何的な証明がある。後者の証明はやや複雑であるが、n 変数の場合にも拡張が可能である。以下に述べる代数的な証明は 3 変数以上への拡張は困難ある。

Proof. 注意 2.6 の (2) の場合のみを示せばよい。まず補題より

$$K := \mathbf{C}(\alpha)(f(x, \alpha x), g(x, \alpha x)) = \mathbf{C}(\alpha)(x).$$

がなりたつ。つぎに $K_0 = \mathbf{C}(\alpha)(g(x, \alpha x))$ とおく。すると

$$H(X) := g(X, \alpha X) - g(x, \alpha x) \in K_0[X] = K_0^{[1]}$$

は K_0 上 x の最小多項式 X である。ゆえに

$$[K : K_0] = \deg H(X) = \deg g(x, \alpha x) = \nu$$

を得る。ここで $g^+(x,y)$ は by^ν ($b\in\mathbf{C}^*$) と表せるから、$g(x,\alpha x)$ の最高次の項は $b(\alpha x)^\nu = b\alpha^\nu x^\nu$ である。仮定より $\alpha\neq 0$ であるから $\deg g(x,\alpha x)=\nu$ がなりたつ。ここで $I(X)$ を $f(x,\alpha x)$ の K_0 最小多項式とすると、

$$\deg I(X)=[K:K_0]=\lambda$$

および

$$I(X)|F(\alpha,X,g(x,\alpha x) \tag{1}$$

がなりたつ。なぜならば $F(t,f(x,tx),g(x,tx))=0$ より

$$F(\alpha,f(x,\alpha x),g(x,\alpha x))=0$$

がなりたつからである。さらに $(t,X,g(x,tx))$ は $\mathbf{C}$ 上代数的に独立であり、$F(T,X,Y)$ は $\mathbf{C}(T)[X,Y]$ で既約であるから $F(t,X,g(x,tx))$ もまた $\mathbf{C}(t)[X,g(x,tx)]$ の中で既約となる。それゆえ
$F(t,X,g(x,tx)$ は体 $\mathbf{C}(t,g(x,tx))$ 上 $f(x,tx)$ の最小多項式とみなすことができ、そのことから

$$\deg_X F(T,X,Y)=\deg_X F(t,X,g(x,tx)=[K:K_0]=\lambda$$

を得る。以上より

$$\deg_X F(\alpha,X,g(x,\alpha x))\leq \deg_X F(T,X,Y)=\lambda \tag{2}$$

が示された。上記 (1)、(2) をあわせて

$$F(\alpha,X,g(x,\alpha x))$$

および $I(X)$ が

$$\mathbf{C}(\alpha,g(x,\alpha x))[X]$$

の中で互いに同伴である事が容易わかる。いいかえれば $F(\alpha,X,g(x,\alpha x))$ は

$$\mathbf{C}(\alpha,g(x,\alpha x))[X]$$

内で既約であり、それから $F(\alpha,X,Y)$ が $\mathbf{C}(\alpha,Y)[X]$ 内で既約である事が従う。X,Y を取り替えて同様の議論を適用すると $F(\alpha,X,Y)$ はまた $\mathbf{C}(\alpha,X)[Y]$ において既約であることがわかる。ここで逆に $F(\alpha,X,Y)$ は $\mathbf{C}(\alpha)[X,Y]$ において可約としよう。そうすると、ある

$$F_1,F_2\in\mathbf{C}(\alpha)[X,Y]\ (\deg F_i>0\ (i=1,2))$$

があってノントリビアルな分解 $F(\alpha,X,Y)=F_1F_2$ を得る。F は $\mathbf{C}(\alpha,X)[Y]$ で既約だから F_1 および F_2 のうち少なくと一方、それを F_1 とする、は

$$\mathbf{C}(\alpha,X)[Y]^*=\mathbf{C}(\alpha,X)^*$$

に含まれる。これは $F_1\in\mathbf{C}(\alpha)[X]$ を意味する。同様の議論により F_1 および F_2 のうち少なくと一方は $\mathbf{C}(\alpha)[Y]$ にはいるが、もし $F_1\in\mathbf{C}(\alpha)[Y]$ ならば $F_1\in\mathbf{C}(\alpha)$ となり仮定に矛盾する。ゆえ $F_2\in\mathbf{C}(\alpha)[Y]$ となる。そこで

$$\Psi_\alpha:\mathbf{C}(\alpha)[X,Y]\to\mathbf{C}(\alpha)[f(x,\alpha x),g(x,\alpha x)]\subset\mathbf{C}(\alpha)[x]$$

を自然な $\mathbf{C}(\alpha)$-準同型であって

$$(X,Y)\to(f(x,\alpha x),g(x,\alpha x))$$

で定義されたものとする。すると
$$0 = \Psi_\alpha(F) = \Psi_\alpha(F_1)\Psi_\alpha(F_2)$$
であるが、しかし
$$\Psi_\alpha(F_1) = F_1(f(x, \alpha x)) \neq 0$$
および
$$\Psi_\alpha(F_2) = F_2(g(x, \alpha x)) \neq 0$$
となる。これは矛盾、よって命題は示された。 □

系 2.9. (f, g) を *SJP*、
$$\Phi_\alpha : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^2$$
を多項式写像であって $\alpha \in \mathbf{C}^*$ に対して
$$x \to (f(x, \alpha x), g(x, \alpha x)) \ (x \in \mathbf{C})$$
で定義されているものとする。すると Φ_α は $\mathbf{C}$ から $V(F(\alpha, X, Y))$ への全射はめ込み *(immersion)* である。

Proof. Φ_α が全射である事を見ればよい。
$$R = k[f(x, \alpha x), g(x, \alpha x)]$$
とおく。補題 2.7 より整閉包 $\bar{R}$ は $\mathbf{C}[x]$ に等しい。命題 2.8 により $F(\alpha, X, Y)$ は既約、それゆえ自然な $\mathbf{C}$-同型写像
$$\Phi_\alpha : \mathbf{C}[\bar{X}, \bar{Y}] \to R$$
が存在して
$$(\bar{X}, \bar{Y}) \to (f(x, \alpha x), g(x, \alpha x))$$
をみたす。ここで $\bar{*}$ は $\mathbf{C}[X, Y]$ の素イデアル $(F(\alpha, X, Y))$ による $*$ の剰余類を表す。$P = (a, b)$ を $V(F(\alpha, X, Y))$ の任意の点とする。すると $\mathbf{C}[\bar{X}, \bar{Y}]$ の極大イデアル $M = (\bar{X} - a, \bar{Y} - b)$ は well-defined であるから
$$\Phi_\alpha(M) = (f(x, \alpha x) - a, g(x, \alpha x) - b)$$
はまた R の well-defined な極大イデアルである。$\Phi_\alpha(M)$ を $\bar{R} = k[x]$ の極大イデアル $M_i = (x - a_i)$ $(i = 1, ..., m)$ に拡張できる。いま a_i の定義より容易に
$$f(a_i, \alpha a_i) = a, \ \ g(a_i, \alpha a_i) = b$$
がわかる。ゆえ Φ_α は全射である。 □

系 2.10. $L_0 = V(x) \in \mathbf{C}^2$ とする。写像 $\phi : L_0 \to C_0$ は全射はめ込みである。

Proof.
$$C_0 \subset \{(f(x, 0), g(x, 0)) | \ x \in \mathbf{C}\}$$
を示せばよい。$P = (a, b) \in C_0$ とする。すると $G_0(a, b) = 0$。ここで $R = \mathbf{C}[f(x, 0), g(x, 0)]$ とおけば $M = (f(x, 0) - a, g(x, 0) - b)$ は well-defined な R の極大イデアルである。補題 2.7 より R のその商体内での整閉包 $\bar{R}$ は $\mathbf{C}[x]$ であるから M を $\bar{R} = \mathbf{C}[x]$ の極大イデアル $\bar{M}$ に拡張できる。それゆえ $\bar{M}$ は $x - c$ $(c \in \mathbf{C})$ によって生成され $(f(c, 0), g(c, 0)) = (a, b)$ を得る。 □

下の系はヤコビアン予想において ϕ に単射を仮定すれば ϕ は同型であるというよく知られた事実のひとつの証明である。

系 2.11. もし $n = 1$ ならば $a \in \mathbf{C}^*$ が存在して

$$(ax, -a^{-1}y) = (F_1(f,g), F_0(f,g)) \ (a \in \mathbf{C}^\times)$$

がなりたつ。

Proof. $F_0(f,g) + tF_1(f,g) = 0$ であるから $xF_0(f,g) + yF_1(f,g) = 0$ を得る。かりに $\mathbf{C}[x,y]$ の多項式として $F_0(f,g)$ が y 以外の既約因子 $f_1 \in \mathbf{C}[x,y]$ もてば $F_1(f,g)$ もまた f_1 をその既約因子としてもたねばならない。ゆえ

$$\phi(V(f_1)) \subset V(F_0) \cap V(F_1)$$

そして $\phi(V(f_1))$ は無限集合である。これは矛盾であるから $F_1(f,g) = ax$ および

$$F_0(f,g) = -tF_1(f,g) = -a^{-1}y$$

がある $a \in \mathbf{C}^*$ についてなりたつ。 □

3. 擬有限点

アファイン平面の点 $(x,y) \in \mathbf{C}^2$ を $(x:y:1)$ と同一視する事により射影平面 $\mathbf{P}^2 = \{(x : y : z)\}$ の点と考える。それゆえ $\mathbf{C}^2$ は $\mathbf{P}^2$ の部分空間であり、無限遠直線 $\{(x:y:0)\}$ を L_∞ で表したとき $\mathbf{P}^2 = \mathbf{C}^2 \cup L_\infty$ である。以下この仮定の下で考える。

定義 3.1. $\phi : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ を多項式写像とする。無限遠点 $P_\infty \in L_\infty$ にたいして無限点列 $\{P_i\}$ $(i = 1, 2, ...)$ が $\mathbf{C}^2$ に存在して次の 2 つの条件をみたすとき無限遠点 P_∞ は「ϕ-擬有限」または「ϕ に関して擬有限」という。
(1) 点列 $\{P_i\}$ は $\mathbf{P}^2$ 内で P_∞ に収束する。
(2) 点列 $\{\phi(P_i)\}$ は $\mathbf{C}^2$ 内の一点 P' に収束する。

ϕ が明らかなときは単に「擬有限」ともいう。

上記の点列 $\{P_i\}$ $(i = 1, 2, ...)$ を P の定義点列（*defining sequence*）という。

点列 $\{Q_i \in \mathbf{C}^2\}$ $(i = 1, 2, ...)$ が有界（*bounded*）とは正の実数 M が存在して任意の i に対して $|Q_i| < M$ なるときをいう。ここで $|\ |$ は原点からの距離を表す。

例 3.2. $\phi = (xy + y^2, y)$ とすると $P_\infty = (1:0:0)$ は擬有限である。定義点列は $P_i = (i : 0 : 1)$ で与えられる。

命題 3.3. もし $\mathbf{C}^2$ 内に有界でない点列 $\{P_i\}$ $(i = 1, 2, ...)$ が存在して点列 $\{\phi(P_i)\}$ が有界ならば擬有限点 $P \in L_\infty$ が存在して $\{P_i\}$ の部分列 $\{P_{s(i)}\}$ $(i = 1, 2, ...)$ が P の定義点列となる。

Proof. 初めに $\{P_i\}$ の部分列 $\{P_{s(i)}\}$ $(i = 1, 2, ...)$ が存在して無限遠点 P_∞ に収束する事を示す。もしそうでなかったら無限遠点の各々の点 Q に対して開近傍 U_Q が存在して $P_i \notin U_Q$ $(i = 1, 2, ...)$ とできる。L_∞ はコンパクト集合 $\mathbf{P}^2$ のコンパクトな部分集合であるから L_∞ を覆う開近傍の集合 $\{U_Q \mid Q \in L_\infty\}$ のなかに有限個の開近傍 $\{U_{Q_1}, ..., U_{Q_m}\}$ が存在して L_∞ を覆う。そこで

$$U_\infty := U_{Q_1} \cup \cdots U_{Q_m}$$

とおくと U_∞ は L_∞ の開管状近傍（open tubular neighborhood）で $\{P_i\}\cap U=\emptyset$ をみたす。$\mathbf{P}^2\setminus U_\infty$ は $\mathbf{C}^2$ 内の境界を持つ閉集合である事に注意するとこれは十分大きな半径 $M\in\mathbf{R}$ をもつ球体 $B_M\subset\mathbf{C}^2$ に含まれる。一方定義より $\mathbf{P}^2\setminus U_\infty$ はすべての P_i $(i=1,2,...)$ を含むがこれは $\{P_i\}$ が有界でないという仮定に反する。ゆえ部分列 $\{P_{s(i)}\}$ $(i=1,2,...)$ が存在してある無限遠点 P_∞ に収束する。

さらに $\{\phi(P_{s(i)})\}$ は有界であるから $\{P_i\}$ を $\{P_{s(i)}\}$ で置き換えることにより最初から

$$\lim_{\imath\to\infty} P_i=P_\infty\in L_\infty$$

としてよい。有界性の定義から容易に十分大きな M をとって $\{\phi(P_i)\}\subset B_M$ とできる。B_M はコンパクトであるから $\{\phi(P_i)\}$ の収束部分列 $\{\phi(P_{s(i)})\}$ を選んで

$$\lim_{i\to\infty}\phi(P_{s(i)})\in B_M\subset\mathbf{C}^2$$

とできる。この $\{\phi(P_{s(i)})\}$ が求めるものとなる。 □

系 3.4. ϕ が同相ならば擬有限点は存在しない。とくに同型、すなわち $\mathbf{C}[x,y]=\mathbf{C}[f,g]$ ならば擬有限点は存在しない。

この系は定義および前命題3.3から直接従う。これに対して擬有限点が存在しなくても同型でない ϕ が存在する。たとえば $\phi=(x+y^2,y^3)$ などがそうである。一般に共通の因子を持たない $\mathbf{C}$ 上代数的上独立な f,g についてほとんどの場合、擬有限点は存在しない。次の命題3.5は存在するためのひとつの必要条件を与えている。

命題 3.5. $\phi=(f,g):\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$ を多項式写像で $\deg f=\lambda,\ \deg g=\nu$ とする。もし $P_\infty=(p:q:0)$ が擬有限なら、

$$f^{(\lambda)}(p,q)=g^{(\nu)}(p,q)=0$$

がなりたつ。

Proof. $\{P_i:=(p_i:q_i:r_i)\mid r_i\neq 0, i=1,2,...\}$ を P_∞ の定義点列とする。$p\neq 0$ としても一般性を失わない。もし正の整数 N があって $p_i=0$ がすべての $N<i$ についてなりたてば,$P_i=(0:q_i/r_i:1)$ $(N<i)$ であるから、P_i $(i=N+1,N+2,...)$ は $V(x)$ 上にある。それゆえ

$$P\in V(x)\cap L_\infty$$

である。これより $p=0$ となり仮定に矛盾する。ゆえに $\{P_j\}$ の部分列 $\{P_{s(j)}\}$ を選んで $N<s(j)<s(j+1)$ および $p_{s(j)}\neq 0$ $(j=1,2,...)$ とできる。$\{P_{s(j)}\}$ は再び P に収束する事はすぐわかるから $P_{s(i)}$ を初めから P_i としてよい。それゆえ $p_i\neq 0$ がすべての $i=1,2,...$ についてなりたつとできる。ここで $q_i/p_i=u_i, r_i/p_i=v_i$ とおくと

$$\lim_{i\to\infty}(P_i)=\lim_{i\to\infty}(1:u_i:v_i)=(1:q/p:0)$$

がなりたつ。さらに擬有限性より $\{|\phi(P_i)|\}$ は有界である、すなわち $0<M\in\mathbf{R}$ が存在して $|\phi(P_i)|<M$ がすべての $i=1,2,....$ についてなりたつ。これより次の不等式

$$\alpha:=|f(1/v_i,u_i/v_i)|=|f(p_i/r_i,q_i/r_i)|<M$$

がすべての $i=1,2,...$ についてなりたつ。とくに

$$|v_i|^\lambda\alpha<|v_i|^\lambda M \qquad (1)$$

である。いま $f^* = f - f^{(\lambda)}$ とすると $\deg f^* < \lambda$ ゆえ

$$\hat{f}(z,y) := z^\lambda f^*(1/z, y/z) \in z\,\mathbf{C}[z,y] \qquad (2)$$

がなりたつ。(1) より

$$|\hat{f}(v_i,u_i) + f^{(\lambda)}(1,u_i)| = |v_i^\lambda|\alpha \le |v_i|^\lambda M$$

を得る。さらに $\{u_i\}$ が有界かつ $\lim_{i\to\infty} v_i = 0$ に注意すれば (2) より

$$\hat{f}(v_i,u_i) \to 0$$

となる。その結果

$$\lim_{i\to\infty} |f^{(\lambda)}(1,u_i)| \to 0$$

であり $f^{(\lambda)}(1:q/p) = 0$ を得る。なぜならば

$$\lim_{i\to\infty} u_i = \lim_{i\to\infty} q_i/p_i = q/p$$

であって $\mathbf{C}$ が完備であるからである。ゆえに

$$f^{(\lambda)}(p,q) = p^\lambda f^{(\lambda)}(1,q/p) = 0$$

がなりたつ。g についても全く同様に証明できる。

□

この命題より直ちに次が従う。

系 3.6. *P_∞ が SJP に関する擬有限点ならば $P_\infty = (0:0:1)$ がなりたつ。*

4. 被覆

一般論より

命題 4.1. *2 変数多項式環 $\mathbf{C}[x,y]$ 2 つの元 $f,g \in \mathbf{C}[x,y]$ が $\mathbf{C}$ 上代数的に独立とし $\phi = (f,g) : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ は多項式写像とする．すると定義域 $C^2 := A$ のカーブ C および値域 $C^2 := B$ のカーブ C' が存在して*

$$\phi : \mathbf{C}^2 \setminus C \to \mathbf{C}^2 \setminus C'$$

が被覆指数 (cvering index, degree) $n = [\mathbf{C}(x,y) : \mathbf{C}(f,g)]$ をもつ被覆 (covering) となる．

序で述べたように ϕ の C および C' の具体的な定義方程式を (f,g) から求めることは望み得ない。しかし (f,g) が SJP であれば次が成り立つ。

命題 4.2. *ϕ を SJP とし注意 2.7 の状況を仮定する。すると ϕ はあるカーブ D に含まれる分岐集合 S、被覆指数 n をもつ分岐被覆写像であって $C_i \subset S (i = 1,2,...,m)$ がなりたつ。*

Proof. 方針だけを述べる。

証明は代数的な部分と位相的な部分とで構成される。

$$Q = (q_1,q_2) \in B := \mathbf{C}^2$$

とする。B を自然な対応で Spec $\mathbf{C}[X,Y]$ と同一視すれば

$$Q = (X - q_1, Y - q_2) \in \mathrm{Spec}\ \mathbf{C}[X,Y]$$

である。ここで命題 2.4 から $Q \in B \setminus C$ ならば $(X - q_1, Y - q_2)$ は Spec $\mathbf{C}[x, y]$ の極大イデアルに常に拡張可能であり、その異なった個数は (f, g) よって決まるある固定されたカーブ D に含まれなければ丁度 n となる。それらに対応する n 個の $\mathbf{C}^2 := A$ の点を $Q_1, ..., Q_n$ とすれば Q の B 内の十分小さい近傍 U_Q は均等に被覆 (evenly covered) され $\phi^{-1}(U_Q)$ の連結成分は n 個で各々が $Q_1, ..., Q_n$ の開近傍となっている。これらの事実を示し証明を行う。 □

命題 4.3. ヤコビアン条件をみたす多項式写像 $\phi : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ について次の (1)、(2) は同値である。:
(1) ϕ は同型でない。
(2) 擬有限点が存在する。

証明の方針は、擬有限点 P_∞ があって、その定義する点列を $\{P_i\}$ とするとき、点列 $\{\phi(P_i)\}$ は $\mathbf{C}^2$ 内の一点 P' に収束するが、その点は常に分岐集合に含まれる。また逆に分岐集合は上の条件をみたす点よりなる事をホモトピーを用いて示すことによる。以上を基本的な定義および準備として次が示せる。

定理 4.4.

$$\phi = (f, g) : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$$

を *JSP* とする。すると既約な多項式 $F(T, X, Y) \in \mathbf{C}[T, X, Y]$ があって $F(t, f, g) = 0$ をみたす。ここで $t = y/x$ である。

$$F_0(X, Y) = F(0, X, Y) \in \mathbf{C}[X, Y]$$

とおく。すると次の (1) – (3) は同値である：
(1) $F_0(X, Y)$ は既約である。
(2) $P_\infty = (1 : 0 : 0)$ は擬有限でない。
(3) ϕ は同型である。

命題 2.2 よりヤコビアン予想の反例が存在すれば、JSP についても反例が存在する。ゆえ任意の JSP について上の定理の特に (1) を示せば予想の証明になる。

上の定理を含む詳細については現在準備中である。

References

[1] Arno van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, 190. Birkhauser Verlag, Basel (2000)
[2] 本間龍雄, 組み合わせ位相幾何学, 共立全書, 共立出版 (1980)

〒 930-8555　富山市五福 3190
E-mail address: asanuma@sci.u-toyama.ac.jp